Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 532.593

РАЗВИТИЕ КОРАБЕЛЬНЫХ ВОЛН

А. А. Золотарев

(Ростов-на-Дону)

Исследуются существенно неустановившиеся волновые режимы (образование, развитие корабельного следа, его границы и зоны вне корабельного следа), а также режимы установления корабельных волн. Асимптотический анализ задачи, проведенный по четырем характерным параметрам, позволяет выделить одиннадцать зон с качественно различным поведением решения. В восьми из указанных зон решения обладают качественно новыми асимптотическими свойствами, а в трех ранее известных строятся более полные асимптотические разложения, учитывающие неустановившиеся вклады. Все это позволяет описать процесс образования, развития и установления корабельных волн на свободной поверхности жидкости в любой момент времени.

Ранее, в аналогичных неустановившихся задачах основные исследования ограничивались изучением области сформировавшегося корабельного следа и его границы [1,2]. Более полные исследования зон с различным поведением свободной поверхности, но в установившемся случае приведены в [3].

1. Рассматривается задача о движении идеальной несжимаемой жидкости бесконечной глубины, которое вызвано равномерным и прямолинейным перемещением по свободной поверхности сконцентрированной в точке системы нормальных напряжений

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} P, \quad \operatorname{div}\mathbf{V} = 0 \tag{1.1}$$

$$P = p_0 + \rho g \zeta, \quad V_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad z = 0$$

$$\{\mathbf{V}, P\} = 0, \quad z = -\infty; \quad \{\mathbf{V}, P, \zeta\} = 0, \quad x^2 + y^2 = \infty$$

$$\{\mathbf{V}, \zeta, p_0\} = 0, \quad t = 0; \quad \mathbf{V} = \{V_x, V_y, V_z\}$$

$$p_0 = \lim_{\beta\to 0} \frac{q\beta}{2\pi}[(x+Ut)^2 + y^2 + \beta^2]^{-3/2}, \quad t > 0$$

Здесь x, y, z — прямоугольные декартовы координаты, $\mathbf{V}$ — вектор скорости, ζ — возвышение свободной поверхности жидкости в момент времени t, P — гидродинамическое давление, p_0 — система внешних нормальных напряжений, U — скорость ее движения, ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести.

Применяя к задаче (1.1) метод интегральных преобразований Лапласа по t и Фурье по переменным x, y, получим интегральное представление возвышения свободной поверхности жидкости

$$\zeta = -\frac{qgK}{4\pi^2\rho U^4}\lim_{\beta\to 0}\int_0^T\int_0^{2\pi}\int_0^\infty a^{3/2}\sin(K\tau\sqrt{a})\,e^{-\mu(\theta,\tau)a}\,da\,d\theta\,d\tau \tag{1.2}$$

$$\mu(\theta,\tau) = \frac{g\beta}{U^2} + iKR(\tau)\cos(\theta-\gamma),$$

$$R(\tau) = [(\tau-\cos\gamma)^2 + \sin^2\gamma]^{1/2}$$

$$K = \frac{gr}{U^2}, \quad T = \frac{Ut}{r} \quad (x + Ut = r\cos\gamma,\ y = r\sin\gamma)$$

где r, γ — координаты точки в подвижной полярной системе координат, связанной с исходной неподвижной по формулам, указанным в скобках.

2. Проведем анализ ζ в области переднего фронта волн ($KT^2 \leqslant \mathrm{const} < \infty$, $T \leqslant \mathrm{const} < \infty$), а также при ограниченных временах вблизи источника возмущений ($KT \leqslant \mathrm{const} < \infty$, $T \leqslant \mathrm{const} < \infty$), исключая начало координат. Для этого в формуле (1.2) выполним интегрирование по a, предварительно разложив синус в ряд. В полученном разложении интегралы по θ вычислим с помощью теории вычетов. Затем, совершив предельный переход ($\beta \to 0$), получим

$$\zeta = \frac{qg}{2\pi\rho U^4}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{[(2m+1)!!]^2}{(4m+1)!!}K^{2m-1}\Phi_{2m}(T,\gamma) \tag{2.1}$$

$$\Phi_{2m}(T,\gamma) = \int_0^T \tau^{4m+1}R(\tau)^{-2m-3}d\tau$$

$$T \leqslant \mathrm{const} < \infty, \quad KT^2 \leqslant \mathrm{const} < \infty \quad (KT \leqslant \mathrm{const} < \infty)$$

$$0 < \gamma_0 \leqslant |\gamma|, \quad \gamma_0 = \mathrm{const}$$

В $\Phi_{2m}(T, \gamma)$ перейдем к новой переменной интегрирования R ($\operatorname{Re} R > 0$), т. е.

$$\tau = \cos\gamma + \delta_1\sqrt{R^2 - \sin^2\gamma}, \quad \delta_1 = \operatorname{sign}(\tau - \cos\gamma)$$

Воспользовавшись известными формулами (см. 2.110, 2.260 (2), 2.265, 2.271 (4) [4]), имеем

$$\Phi_{2m}(T,\gamma) = \sum_{s=0}^{4m+1}\binom{4m+1}{s}(\cos\gamma)^{4m-s+1}I_{2m+2}^{s-1} \tag{2.2}$$

$$I_{2m+2}^{s-1} = \sum_{p=0}^{m}\frac{B_p}{(\sin\gamma)^{2(p+1)}}\left\{\frac{(T-\cos\gamma)^{s+1}}{[R(T)]^{2(m-p)+1}} - (-\cos\gamma)^{s+1}\right\} -$$

$$-\frac{B_{m+1}G_{s-1}}{(\sin\gamma)^{2(m+1)}} \quad (s \neq 1)$$

$$I_{2m+2}^{0} = \frac{\delta}{2m+1}[1 - R(T)^{-2m-1}], \quad \delta = \begin{cases} 1, & \cos\gamma \leqslant 0 \\ -1, & \cos\gamma > 0\end{cases}$$

$$B_0 = \frac{1}{2m+1},$$

$$B_p = \frac{(s-2m)(s-2m+2)\ldots(s-2m+2p-2)}{(2m+1)(2m-1)\ldots(2m-2p+1)}(-1)^p$$

$$G_{s-1} = \sum_{q=0}^{[(s-1)/2]} \eta_q (\sin\gamma)^{2q} \{R(T)(T-\cos\gamma)^{s-2q-1} -$$

$$-(-\cos\gamma)^{s-2q-1}\} - \lambda\delta^{s-1} \quad (s \geqslant 1)$$

$$\eta_0 = \frac{1}{s}, \quad \eta_q = \frac{(s-1)(s-3)\ldots(s-2q+1)}{s(s-2)\ldots(s-2q)}(-1)^q$$

$$\lambda = 0, \ s = 2s_1 + 1 \ (s_1 \geqslant 0); \ \lambda = \frac{(2s_1-1)!!}{(2s_1)!!} G_{-1}, \quad s = 2s_1 \quad (s_1 > 0)$$

$$G_{-1} = \ln L; \quad L = (1+\cos\gamma)/[R(T) + |T-\cos\gamma|]$$

$$0 \leqslant T \leqslant \cos\gamma \ (\cos\gamma \leqslant 0)$$

$$L = (1+\cos\gamma)[R(T) + |T-\cos\gamma|]\,|\sin\gamma|^{-2}$$

$$0 < \cos\gamma < T$$

$$0 < |\gamma| < \pi, \quad \binom{\nu}{s} = \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-s+1)}{s!}, \quad \binom{\nu}{0} = 1$$

В случае $|\gamma| \to \pi$, разложив в ряд подынтегральную функцию по степеням комплекса $[\sin\gamma/(\tau-\cos\gamma)]^2 < 1$, проинтегрировав по τ, получим

$$\Phi_{2m}(T,\gamma) = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{-m-{}^3/_2}{s} (\sin\gamma)^{2s}\chi_{m,s} \tag{2.3}$$

$$\chi_{m,s} = \sum_{p=0}^{\omega} a_p (\cos\gamma)^p T^{4m-p+1}(T-\cos\gamma)^{-\varkappa} - \eta, \quad \varkappa = 2(m+s+1)$$

$$\eta = (\varkappa+1)a_\omega \left[\sum_{q=0}^{\varkappa-1} d_q \left(\frac{T}{T-\cos\gamma}\right)^{\varkappa-q} - \ln\frac{T-\cos\gamma}{|\cos\gamma|}\right]$$

$$s \leqslant m-1 \quad (m > 1), \quad \omega = 2(m-s-1)$$

$$\eta = \varkappa^{-1}a_\omega (\cos\gamma)^{\omega+1}[(T-\cos\gamma)^{-\varkappa} - |\cos\gamma|^{-\varkappa}]$$

$$s > m-1 \quad (m \geqslant 0), \ \omega = 4m$$

$$a_0 = \frac{1}{2m-2s-1}$$

$$a_p = \frac{(4m+1)(4m)\ldots(4m-p+2)}{(2m-2s-1)(2m-2s-2)\ldots(2m-2s-p-1)}$$

$$d_q = [\varkappa(\varkappa-1)\ldots(\varkappa-q)]^{-1}$$

Формулы (2.1) — (2.3) дают решение задачи для переднего фронта волн, а также отражают развитие волновой картины вблизи импульса за исключением луча $\gamma = 0$ и начала координат.

3. Проведем анализ возвышения свободной поверхности жидкости в зонах основных возмущений ($K \to \infty$). Для этого, воспользовавшись известными формулами 3.937 [4], выполним интегрирование по θ в (1.2). Имеем

$$\zeta = -\frac{qgK}{2\pi\rho U^4} \int_0^T \int_0^\infty a^{3/2} \exp(g\beta U^{-2}a) \sin(K\tau\sqrt{a})\, J_0(KaR(\tau))\, da\, d\tau$$

Далее, заменим функцию Бесселя J_0 асимптотикой. Учитывая формулы 9.243 (2), 9.253, 8.956, 8.254 [4], оценивая остаток, получим

(3.1) $$\zeta = -Q\,[\mathrm{Im}V_0 - 11/2K^{-1}\mathrm{Re}V_1 + 9/16\pi^{3/2}K^{-3/2}V_2] + R_\zeta$$

$$V_j = \int_0^T \psi_j(\tau)\,e^{iK\varphi(\tau)}\,d\tau \quad (j=0,1), \quad V_2 = \int_0^T R^{-5/2}(\tau)\,d\tau$$

$$\varphi(\tau) = \frac{\tau^2}{4R(\tau)}, \quad \psi_j(\tau) = \frac{\tau^S}{R^M(\tau)}, \quad S = 3-2j, \quad M = 4-j$$

$$(j = 0, 1)$$

$$Q = \frac{qg}{2^{7/2}\pi\rho U^4}, \quad |R_\zeta| = O(K^{-3/2-\alpha}), \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1/2$$

$$|\gamma| \geqslant \gamma_0 > 0, \quad \gamma_0 = \mathrm{const}$$

Применение нейтрализаторов Ван-дер-Корпута [5,6] позволяет показать, что значения интегралов V_j $(j = 0, 1)$ зависят лишь от вкладов концевых точек промежутка интегрирования и стационарных точек τ_m $(m = 0, 1, 2)$ фазовой функции $\varphi(\tau)$ на этом промежутке, где

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_{1,2} = (3\cos\gamma \mp \sqrt{9\cos^2\gamma - 8})\,/\,2$$

$$\varphi'(\tau_m) = 0 \quad (m = 0, 1, 2)$$

$$\gamma_0 \leqslant |\gamma| \leqslant \gamma_*, \quad \cos\gamma_* = 2\sqrt{2}\,/\,3$$

Найдем вклад концевой точки T в интегралы V_j $(j = 0, 1)$. Пусть $0 < T < \tau_1$ либо $T \to \tau_1 - 0$, $|K\varphi'(T)| \to \infty$. Введем на отрезке $[0, T]$ нейтрализатор Ван-дер-Корпута

$$\nu(\tau) = 1, \frac{d^n}{d\tau^n}\nu(\tau) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \eta$$

$$\frac{d^m}{d\tau^m}\nu(\tau) = 0 \quad (m = 0, 1, \ldots), \quad T - \eta \leqslant \tau \leqslant T$$

$$\eta \leqslant T\,/\,2, \quad T - \eta < R(T)$$

Тогда

(3.2) $$V_j = \chi_j^+(0) + \chi_j(T) \quad (j = 0, 1)$$

$$\chi_j^+(0) = \int_0^{T-\eta} \nu(\tau)\,\psi_j(\tau)\,e^{iK\varphi(\tau)}\,d\tau$$

$$\chi_j(T) = \int_\eta^T [1 - \nu(\tau)]\,\psi_j(\tau)\,e^{iK\varphi(\tau)}\,d\tau$$

Вклад точки τ_0 известен [7] (он соответствует неволновым деформациям свободной поверхности)

(3.3) $$\chi_0^+(0) = O(K^{-2}), \quad \chi_1^+(0) = O(K^{-1})$$

Для вычисления вклада точки T применим к интегралу $\chi_j(T)$ метод Фурье. Получим

(3.4) $$\chi_j(T) = e^{iK\varphi(T)}\,[R(T)]^{-j} \sum_{n=0}^{N} d_n(S, M)\,[KR(T)]^{-n-1} + R_\chi$$

$$0 < \gamma_0 \leqslant |\gamma|, \quad |K\varphi'(T)| \to \infty, \quad K^{-j}\,|R_\chi / R_\zeta| \sim \mathrm{const}$$

$$d_n(S, M) = \Gamma\left(\frac{n+1}{B}\right) B^{-1} \exp\left(i\pi\delta\,\frac{n+1}{2B}\right) \times$$
$$\times \sum_{m=0}^{n} (m+1)\, a_m h_{n-m}(S, M)$$
$$h_n(S, M) = \sum_{m=0}^{n} q_m(S, M)\, c_{n-m}(m)$$
$$c_0(m) = a_0^{\,m}, \quad c_n(m) = \frac{1}{na_0} \sum_{k=0}^{n} (km - n + k)\, a_k c_{n-k}(m), \quad n \geqslant 1$$
$$q_m(S, M) = \sum_{n=0}^{\Omega} \binom{S}{S-n} \delta_1^{S-n} H^{S-n} C_{m-n}^{M/2}(\delta_1\mu)$$
$$\Omega = \min(m, S), \quad H = T/R(T), \quad \mu = (\cos\gamma - T)/R(T)$$
$$a_0 = \frac{1}{|b_0|^{1/B}}, \quad a_1 = -\frac{a_0^2}{B}\frac{b_1}{b_0}$$
$$a_n = -\frac{a_0^{n+1}}{B}\frac{b_n}{b_0} - \frac{1}{Ba_0^{B}} \sum_{m=1}^{n-1} \left\{\frac{mB - n + m}{n} a_m c_{n-m}(B) - \right.$$
$$\left. - \frac{b_{n-m}}{b_0} \sum_{k=1}^{m} \frac{k(B+n+1) - (k+1)m}{m} a_k c_{m-k}(B+n-m)\right\}, \quad n \geqslant 2$$
$$b_n = p_{B+n}, \quad p_m \equiv \frac{1}{4} q_m(2, 1) = \delta_1^{\,m} R^{1-m}(T) \frac{\varphi^{(m)}(T)}{m!}$$

где $C_m^{\nu}(\mu)$ — многочлены Гегенбауэра. В рассмотренном случае ($0 < T < \tau_1$ либо $T \to \tau_1 - 0$, $K\varphi'(T) \to \infty$) в равенстве (3.4) полагаем $\delta = \delta_1 = -1$, $B = 1$.

Формулы (3.2) — (3.4) определяют волновой вклад в решение (3.1), описывая процесс развития волн для моментов времени, когда корабельный след еще не появился ($0 < T < \tau_1$), а для моментов времени, соответствующих формирующемуся и сформировавшемуся корабельному следу ($\tau_1 \leqslant T \leqslant \tau_2$; $T > \tau_2$), процесс дальнейшего развития и установления ($\chi_j(T) \to 0$, $T \to \infty$) вне зоны корабельного следа.

Рассмотрим процесс образования системы продольных волн корабельного следа. В этом случае $T \to \tau_1 - 0$, так что $K\varphi'(T) \to 0$ при условии $\gamma_0 \leqslant |\gamma| \leqslant \gamma_1^- < \gamma_*$. К интегралу $\chi_j(T)$ формулы (3.2) метод Фурье уже неприменим (в связи с тем, что $K\varphi'(T) \to 0$), как неприменим в известном виде и метод стационарной фазы (поскольку $\varphi'(T) \neq 0$). В этом случае посредством преобразования фазовой функции $\varphi(\tau)$ выделим экспоненциальный множитель с показателем, стремящимся к нулю, и присоединим его к амплитудной функции. Получим новые фазовую $\Phi(\tau)$ и амплитудную $\Psi_j(\tau; K)$ функции

$$\Phi(\tau) = \varphi(\tau) - \varphi(T) - \varphi'(T)(\tau - T), \quad \Phi'(T) = 0, \quad \Phi''(T) \neq 0 \tag{3.5}$$
$$\Psi_j(\tau; K) = \nu(\tau)\psi_j(\tau) \exp[iK\varphi'(T)(\tau - T)], \quad K\varphi'(T) \to 0, \quad K \to \infty$$

Интеграл $\chi_j(T)$ принимает вид

$$\chi_j(T) = e^{iK\varphi(T)} \int_{\eta}^{T} \psi_j(\tau; K)\, e^{iK\Phi(\tau)}\, d\tau \quad (j = 0, 1)$$

К нему, в силу свойств (3.5) функции $\Phi(\tau)$, применим метод стационарной фазы, воспользовавшись техникой работы [7]. Обозначая $\chi_j(T)|_{T\to\tau_1-0}$ через $\chi_j^-(T)|_{T\to\tau_1}$, получим

(3.6)
$$\chi_j^-(T)|_{T\to\tau_1} = e^{iK\varphi(T)}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\lambda_n^j K^{-(n+1)/2} + R_\chi$$
$$0<\gamma_0\leqslant|\gamma|\leqslant\gamma_1^-<\gamma_*,\quad K\varphi'(T)\to 0,\quad K\to\infty$$
$$K^{-j}|R_\chi/R_\zeta|\sim\text{const}$$
$$|\lambda_{N+1}^j|K^{-N/2-j-1}\leqslant|R_\zeta|\leqslant|\lambda_N^j|K^{-(N+1)/2-j}$$
$$\lambda_n^j = \sum_{m=0}^{n} d_m(S, M)\, r_{n-m}R^{-(n+1)/2-j}(T),$$
$$r_n = \sum_{m=0}^{n}\frac{[iK\varphi'(T)\,R(T)]^m}{m!}c_{n-m}(m)$$

Коэффициенты $d_m(S, M)$, $c_n(m)$ определены в (3.4), где полагается $\delta=-1$, $\delta_1=1$, $B=2$. Тогда

(3.7)
$$V_j = \chi_j^+(0) + \chi_j^-(T)|_{T\to\tau_1}\quad (j=0,1)$$

Формулы (3.3), (3.6), (3.7) дают значения волнового вклада в решение (3.1), описывая процесс зарождения системы продольных волн корабельного следа.

Заключительная стадия образования системы продольных волн корабельного следа определяется следующим образом: $\tau_1\leqslant T<\tau_2$, $T\to\tau_1+0$ так, что $K\varphi'(T)\to 0$ при $K\to\infty$. Приведем V_j (см. (3.1)) к виду

(3.8)
$$V_j = I_0^j + I_1^j\quad (j=0,1)$$
$$I_0^j = \int_0^{\tau_1}\psi_j(\tau)e^{iK\varphi(\tau)}d\tau,\quad I_1^j = \int_{\tau_1}^{T}\psi_j(\tau)e^{iK\varphi(\tau)}d\tau$$

Очевидно, что I_0^j идентичны величинам V_j, определяемым формулами (3.7), если в последних положить $T=\tau_1$. Следует отметить, что предельные значения $\chi_j^-(T)$ при $T\to\tau_1$ в формулах (3.6) (обозначим их через $\chi_j^-(\tau_1)$) — известные вклады стационарной точки τ_1 (см. формулы 4.5 [7]). Имеем

(3.9)
$$I_0^j = \chi_j^+(0) + \chi_j^-(\tau_1)\quad (j=0,1)$$

К интегралам I_1^j применим технику нейтрализаторов Ван-дер-Корпута для выделения вкладов точек τ_1, T. Воспользовавшись методом стационарной фазы аналогично тому, как это было сделано при $T\to\tau_1-0$, получим

(3.10)
$$V_j = \chi_j^+(0) + \chi_j^-(\tau_1) + \chi_j^+(\tau_1) - \chi_j^+(T)|_{T\to\tau_1}\quad (j=0,1)$$
$$\chi_j^+(T)|_{T\to\tau_1} = e^{iK\varphi(T)}\sum_{n=0}^{N}\lambda_n^j K^{-(n+1)/2} + R_\chi$$
$$0<\gamma_0\leqslant|\gamma|\leqslant\gamma_1^-<\gamma_*,\quad K\varphi'(T)\to 0,\quad K\to\infty$$
$$K^{-j}|R_\chi/R_\zeta|\sim\text{const}$$
$$|\lambda_{N+1}^j|K^{-N/2-j-1}\leqslant|R_\zeta|\leqslant|\lambda_N^j|K^{-(N+1)/2-j}$$
$$\chi_j^\pm(\tau_1) = \lim\chi_j^\pm(T)|_{T\to\tau_1}$$

где значения $\chi_j^+(0)$ определяются по формулам (3.3), а коэффициенты λ_n^j — в (3.6), (3.4), где полагается $\delta = -1$, $\delta_1 = 1$, $B = 2$.

Рассмотренный случай соответствует развитию системы продольных волн корабельного следа.

Пусть $\tau_1 < T < \tau_2$, тогда

(3.11) $$V_j = \chi_j^+(0) + \chi_j^-(\tau_1) + \chi_j^+(\tau_1) + \chi_j(T) \quad (j = 0, 1)$$
$$\gamma_0 \leqslant |\gamma| \leqslant \gamma_1^-, \quad |K\varphi'(T)| \to \infty$$

Здесь $\chi_j^+(0)$ определяются формулами (3.3), а $\chi_j^\pm(\tau_1)$ являются предельными значениями $\chi_j^\pm(T)|_{T\to\tau_1}$ (последние заданы в (3.6), (3.10)); вклады $\chi_j(T)$ вычислены ранее (см. (3.4)), где полагаются $\delta = 1$, $\delta_1 = -1$, $B = 1$.

Формула (3. 1) определяет волновой вклад в решение (3.1), соответствующий моменту времени, когда система продольных волн уже сформировалась, а система поперечных волн еще не образовалась.

Если $T \to \tau_2 \pm 0$, $K\varphi'(T) \to 0$, то решение строится аналогично случаю $T \to \tau_1 \pm 0$. Получим

(3.12) $$V_j = \chi_j^+(0) + \chi_j^-(\tau_1) + \chi_j^+(\tau_1) + \chi_j^-(T)|_{T\to\tau_2} \quad (j = 0, 1)$$
$$\gamma_0 \leqslant |\gamma| \leqslant \gamma_1^-, \quad K\varphi'(T) \to 0$$

(3.13) $$V_j = \chi_j^+(0) + \chi_j^-(\tau_1) + \chi_j^+(\tau_1) + \chi_j^-(\tau_2) + \chi_j^+(\tau_2) -$$
$$- \chi_j^+(T)|_{T\to\tau_2} \quad (j = 0, 1)$$
$$\chi_j^\pm(T)|_{T\to\tau_2} = e^{iK\varphi(T)} \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \lambda_n^j K^{-(n+1)/2} + R_\chi$$
$$0 < \gamma_0 \leqslant |\gamma| \leqslant \gamma_1^- < \gamma_*, \quad K\varphi'(T) \to 0, \quad K \to \infty$$
$$K^{-j} |R_\chi / R_\zeta| \sim \text{const}$$
$$|\lambda_{N+1}^j| K^{-N/2-j-1} \ll |R_\zeta| \ll |\lambda_N^j| K^{-(N+1)/2-j}$$
$$\chi_j^\pm(\tau_m) = \lim \chi_j^\pm(T)|_{T\to\tau_m} \quad (m = 1, 2)$$

Коэффициенты λ_n^j определены в (3.6), где полагается $\delta = \delta_1 = 1$, $B = 2$.

Формулы (3.13), (3.12) описывают образование и развитие системы поперечных волн корабельного следа.

В случае $T > \tau_2$, включая $T \to \infty$, имеем

(3.14) $$V_j = \chi_j^+(0) + \chi_j^-(\tau_1) + \chi_j^+(\tau_1) + \chi_j^-(\tau_2) + \chi_j^+(\tau_2) + \chi_j(T)$$
$$(j = 0, 1)$$
$$0 < \gamma_0 \leqslant |\gamma| \leqslant \gamma_1^- < \gamma_*, \quad |K\varphi'(T)| \to \infty, \quad K \to \infty$$

где $\chi_j(T)$ вычисляются, как и ранее (при $0 < T < \tau_1$), и определяются формулами (3.4), где $\delta = 1$, $\delta_1 = -1$, $B = 1$.

Значения V_j в (3.14) соответствуют сформировавшимся системам продольных и поперечных волн, отражая процесс их дальнейшего развития и установления ($\chi_j(T) \to 0$ при $T \to \infty$).

4. Построим асимптотические разложения интегралов V_j $(j = 0, 1)$, определяемых формулами (3.1), вблизи границы корабельного следа ($|\gamma| \to \gamma_*$). В указанной зоне при подходе по внутренним путям области $\gamma_0 \leqslant |\gamma| \leqslant \gamma_*$, соответствующей корабельному следу, происходит слия-

ние двух стационарных точек фазовой функции интегралов V_j ($\lim \tau_m = \tau_*$, $|\gamma| \to \gamma_*$ ($m = 1, 2$)). В исследованиях Хогнера [3] проведен численный анализ этого случая для установившейся задачи. Асимптотический анализ интегралов с помощью теории функций Эйри был выполнен в работе [8] и касался исследования перехода однократных стационарных точек в двукратные. При еще большем повышении кратности стационарных точек потребовалось бы введение новых специальных функций типа Эйри [9].

Предлагаемая в работе схема позволяет получить разложения интегралов методом стационарной фазы без проведения существенных дополнительных исследований не только, когда повышается кратность внутренних стационарных точек, но и при появлении стационарности на промежутке интегрирования, в частности, когда предел интегрирования стремится к стационарной точке (однократной, многократной, сливающимся стационарным точкам).

Изучим процесс образования границы области корабельного следа. Пусть $T \to \tau_* - 0$, так что $K\{\varphi'(T), \varphi''(T)\} \to 0$, $K \to \infty$. Преобразуем интегралы $\chi_j(T)$, определяемые формулами (3.2), построив новую фазовую $\Phi(\tau)$ и амплитудную $\Psi_j(\tau; K)$ функции

$$\Phi(\tau) = \varphi(T) + \varphi'(T)(\tau - T) + \frac{\varphi''(T)}{2!}(\tau - T)^2 - \varphi(\tau)$$

$$\Phi'(T) = \Phi''(T) = 0, \quad \Phi'''(T) \neq 0$$

$$\Psi_j(\tau; K) = (1 - \nu(\tau))\psi_j(\tau)\exp\left\{iK\left[\varphi'(T)(\tau - T) + \frac{\varphi''(T)}{2!}(\tau - T)^2\right]\right\}$$

Получим

$$\chi_j(T)|_{T\to\tau_*-0} = e^{iK\varphi(T)}\int_\eta^T \Psi_j(\tau; K)\, e^{iK\Phi(\tau)}\, d\tau \quad (j = 0, 1) \tag{4.1}$$

К интегралу (4.1) можно применить метод стационарной фазы в силу свойств его фазовой и амплитудной функций. Проведем замену переменных

$$\xi^3 = \Phi(\tau), \quad \operatorname{Re}\xi > 0; \quad \tau = T + R(T)\sum_{m=0}^{\infty} a_m \xi^{m+1}$$

Дальнейшее применение метода стационарной фазы [7] к интегралам (4.1) позволяет построить их асимптотические разложения в виде

$$\chi_0^-(T)|_{T\to\tau_*} = e^{iK\varphi(T)}\sum_{n=0}^{3}\lambda_n^0 K^{-(n+1)/3} + O(K^{-5/3}) \tag{4.2}$$

$$\chi_1^-(T)|_{T\to\tau_*} = e^{iK\varphi(T)}\lambda_0^1 K^{-1/3} + O(K^{-2/3})$$

$$|\gamma| \to \gamma_*, K\{\varphi'(T), \varphi''(T)\} \to 0, \quad K \to \infty, \quad T \to \tau_* - 0$$

$$\lambda_n^j = \sum_{m=0}^{n} d_m(S, M)\, r_{n-m} R(T)^{-(n+1)/2-j} \quad (j = 0, 1)$$

$$r_n = \sum_{m=0}^{n} \eta_m c_{n-m}(m)$$

$$\eta_{2n+v} = \sum_{k=0}^{n} \frac{[ik\varphi''(T)]^{n-k}}{2^{n-k}(n-k)!}\,\frac{[ik\varphi'(T)R(T)]^{2k+v}}{(2k+v)!} \quad (v = 0, 1)$$

Коэффициенты $c_n(m)$, $d_n(S, M)$ при $\delta = \delta_1 = -1$, $B = 3$ определены в (3.4).

Учитывая формулы (3.2), (3.3), (4.2), получим

$$V_j = \chi_j^+(0) + \chi_j^-(T)|_{T\to\tau_*} \quad (j = 0, 1) \tag{4.3}$$

$$|\gamma| \to \gamma_*, \quad K\{\varphi'(T), \varphi''(T)\} \to 0, \quad K \to \infty$$

Асимптотические разложения (4.3) отражают процесс образования границы корабельного следа.

Рассмотрим случай $|\gamma| \to \gamma_*$, $T \to \tau_* + 0$, что соответствует развитию границы корабельного следа. Интегралы $\chi_j(T)$ в (3.2) обрабатываются по схеме, аналогичной приведенной ранее для случая $T \to \tau_1 + 0$. Окончательно с учетом (3.2), (3.3) асимптотики V_j имеют вид

$$V_j = \chi_j^+(0) + \chi_j^-(\tau_*) + \chi_j^+(\tau_*) - \chi_j^+(T)|_{T\to\tau_*} \quad (j = 0, 1) \tag{4.4}$$

$$\chi_0^+(T)|_{T\to\tau_*} = e^{iK\varphi(T)} \sum_{n=0}^{3} \lambda_n^{\circ} K^{-(n+1)/3} + O(K^{-5/3})$$

$$\chi_1^+(T)|_{T\to\tau_*} = e^{iK\varphi(T)} \lambda_0^1 K^{-1/3} + O(K^{-2/3})$$

$$|\gamma| \to \gamma_*, \quad K\{\varphi'(T), \quad \varphi''(T)\} \to 0, \quad K \to \infty, \quad T \to \tau_* + 0$$

$$\chi_j^{\pm}(\tau_*) = \lim \chi_j^{\pm}(T)|_{T\to\tau_*}$$

Коэффициенты $\lambda_n^j|_{T\to\tau_*+0}$ определены в (4.2) при $\delta = -1$, $\delta = 1$, $B = 3$.

Формулы (4.4) отражают процесс развития границы корабельного следа. Асимптотические разложения (4.3), (4.4) совпадают, если положить $T = \tau_*$.

Аналогично получаются асимптотики интегралов V_j ($j = 0, 1$), если $T > \tau_*$, $|\gamma| \to \gamma_*$, так, что $K\{\varphi'(\tau_*), \varphi''(\tau_*)\} \to 0$ при $K \to \infty$. Этот случай соответствует сформировавшейся границе корабельного следа и включает в себя процесс ее установления. Имеем

$$V_j = \chi_j^+(0) + \chi_j^-(\tau_*) + \chi_j^+(\tau_*) + \chi_j(T) \quad (j = 0, 1) \tag{4.5}$$

Здесь $\chi_j^+(0)$, $\chi_j(T)$ — известные вклады концов промежутка интегрирования (3.3), (3.4); функции $\chi_j^{\pm}(\tau_*)$ определяются по формулам (4.2), (4.4) при $T = \tau_*$.

5. Вся волновая картина, определяемая V_j ($j = 0, 1$), накладывается на прогиб свободной поверхности, который обусловливается интегралом V_2 формулы (3.1). В случае $0 < |\gamma| < \pi$ заменой переменных $\xi = (\tau - \cos\gamma) / |\sin\gamma|$ интеграл V_2 сводится к эллиптическим (см. 3.185 (5) [4])

$$V_2 = \frac{\sqrt{2}}{|\sin\gamma|^{3/2}} \left\{\delta_1\left[2E\left(\alpha_1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\alpha_1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] + \right. \tag{5.1}$$

$$\left. + \delta_2\left[2E\left(\alpha_2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\alpha_2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]\right\}$$

$$\alpha_1 = \arccos\sqrt{|\sin\gamma| / R(T)}, \quad \alpha_2 = \arccos\sqrt{|\sin\gamma|}, \quad 0 < |\gamma| < \pi$$

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = -1, \quad \cos\gamma \leqslant 0$$

$$\delta_1 = -1, \quad \delta_2 = 1, \quad \cos\gamma > 0, \quad T \leqslant \cos\gamma$$

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = 1, \quad \cos\gamma > 0, \quad T > \cos\gamma$$

Пусть $|\gamma| \to \pi$. Представим $R(\tau)$ в виде

$$R(\tau) = (\tau - \cos\gamma)(1 + \varepsilon)^{1/2}, \quad \varepsilon = [\sin\gamma / (\tau - \cos\gamma)]^2$$

Разлагая в ряд подынтегральную функцию при $\varepsilon < 1$, затем интегрируя, получим

$$V_2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (\sin\gamma)^{2n} [|\cos\gamma|^{-2n-3/2} - (T - \cos\gamma)^{-2n-3/2}] \tag{5.2}$$

$$C_n = (-1)^n \frac{1\cdot5\cdot9\ldots(4n+1)}{n!\,(4n+3)} 2^{1-2n}$$

$$|\gamma| \to \pi, \quad \frac{3}{4}\pi < |\gamma| < \frac{5}{4}\pi$$

Формулы (5.1), (5.2) определяют прогиб свободной поверхности жидкости, описывая его развитие и установление.

Следует отметить, что главные члены асимптотических разложений решения вне области корабельного следа совпадают с известными ранее [1]. В установившемся случае аналогичное совпадение главных членов асимптотических формул наблюдается для систем продольных и поперечных волн, а также для границ корабельного следа (см. [3,7]).

Автор благодарит Э. Н. Потетюнко за внимание к работе и обсуждение результатов, а также рецензента, сделавшего ряд полезных замечаний.

Поступила 3 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стокер Дж.* Волны на воде. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
2. *Черкесов Л. В.* Неустановившиеся волны. Киев, «Наукова думка», 1970.
3. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.— Л., ОНТИ, 1936.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.
5. *Эрдейи А.* Асимптотические разложения. М., Физматгиз, 1962.
6. *Focke J.* Asimptotische Entwicklungen mittels der Methode der Stationären Phase. Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss. math-naturwiss. Kl., 1954, Bd 101, H. 3.
7. *Золотарев А. А.* К задаче о корабельных волнах. В сб.: Морские гидрофизические исследования, № 1 (64). Севастополь, Изд-во МГИ АН УССР, 1974.
8. *Chester C., Friedman B., Ursell F.* An extension of the method of steepest descents. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, vol. 53, pt 3.
9. *Bleslein N.* Uniform asymptotic expansions of integrals with many nearby stationary points and algebraic singularities. J. Math. and Mech., 1967, vol. 17, No. 6.