Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 532.5

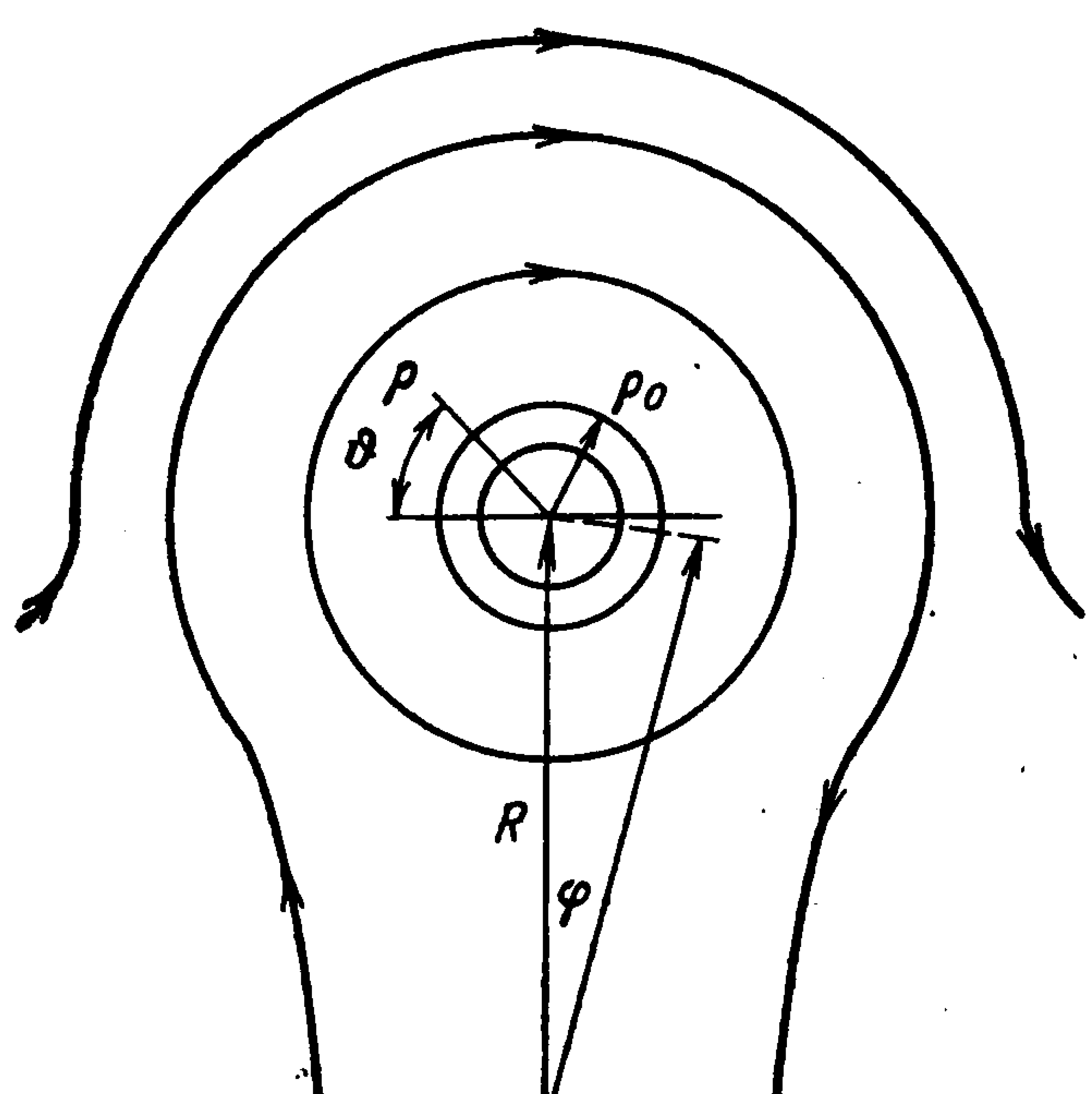
ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ЗАДАЧИ О ТОРОИДАЛЬНОМ ВИХРЕ МАКСВЕЛЛА

Ю. В. Мартынов

(Москва)

Получены некоторые аналоги тороидального вихря Максвелла в случае, когда течение внутри вихря обладает двумя компонентами скорости, а внешний поток потенциален. Задача решена в предположении малости отношения радиуса поперечного сечения тора к его радиусу. Классические решения задач гидродинамики идеальной жидкости типа сферического вихря Хилла [1] и тороидального вихря Максвелла [2,3] хорошо известны. В [3] указаны некоторые возможности практической реализации и использования течений такого типа. Характерная особенность этих решений — цилиндрическая симметрия. В работе [4] указано обобщенное решение Хилла, в котором при сохранении потенциального внешнего обтекания поле скоростей является существенно трехмерным и характеризуется наряду с радиальной и аксиальной компонентами скоростей наличием также и азимутальной компоненты скорости внутри сферического вихревого образования. В данной работе в рамках теории идеальной несжимаемой жидкости построено решение задачи о тороидальном вихре, в котором, кроме аксиальной компоненты скорости, существенна также азимутальная компонента; потенциальное внешнее обтекание предполагается тем же, что и в задаче о вихре Максвелла.

Рассмотрим вихревое кольцо, поднимающееся с постоянной скоростью в идеальной несжимаемой жидкости. Предполагаем, что его размеры остаются неизменными. Так как потенциальное течение вне тороидального вихря совпадает с потенциальным вне кольцевого вихря (вихря Максвелла), завихренность которого ω постоянна по поперечному сечению, а аксиальная составляющая скорости является единственной отличной от нуля компонентой, то безразмерная функция тока ψ_+ внешнего обтекания тороидального вихря безразмерного радиуса R (здесь в качестве масштабов длины и скорости выбраны радиус поперечного сечения a и величина ωa соответственно) в системе координат, изображенной на фиг. 1, имеет вид [2]



Фиг. 1

$$\psi_+(\rho) = (R/2)\,[\ln(8R/\rho) - 1, \rho \geqslant 1 \tag{1}$$

Начало координат для радиальной оси ρ и аксиального угла ϑ находится в центре симметрии поперечного сечения тора. В свою очередь центр симметрии поперечного сечения тора лежит на окружности, расположенной в плоскости, перпендикулярной плоскости $\rho\vartheta$; положение ее определяется азимутальным углом φ. Вследствие осевой симметрии задачи за точку $\varphi = 0$ можно принять любую точку окружности.

Согласно (1) и [3, 5, 6], около тороидального вихря образуется область жидкости, которая вращается вокруг него и движется вместе с ним.

Уравнения и граничные условия для функции тока $\psi(\vartheta, \rho)$ осесимметричного вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости внутри тора имеют вид [7]

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\rho}{R+\rho\sin\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{1}{\rho(R+\rho\sin\vartheta)}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)+ \tag{2}$$
$$+\frac{\rho\Phi(\psi)\Phi'(\psi)}{R+\rho\sin\vartheta}+\rho(R+\rho\sin\vartheta)F'(\psi)=0$$
$$\rho=1,\quad \psi=\psi_+,\quad \partial\psi/\partial\rho=\partial\psi_+/\partial\rho,\quad v_\varphi=0$$
$$\rho=0,\quad \psi<\infty$$

Кроме того, функции тока $\psi(\vartheta, \rho)$ и $\partial\psi(\vartheta, \rho)/\partial\vartheta$ должны удовлетворять условиям периодичности по ϑ. Функции $\Phi(\psi)$, $F(\psi)$ представляют собой соответственно циркуляцию и интеграл Бернулли. Граничные условия выражают условия непроницаемости и равенства аксиальных и азимутальных компонент скорости внутреннего и внешнего течений и условие отсутствия особенностей в начале координат.

В общем виде эта задача не исследована даже для $\Phi(\psi) = \mathrm{const}$ и простейших распределений $F(\psi)$. Исследуем течение внутри тороидального вихря в случае двух различных зависимостей циркуляции $\Phi(\psi)$ и интеграла Бернулли от функции тока

$$\Phi_1(\psi)=k_1\psi+c_1,\quad F_i(\psi)=A_i\psi+A_i^\circ\leqslant 0\quad (i=1,2) \tag{3}$$
$$\Phi_2(\psi)=[(k_2^2\psi/2+c_2\psi+b_2)^2]^{1/2}$$
$$k_i,\ c_i,\ A_i,\ A_i^\circ,\quad b_2=\mathrm{const}$$

Связь между постоянными c, k, A, b_2 будет найдена ниже.

Так как $\rho\sin\vartheta/R\ll 1$, замена $\psi(\vartheta, \rho)=\sqrt{R+\rho\sin\vartheta}\,Y(\vartheta, \rho)$ после отбрасывания членов второго порядка малости приводит уравнение (2) к виду

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial Y}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial\vartheta^2}+\left[k_i^2-\frac{3}{4}\frac{1}{R^2}\right]Y+ \tag{4}$$
$$+k_ic_iR^{-1/2}+AR^{3/2}=0$$

решение которого ищем в виде $Y(\vartheta, \rho)=f(\rho)$. Отсюда решения уравнения (4) с граничными условиями (2) и зависимости A_i, c_i, b_2 от k_i для двух указанных распределений $\Phi(\psi)$ и $F(\psi)$ имеют вид ($J_n(z)$ — функция Бесселя)

$$\psi(\rho)=\frac{R}{2\eta}\frac{J_0(\eta_i\rho)}{J_1(\eta_i)}+\frac{R}{2}(\ln 8R-1)-\frac{R}{2\eta}\frac{J_0(\eta_i)}{J_1(\eta_i)} \tag{5}$$
$$c_1=-(1/2)R(\ln 8R-1)k_1,\quad \eta_i=[k_i^2-3/(4R^2)]^{1/2}$$

$$A_1 = \frac{1}{R}\left\{\left[\frac{J_0(\eta_1)}{2\eta_1 J_1(\eta_1)} - \frac{1}{2}(\ln 8R - 1)\right]\frac{4k_1^2R^2 - 3}{4R^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{k_1^2}{2}(\ln 8R - 1)\right\}$$
$$A_2 = \eta_2^2\,(2R)^{-1}\,\{J_0\,(\eta_2)[\eta_2 J_1\,(\eta_2)]^{-1} - \ln 8R + 1\} - k_2c_2R^{-2}$$
$$b_2 = -\,(R\,/\,2)\,(\ln 8R - 1)[(Rk_2^2\,/\,4)(\ln 8R - 1) + c_2]$$

Таким образом, в тороидальном вихре может реализоваться течение, циркуляция и интеграл Бернулли которого имеют вид (3), причем постоянные k_i, c_i, A_i, b_2 должны быть связаны соотношениями (5). Из второго равенства системы (5) следует, что течение в кольцевом вихре, характеризуещееся функциями $\Phi\,(\psi)$, $F\,(\psi)$ вида $F\,(\psi) = A\psi + A_0$ и $\Phi\,(\psi) = k\psi$, не может реализоваться. Положив в уравнениях (5) $A_i = 0$, получаем выражения, описывающие однородное винтовое течение в тороидальном вихре, при этом k_1 могут иметь только дискретные значения. Компоненты скорости внутри тора выражаются через ψ по формулам

$$v_{i\rho} = 0, \quad v_{i\vartheta} = -\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} = \frac{1}{2}\frac{J_1(\eta_i\rho)}{J_1(\eta_i)} \tag{6}$$
$$v_{1\varphi} = (k_1\psi + c_1)R^{-1}$$
$$v_{2\varphi} = [2\,(k_2^2\psi\,/\,2 + c_2\psi + b_2)]^{1/2}R^{-1} \quad (i = 1,\,2)$$

Сравним распределение завихренности исследуемого течения внутри тора с завихренностью течения [2]. Компоненты вектора вихря течения (6) имеют вид

$$\omega_{1\rho} \approx 0, \quad \omega_{i\varphi} = \eta_i J_0\,(\eta_i\rho)\,/\,(2J_1\,(\eta_i))$$
$$\omega_{1\vartheta} = k_1 J_1\,(\eta_1\rho)\,/\,[2J_1\,(\eta_1)]$$
$$\omega_{2\vartheta} = (k_2^2\psi + c_2)k_2J_1\,(\eta_2\rho)\{2J_1\,(\eta_2)\,[2\,(k^2\psi^2\,/\,2 + c_2\psi + b_2)]^{1/2}\}^{-1}$$

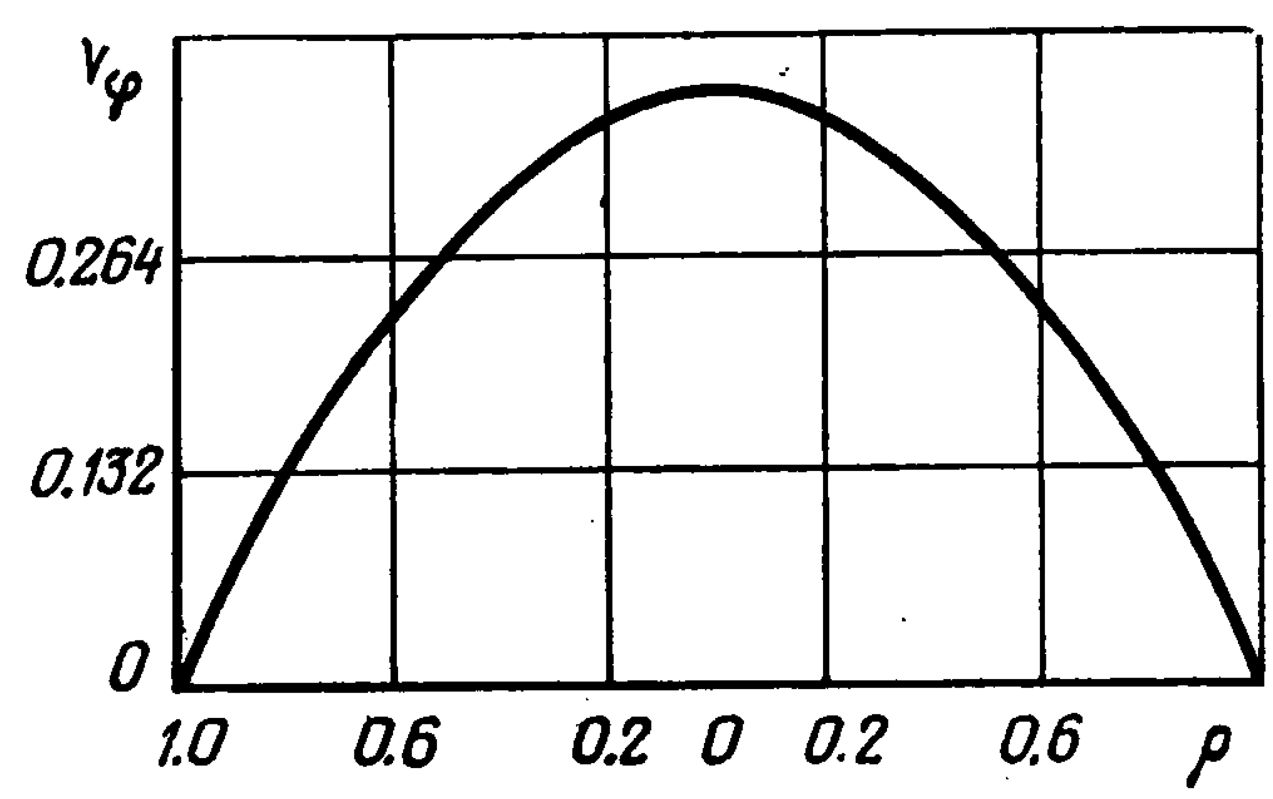
В торе, течение внутри которого обладает только одной аксиальной компонентой скорости, компоненты вихря выражаются в виде

$$\omega_\rho \approx 0, \quad \omega_\vartheta = 0, \quad \omega_\vartheta = 1$$

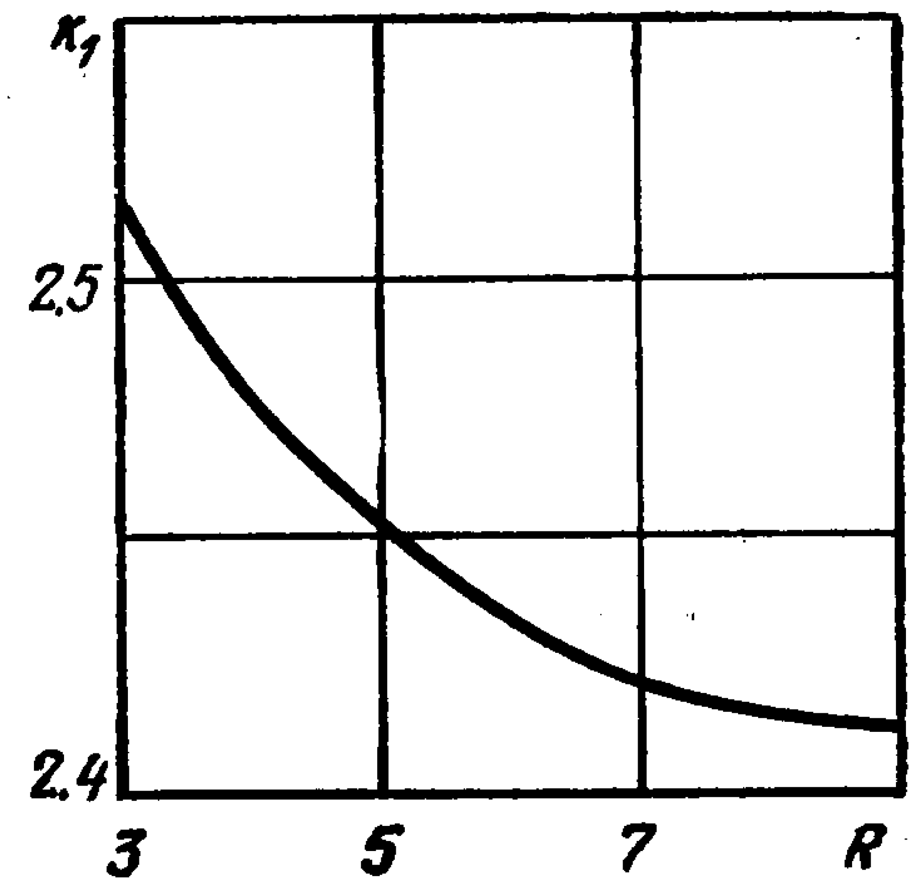
Таким образом вектор вихря рассматриваемого течения в каждой точке поверхности $\rho = \text{const}$ расположен в касательной плоскости, проходящей через эту точку, и в отличие от течения [2] обладает двумя ненулевыми составляющими ω_ϑ, ω_φ. На основании (5), (6) произведем расчет течения внутри тора с помощью таблиц [8]. На фиг. 2 приведено распределение азимутальной компоненты скорости вдоль оси ρ при $R = 10$, $\eta = 1$. Максимальное значение азимутальной компоненты скорости достигается в точке $\rho = 0$; при этом $v_\varphi = 0.34$. Линии тока для равноотстоящих значений $\psi\,(\rho)$ представляют собой концентрические окружности. Наибольшее значение $\psi\,(\rho)$ достигается в точке $\rho = 0$, к которой стягиваются линии тока. Точка $\rho = 0$ не является критической, так как в этой точке азимутальная компонента скорости отлична от нуля.

Рассмотрим кольцевой вихрь, течение внутри которого однородное винтовое, т. е. функции $\Phi\,(\psi)$, $F\,(\psi)$ имеют вид $F\,(\psi) = A_0$, $\Phi\,(\psi) =$

$= k_1\psi + c_1$. В этом случае при фиксированном радиусе тора k_1 может принимать только дискретные значения, соответствующие корням третьего уравнения системы (5). Фиг. 3 иллюстрирует зависимость значения первого корня третьего уравнения системы (5) от радиуса тора R. В случае $A_1 = 0$ корни третьего уравнения системы (5) монотонно убывают с ростом радиуса тора R; при $R \to \infty$ первый корень асимптотически стремится к величине $k = 2.404$, второй — к 5.52, третий — к 8.653 и т. д.;



Фиг. 2



Фиг. 3

эти значения являются корнями трансцендентного уравнения $J_0(\eta) = 0$. В рассматриваемом случае максимальные отклонения величин корней третьего уравнения системы (5) от своих асимптотических значений незначительны и с ростом k_1 уменьшаются. Таким образом, если k_1 является n-м корнем третьего уравнения системы (5), течение внутри тороидального вихря разбивается на n вихрей, причем аксиальные компоненты скорости этих вихреобразований направлены в одну сторону. Рассмотрим случай, когда значение k_1 соответствует $n = 4$. В этом случае внутри вихревого кольца возникают четыре вихреобразования, которые находятся в областях

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant k_1^* / k_4^*$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi, \quad k_1^* / k_4^* \leqslant \rho \leqslant k_2^* / k_4^*$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi, \quad k_2^* / k_4^* \leqslant \rho \leqslant k_3^* / k_4^*$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi, \quad k_3^* / k_4^* \leqslant \rho \leqslant 1$$

Здесь k_1^*, k_2^*, k_3^*, k_4^* — корни третьего уравнения системы (5) при фиксированном радиусе R и $A_2 = 0$.

Отметим, что азимутальная компонента скорости и компоненты завихренности кольцевого вихря с однородным винтовым течением, согласно второму равенству системы (5) и выражениям (6), (7), убывают с ростом радиуса тора, в то время как аксиальная компонента скорости изменяется незначительно.

Рассмотрим теперь тороидальный вихрь радиуса R, состоящий из двух вихревых образований; одно в зазоре между торами в области $1 \leqslant \rho \leqslant \rho_0$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, которое будем называть внешним вихрем, второе в области $\rho_0 \geqslant \rho \geqslant 0$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, которое будем называть внутренним вихрем. Исследуем течение внутри этих вихрей для зависимостей $\Phi(\psi)$ и $F(\psi)$ от функции тока в виде $\Phi(\psi) = k\psi + c$ и $F(\psi) = A_0 + A_1\psi$, причем постоянные A, A_0, k, c во внутреннем и внешнем вихрях имеют, вообще говоря, разные значения. Обозначим величины постоянных во внешнем вихре индексом *1*, а во внутреннем вихре — индексом *2*. Решение задачи (2), (3) для внешнего вихря (в этом случае условие отсутствия особенностей в начале координат не требуется) имеет вид

$$\psi_1(\rho) = [(R/2) - BR^{1/2}\eta_1 N_1(\eta_1)]J_0(\eta_1\rho) / [\eta_1 J_1(\eta_1)] + \tag{7}$$
$$+ BR^{1/2}N_0(\eta_1\rho) - 4(k_1c_1 + A_1R^2)R^2 / (4k_1^2R^2 - 3)$$
$$B = \left\{\left[\frac{R}{2}(\ln 8R - 1) + \frac{4R^2(k_1c_1 + A_1R^2)}{4k_1^2R^2 - 3}\right]J_1(\eta_1) - \right.$$
$$\left. - \frac{R}{2\eta} J_0(\eta_1)\right\} R^{1/2}[N_0(\eta_1)J_1(\eta_1) - N_1(\eta_1)J_0(\eta_1)]^{-1}$$
$$c = -(R/2)(\ln 8R - 1)k_1$$

Здесь $J_n(z)$, $N_n(z)$ — функции Бесселя и Неймана соответственно; значение постоянной A_1 произвольно.

Рассмотрим теперь течение во внутреннем вихре. Функция тока $\psi_2(\rho)$ определяется в результате решения уравнения (2) с граничными условиями

$$\psi_2(\rho_0) = \psi_1(\rho_0), \quad \partial\psi_1(\rho_0)/\partial\rho = \partial\psi_2(\rho_0)/\partial\rho$$
$$k_1\psi_1(\rho_0) + c_1 = k_2\psi_2(\rho_0) + c_2, \quad \psi_2(0) < \infty$$
$$\psi_2(\rho) = -M[J_0(\eta_2\rho) - J_0(\eta_2\rho_0)] / [\eta_2 J_1(\eta_2\rho_0)] + N \tag{8}$$
$$M = [-(R/2) + BR^{1/2}\eta_1 N_1(\eta_2)]J_1(\eta_1\rho_0) / J_1(\eta_1) -$$
$$- BR^{1/2}\eta_1 N_1(\eta_1\rho_0), \quad N = \Psi_1(\rho_0), \quad \eta_2 = [k_2^2 - 3/(4R^2)]^{1/2}$$
$$A_2 = \left[-N - \frac{MJ_0(\eta_2\rho_0)}{\eta_2 J_1(\eta_2\rho_0)}\right]\frac{4k_2^2R^2 - 3}{4R^2} - k_2N +$$
$$+ \frac{R}{2}(\ln 8R - 1) - \frac{k_2MJ_0(\eta_2\rho_0) + MJ_0(\eta_2\rho_0)}{\eta_2 J_1(\eta_2\rho_0)} + Nk_1$$

Положив в формулах (7), (8) $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, получим вихревое образование, у которого соответственно во внешнем и во внутреннем вихре реализуется однородное винтовое течение.

Теперь построим тороидальное вихревое образование, у которого во внешнем вихре течение характеризуется функциями $\Phi(\psi)$, $F(\psi)$ в виде (3), а во внутреннем вихре течение обладает только одной аксиальной компонентой скорости. В этом случае на течение во внешнем вихре накладывается дополнительное условие равенства нулю азимутальной компоненты скорости на поверхности $\rho = \rho_0$, при этом A_1 связывается с k_1 соотношением

$$A_1 = Rk_1 2^{-1}\{\{[(\ln 8R - 1)J_1(\eta_1) + J_0(\eta_1)\eta_1^{-1}] \times$$
$$\times J_1^{-1}(\eta_1)[X(\eta_1, \rho_0) - J_0\eta_2^{-1}]\}Y^{-1}(\eta_1, 1) +$$
$$+ R2^{-1}(\ln 8R - 1)\}(4k^2R^2 - 3)(4R^2)^{-1} - k_1^2R2^{-1}(\ln 8R - 1)\{Y(\eta,$$
$$\rho_0)Y^{-1}(\eta_1, 1) - 1\}X(\eta_1, \rho_0)\} = J_1(\eta_1)N_0(\eta_1\rho_0) + J_0(\eta_1\rho_0)N_1(\eta_1)$$
$$Y(\eta_1, \rho_0) = J_1(\eta_1)N_0(\eta_1\rho_0) - J_0(\eta_1\rho_0)N_1(\eta_1)$$

Полагая в (8) $k_2 = 0$, получим выражение для функции тока во внутреннем вихре

$$\psi_2(\rho) = M\,[I_0(\zeta\rho) - I_0(\zeta\rho_0)]\,/\,[\zeta I_1(\zeta\rho_0)] + N$$
$$\zeta = \sqrt{3/4}R^{-1}, \quad A_2 = {}^3/_4\,[N - MI_0(\zeta\rho_0)I_1^{-1}(\zeta\rho_0)]R^{-2}$$

Здесь $I_0(z)$, $K_0(z)$ — функции Бесселя мнимого аргумента.

Рассмотрим теперь вихреобразование, у которого в противоположность первому случаю течение во внешнем вихре определяется только одной аксиальной компонентой скорости, а во внутреннем вихре течение, характеризующееся функциями $\Phi(\psi)$, $F(\psi)$, имеющими вид (3), обладает двумя компонентами скорости. Выражение для функции тока внешнего вихря, удовлетворяющее граничным условиям (2), имеет вид

$$\psi_1^*(\rho) = [R^{1/2}c_2k_1(\zeta) - R\,(2\zeta)^{-1}]I_0(\zeta\rho)I_1^{-1}(\zeta) + c_2K_0(\zeta\rho) + {}+{}^4/_3AR^4$$
$$c_2 = \{I_1(\zeta)[2^{-1}R^{1/2}(\ln 8R - 1) - {}^4/_3AR^{7/2}] + R^{1/2}I_0(\zeta) \times {}\times[2\zeta I_1(\zeta)]^{-1}\}[I_0(\zeta)K_1(\zeta) - K_0(\zeta)I_1(\zeta)]^{-1}$$

Постоянная A_1 может принимать любое значение.

Функция тока внутреннего вихря, удовлетворяющая граничным условиям (8), имеет вид

$$\psi_2 = N^* + M^*\,[J_{\rangle}(\eta_2) - J_0(\eta_2\rho)][\eta_2J_1(\eta_2)]^{-1}$$
$$A_2 = -\{N^* + M^*J_0(\eta_2)[\eta_2J_1(\eta_2)]^{-1}\}\eta_2^2 + k_2^2N^*$$
$$M^* = \{R^{1/2}c_2K_1(\zeta)I_1^{-1}(\zeta) - R\,[2\zeta I_1(\zeta)]^{-1}\}I_1(\zeta\rho_0) - c_2K_1(\zeta\rho_0),$$
$$N^* = \psi_1^*(\rho), \quad c_2 = -k_2N^*$$

Следовательно, внутренний вихрь может существовать только тогда, когда каждому фиксированному значению k_2 соответствуют определенные значения A_i, c_i, задаваемые соотношениями (8).

В заключение определим скорость подъема вихревого кольца, течение внутри которого обладает двумя компонентами скорости, а циркуляция и интеграл Бернулли задаются функциями (3). Введем в цилиндрической системе координат величину z_0

$$z_0 = \int|\operatorname{rot}\mathbf{v}|\,\rho^2z\,dV\,\Big|\int|\operatorname{rot}\mathbf{v}|\,\rho^2dV$$

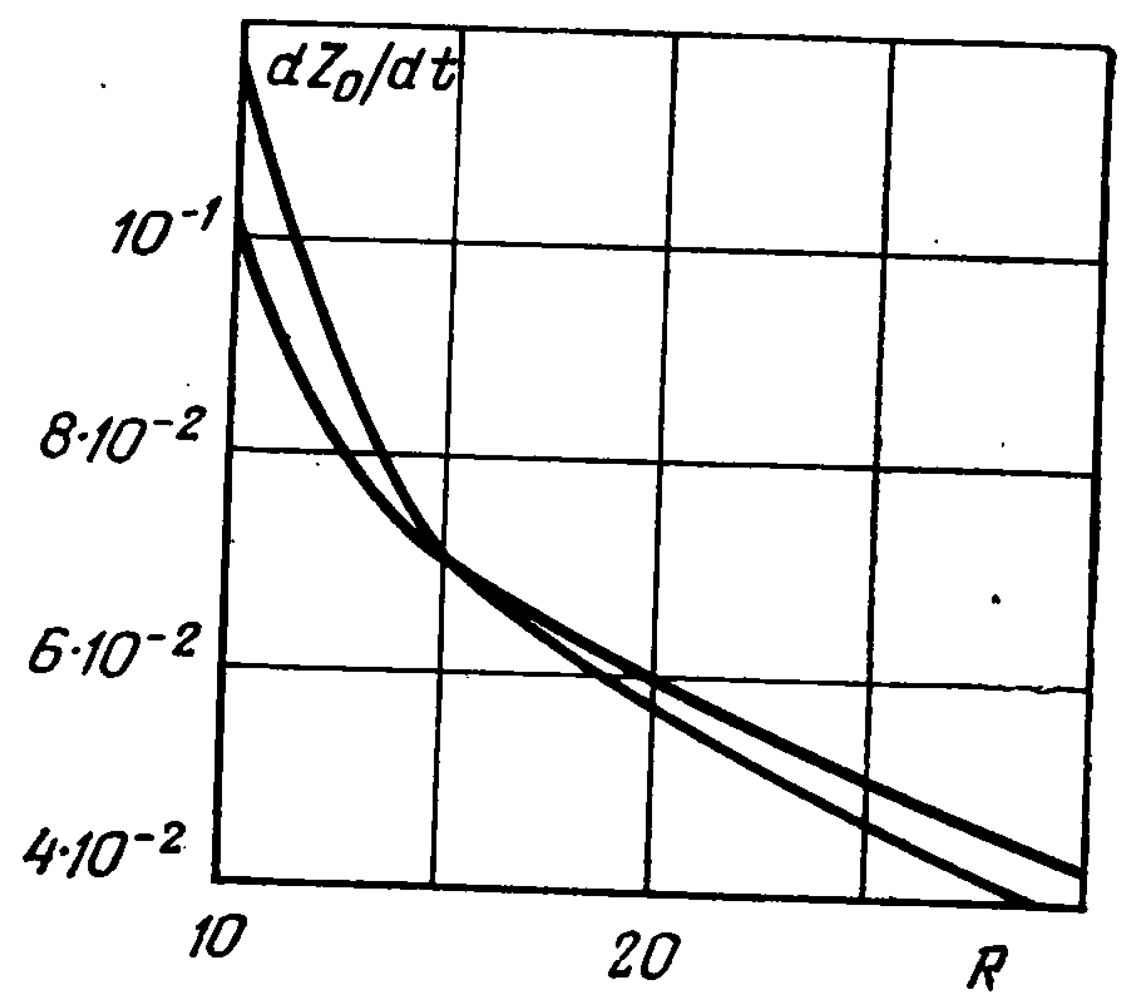
Здесь интегралы берутся по всему объему кольца. Переходя в систему координат $(\rho, \vartheta, \varphi)$, указанную на фиг. 1, дифференцируя обе части по времени t и учитывая, что $\rho d\vartheta\,/\,dt = v_\vartheta$, $d\rho\,/\,dt = v_\rho \approx 0$, получим

$$\frac{dz_0}{dt} = \frac{1}{2R}\int_0^1|\operatorname{rot}\mathbf{v}|\,v_\vartheta\rho^2d\rho\,\Big/\left(\int_0^1|\operatorname{rot}\mathbf{v}|\,\rho^2d\rho\right) \tag{9}$$

Величина $dz_0\,/\,dt$ представляет собой скорость движения вихревого кольца. Аксиальная компонента скорости определяется согласно (6). Выражения для $|\operatorname{rot}\mathbf{v}|$ имеют вид

$$|\operatorname{rot}\mathbf{v}|_1 = \{[k_1^2J_1^2(\eta_1\rho) + \eta_1^2J_0^2(\eta_1\rho)]\,/\,[4J_1^2(\eta_1)]\}^{1/2} \tag{10}$$
$$|\operatorname{rot}\mathbf{v}|_2 = \left\{\frac{\eta_2^2J_0^2(\eta_2\rho)}{4J_1^2(\eta_2)} + \frac{(k_2^2\psi + c_2^2)\,k_2^2J_1^2(\eta_2\rho)}{4J_1(\eta_2)\,[2k_2^2\psi^2 + c_2\psi + b_2]}\right\}^{1/2}$$

Первое равенство системы (10) задает выражение для модуля завихренности в вихревом кольце, течение внутри которого характеризуется функциями $\Phi_1(\psi)$, $F_1(\psi)$, имеющими вид $\Phi_1(\psi) = k_1\psi + c_1$, $F_1(\psi) = A_1\psi + A_1^\circ$, а второе — в вихревом кольце, течение внутри которого характеризуется функциями $\Phi_2(\psi)$, $F_2(\psi)$ вида $F_2(\psi) = A_2\psi + A_2^\circ$, $\Phi(\psi) = (k_2^2\psi^2 / 2 + c_2\psi + b_2)^{1/2}$. На фиг. 4 приведена скорость подъема вихревого кольца в зависимости от радиуса тора R (кривая *1*) при $\eta_1 = 1$ для функций $\Phi_1(\psi)$, $F_1(\psi)$ вида $\Phi_1(\psi) = k_1\psi + c_1$, $F(\psi) = A_1^\circ + A_1\psi$. Скорость подъема вихревого кольца определена по формуле (9). Для сравнения на фиг. 4 приведена скорость подъема вихревого кольца [2] течение внутри которого обладает только аксиальной компонентой скорости, в зависимости от радиуса тора (кривая *2*). Разница в скоростях подъема незначительна, что связано с уменьшением азимутальной компоненты скорости с ростом радиуса тора, в то время как аксиальные компоненты скорости изменяются незначительно. Следовательно, при больших радиусах тора азимутальная компонента скорости мала и кольцевые вихри мало отличаются друг от друга. Как видно из фиг. 4, скорости подъема обоих кольцевых вихрей с ростом радиуса тора монотонно убывают, при $R = 14.9$ эти скорости равны, при $R < 14.9$ скорость подъема кольцевого вихря с азимутальной закруткой больше, чем без закрутки.



Фиг. 4

Автор благодарит Ю. С. Рязанцева и Ю. П. Гупало за постановку задачи и внимание к работе.

Поступила 2 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Милн-Томсон Л. М.* Теоретическая гидродинамика. М., «Мир», 1964.
2. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.— Л., Гостехиздат, 1947.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., «Наука», 1975.
4. *Ярмицкий А. Г.* Об одном пространственном аналоге вихревого столба Чаплыгина (обобщенный вихрь Хилла). ПМТФ, 1974, № 5.
5. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
6. *Maxworthy T.* Structure and stability of vortex ring. J. Fluid Mech., 1972, vol. 51, pt 1.
7. *Васильев О. Ф.* Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. М.— Л., Госэнергоиздат, 1958.
8. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М., «Наука», 1968.