Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 531.011

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ С ФАЗООГРАНИЧЕНИЯМИ

Ю. П. Кривенков

(Москва)

Для линейных задач математической теории оптимальных процессов с фазовыми ограничениями формулируются и доказываются достаточные условия оптимальности (см. [1 2]). Задачи оптимизации рассматриваются в регулярном и сингулярном случаях, в которых управляющие функции выражаются соответственно классическими и обобщенными в смысле Соболева — Шварца функциями (см. [3–5]). Условия оптимальности формулируются с помощью системы сопряженных функций, принадлежащих некоторым классам тоже обобщенных в смысле Соболева — Шварца функций (см. [6, 7]).

Последнее позволяет получать новые результаты как в вопросах формы описания сопряженных функций и формулировке условий скачка, так и в проблемах расширения классов задач оптимизации и упрощения классов сопряженных функций (см. [8–10]).

Приводятся примеры из области космической навигации и теории оболочек, иллюстрирующие особенности излагаемого подхода (см. [11]).

1. Регулярная оптимальная задача. *Задача A*. На отрезке $[0, T]$ определить n- и k-мерные вектор-функции (столбцы) $x(t)$ и $u(t)$ из условия

$$\max\left\{\gamma x(T)\colon \frac{dx}{dt} = Ax + Bu + a, \quad x(0) = c, \quad Pu \geqslant b, \quad Qx \geqslant d\right\}$$

в котором γ, c — постоянные, n-мерные векторы (строка, столбец); a, b и d — n-, s- и m-мерные вектор-функции (столбцы), а A, B, P, Q — матричные функции от t на $[0, T]$ соответственно порядков $n \times n$, $n \times k$, $s \times k$, $m \times n$.

Пусть n представляет собой n-мерный постоянный вектор с целочисленными неотрицательными компонентами n_i, а p — число или символ, удовлетворяющий условиям $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Введем в рассмотрение пространство $L_{n,p}^{\mathrm{n}}[0, T]$ вектор-функций $x(t)$ размерности n, каждая компонента которых измерима на $[0, T]$ и обладает n_i-й обобщенной по С. Л. Соболеву производной, принадлежащей $L_p(0, T)$.

Решение $x(t)$, $u(t)$ оптимальной задачи A будем искать в классе $x(t) \in L_{n,p}^{\mathrm{n}}[0, T]$, $u(t) \in L_{k,p}^{\mathrm{k}}[0, T]$, где $n_i \geqslant 1$, $k_j = 0$, и пусть при любых таких $x(t)$, $u(t)$ справедливы включения

$$A(t)x(t), \quad B(t)u(t), \quad a(t) \in L_{n,p}^{\mathrm{n-e}}[0, T]$$

$$P(t)u(t), \quad b(t) \in L_{s,p}^{\mathrm{s}}[0, T]; \quad Q(t)x(t), \quad d(t) \in L_{m,p}^{\mathrm{m}}[0, T]$$

$$\mathrm{e} = (1, 1, \ldots, 1), \quad s_i = 0, \quad m_j \geqslant 1$$

Будем предполагать, что уравнение $dx / dt = Ax + By + a$ и неравенство $Pa \geqslant b$ удовлетворяются в среднем.

2. Пространство обобщенных функций. Рассмотрим пространство D_n вектор-функций (столбцов) $v(t)$ размерности n с бесконечно-дифференцируемыми компонентами $v_i(t)$, обращающимися в нуль в некоторых окрестностях точек $t = 0$ и $t = T$.

Пусть $\mathbf{n}$ — вектор размерности n с целочисленными компонентами n_i и $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Пространством $L_{n,p}^{\mathbf{n}}[0, T]$ обобщенных вектор-функций $\varphi(t)$ назовем пространство тех линейных функционалов $(\varphi(t), v(t))$, определенных на D_n, которые представляются в форме

$$(\varphi(t), v(t)) = \sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^T \varphi_i^{\circ}(t) v_i(t)\,dt + \sum_{j=1}^{-n_i}\int_0^T \varphi_i^{j}(t)\frac{d^j}{dt^j} v_i(t)\,dt\right)$$

Здесь $\varphi_i^{\circ}(t) \in L_p(0, T)$ при $n_i \leqslant 0$; $\varphi_i^{\circ}(t) \in L_{1,p}^{n_i}[0, T]$ при $n_i > 0$, $\varphi_i^{j}(t) \in L_p(0, T)$ при $n_i < 0$, $\varphi_i^{j}(t) = 0$ при $n_i \geqslant 0$.

3. Свойства обобщенных функций.

1°. Если $\varphi(t) \in L_{n,p}^{\mathbf{n}}[0, T]$ и $\psi(t) \in L_{n,p}^{\mathbf{r}}[0, T]$, то определяется сумма $\varphi(t) + \psi(t) \in L_{n,p}^{\mathbf{s}}[0, T]$, где $s_i \geqslant \max\{n_i, r_i\}$.

2°. Если $\varphi(t) \in L_{n,p}^{\mathbf{n}}[0, T]$ и $A(t)$ — матричная функция порядка $n \times k$, компоненты которой $a_{ij}(t) \in C^n[0, T]$, то определяется произведение $\varphi(t)A(t) \in L_{k,p}^{k}[0, T]$, где $k_j \geqslant \min_i\{n_i\}$, в форме

$$(\varphi(t)A(t), v(t)) = (\varphi(t), A(t)v(t))$$

3°. Если $\varphi(t) \in L_{n,p}^{\mathbf{n}}[0, T]$, то определяется производная $d\varphi(t) / dt \in L_{n,p}^{\mathbf{n}-\mathbf{e}}[0, T]$ в форме

$$\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}, v(t)\right) = -\left(\varphi(t), \frac{dv(t)}{dt}\right)$$

4°. Каждый функционал $(\varphi(t), v(t))$, определяющий $\varphi(t) \in L_{n,p}^{\mathbf{n}}[0, T]$, представляется в виде суммы

$$(\varphi(t), v(t)) = \sum_{i=1}^{n}(\varphi_i(t), v_i(t))$$

функционалов $(\varphi_i(t), v_i(t))$, определяющих $\varphi_i(t) \in L_{1,p}^{n_i}[0, T]$ и представляющих собой i-е координаты $\varphi(t)$.

5°. Каждая функция $\varphi(t) \in L_{n,p}^{\mathbf{n}}[0, T]$, где $\min_i\{n_i\} = n_0 < 0$, представляется в виде суммы регулярной $\varphi^r(t)$, и сингулярной $\varphi^s(t)$ составляющих $\varphi(t)$, т. е. $\varphi(t) = \varphi^r(t) + \varphi^s(t)$. Каждая координата $\varphi_i^r(t)$ регулярной составляющей $\varphi^r(t)$ имеет представление

$$(\varphi_i^r(t), v_i(t)) = \int_0^T \varphi_i^0(t) v_i(t)\,dt$$

и может быть в среднем отождествлена с функцией $\varphi_i^{(0)}(t)$ этого представления, а каждая координата $\varphi_i^s(t)$ сингулярной составляющей $\varphi^s(t)$

при $n_i < 0$ может быть представлена в форме

$$(\varphi_i^s(t), v_i(t)) = \int_0^T \Phi_i(t) \frac{d^{-n_i}}{dt^{-n_i}} v_i(t)\, dt$$

$$\Phi_i(t) = \varphi_i^{-n_i}(t) - \int_0^t \varphi_i^{-n_i-1}(t)\, dt + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{-n_i-1} \int_0^t \ldots \int_0^t \varphi_i^1(t) (dt)^{-n_i-1}$$

и может рассматриваться как n_i-я обобщенная производная от функции $(-1)^{n_i} \Phi_i(t) \in L_p(0, T)$.

6°. Если $\varphi(t) \in L^{\mathbf{n}}_{n,p}[0, T]$ и $u(t) \in L^{\mathbf{m}}_{n,q}[0, T]$, где $\mathbf{n} + \mathbf{m} \geqslant (0, \ldots, 0)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ и $q = p/(p-1)$, то определяется произведение $\varphi(t) u(t) \in L^{n^\circ}_{1,1}[0, T]$, где $n^\circ = \min\{\min_i\{n_i\}, \min_j\{m_j\}\}$, в форме

$$(\varphi(t) u(t), v(t)) = \sum_{i=1 (m_i \geqslant 0)}^{n} (\varphi_i(t), u_i(t) v(t)) +$$

$$+ \sum_{i=1 (m_i < 0)}^{n} (u_i(t), \varphi_i(t) v(t))$$

7°. Если $\varphi(t) \in L^{\mathbf{n}}_{n,p}[0, T]$ и $u(t) \in L^{\mathbf{m}}_{n,q}[0, T]$, где $\mathbf{n} + \mathbf{m} = \mathbf{e}$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ и $q = p/(p-1)$, то определена производная $(d/dt) \cdot (\varphi(t) u(t)) \in L^{n^\circ-1}_{1,1}[0, T]$ со свойством

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t) u(t)) = \frac{d\varphi(t)}{dt} u(t) + \varphi(t) \frac{du(t)}{dt}$$

4. Полуупорядоченность обобщенных функций. На $[0, T]$ рассмотрим n замкнутых множеств $\overline{\omega}_i$. Будем считать, что совокупность множеств $\{\overline{\omega}_i\}$ принадлежит классу Ω или, иначе, $\{\overline{\omega}_i\} \in \Omega$, если: а) существует $\varepsilon > 0$, что при любом $i \in \{1, \ldots, n\}$ справедливо включение $\omega_i \subset [\varepsilon, T - \varepsilon]$; б) при любом $i \in \{1, \ldots, n\}$ внутренняя часть множества $\overline{\omega}_i$, т. е. $\omega_i = \operatorname{int} \overline{\omega}_i$, представляет собой конечное число изолированных интервалов; в) дополнение ω_i в $\overline{\omega}_i$, т. е. $\gamma_i = \overline{\omega}_i \setminus \omega_i$, представляется в форме $\gamma_i = \gamma_i^- \cup \gamma_i^+ \cup \gamma_i^\circ$, где γ_i^- и γ_i^+ — множества соответственно левых и правых концов интервалов, принадлежащих ω_i, а γ_i° — множество, состоящее из конечного числа изолированных от ω_i точек.

В пространстве $L^{\mathbf{n}}_{n,p}[0, T]$ обобщенных функций $\varphi(t)$ с помощью семейства $\{\overline{\omega}_i\} \in \Omega$ введем отношение полуупорядоченности $\varphi(t) \dot{\geqslant} 0$. Будем считать, что $\varphi(t) \dot{\geqslant} 0$, если выполняются следующие условия.

Для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$, для которых $n_i \geqslant 0$, при $n_i = 0$ в среднем и при $n_i > 0$ поточечно на $[0, T]$ справедливо неравенство $\varphi_i^\circ(t) \geqslant 0$.

Для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$, для которых $n_i \geqslant 2$, и для любых $j \in \{1, \ldots, n_i - 1\}$ справедливы неравенства

$$(-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \varphi_i^\circ(t) \geqslant 0 \text{ на } \gamma_i^-, \quad \frac{d^j}{dt^j} \varphi_i^\circ(t) \geqslant 0 \text{ на } \gamma_i^+$$

$$[1 + (-1)^j] \frac{d^j}{dt^j} \varphi_i^{(0)}(t) \geqslant 0 \text{ на } \gamma_i^\circ$$

Для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$, для которых $n_i < 0$, любых $k \in \{1, \ldots \ldots, -n_i\}$ и любой функции $v(t) \in L_{1,q}^{-k}[0, T]$, $q = p/(p-1)$, удовлетворяющей в этом пространстве отношению $v(t) \dot{\geqslant} 0$, справедливо неравенство

$$\int_0^T \varphi_i^k(t) \frac{d^k}{dt^k} v(t)\,dt \geqslant 0$$

Отметим некоторые свойства введенного отношения.

1°. Если $\varphi(t) \in L_{n,p}^{\mathrm{n}}[0, T]$ и $u(t) \in L_{n,q}^{\mathrm{m}}[0, T]$, где $\mathrm{n} + \mathrm{m} \geqslant \geqslant (0, \ldots, 0)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $q = p/(p-1)$, $\varphi(t) \dot{\geqslant} 0$ и $u(t) \dot{\geqslant} 0$, то $\varphi(t)u(t) \dot{\geqslant} 0$.

2°. Пусть $\delta^{(k)}(t - \tau) \in L_{1,p}^{k+1}[0, T]$ представляет собой k-ю производную от δ-функции в точке τ. Тогда отношение $\alpha\delta^{(k)}(t-\tau) \dot{\geqslant} 0$, в котором $\alpha = \mathrm{const}$, означает $\alpha \geqslant 0$, если k четно, $\alpha \geqslant 0$ при $\tau \in \gamma^-$, $\alpha \leqslant 0$ при $\tau \in \gamma^+$ и $\alpha = 0$ при $\tau \in \gamma^\circ$, если k нечетно.

5. Условия оптимальности для регулярной оптимальной задачи. Рассмотрим некоторое допустимое решение $x^*(t)$, $u^*(t)$ задачи A и с его помощью определим совокупность множеств $\{\bar{\omega}_i\}$, где $i \in \{1, \ldots, m\}$, в форме $\bar{\omega}_i = \{t : Q_i(t)x^*(t) - d_i(t) = 0\}$, в которой $Q_i(t)x^*(t)$ и $d_i(t)$ представляют собой i-е компоненты вектор-функций $Q(t)x^*(t)$ и $d(t)$. Предполагая, что совокупность множеств $\{\bar{\omega}_i\}$ принадлежит классу Ω, отмеченным выше способом введем отношения полуупорядоченности: $g(t) \dot{\geqslant} 0$ и $\vartheta(t) \dot{\geqslant} 0$ соответственно для пространств $L_{m,p}^{\mathrm{m}}[0, T]$ и $L_{m,q}^{-\mathrm{m}}[0, T]$, где $q = p/(p-1)$. Отмечая, что допустимое решение $x^*(t)$, $u^*(t)$ удовлетворяет отношению $Q(t)x^*(t) \dot{\geqslant} d(t)$, будем говорить, что допустимое решение $x(t)$, $u(t)$ задачи A близко к допустимому решению $x^*(t)$, $u^*(t)$ по отношению полуупорядоченности $Qx \dot{\geqslant} d$, если $Q(t)x(t) \dot{\geqslant} \geqslant d(t)$.

Теорема 1. Если для некоторого допустимого решения $x^*(t)$, $u^*(t)$ задачи A существуют функции

$$\psi(t) \in L_{n,q}^{-\mathrm{n+e}}[0, T], \quad \varepsilon(t) \in L_{s,q}^{-\mathrm{s}}[0, T]$$

$$\vartheta(t) \in L_{m,q}^{-\mathrm{m}}[0, T] \quad \left(q = \frac{p}{p-1}\right)$$

такие, что функция $\psi(t)$ регулярна и непрерывна в окрестностях точек $t = 0$ и $t = T$, функции $\psi(t)$, $\varepsilon(t)$, $\vartheta(t)$ удовлетворяют системе

$$d\psi/dt + \psi A + \vartheta Q = 0, \quad \psi(T) = \gamma, \quad \psi B + \varepsilon P = 0$$

$$\varepsilon \geqslant 0, \quad \vartheta(t) \dot{\geqslant} 0, \quad \varepsilon(Pu^* - b) = 0, \quad \vartheta(Qx^* - d) = 0$$

то $x^*(t)$, $u^*(t)$ — оптимальное решение задачи A среди допустимых решений этой задачи, близких к $x^*(t)$, $u^*(t)$ по отношению полуупорядоченности $Qx \dot{\geqslant} d$.

Доказательство. Предположим, что в окрестности допустимого решения $x^*(t)$, $u^*(t)$ по отношению полуупорядоченности $Qx \dot{\geqslant} d$ существует допустимое решение $x(t)$, $u(t)$, для которого выполняется неравенство $\gamma x(T) - \gamma x^*(T) = \varepsilon > 0$. Для функций $\psi(t) \in L_{n,q}^{-\mathrm{n+e}}[0, T]$ и $\bar{x}(t) =$

$= x(t) - x^*(t) \in L^n_{n,p}[0, T]$ определено произведение

$$-\frac{d\psi}{dt}\bar{x}(t) \in L^{n*}_{1,1}[0,T] \quad (n^* = \min_i\{-n_i\})$$

На основании того, что $\psi(t)$ удовлетворяет уравнению $-d\psi / dt = \psi A + \vartheta Q$, это произведение равно выражению $\psi A\bar{x} + \vartheta Q\bar{x}$. Последнее означает, что справедливо равенство

$$-\frac{d\psi}{dt}\bar{x} = \psi A\bar{x} + \vartheta Q\bar{x}$$

В силу того, что

$$\psi B + \varepsilon P = 0, \quad \varepsilon(Pu^* - b) = 0, \quad \vartheta(Qx^* - d) = 0$$

$$d\bar{x} / dt = A\bar{x} + B\bar{u} \quad (\bar{u}(t) = u(t) - u^*(t))$$

это равенство приобретает форму

$$-d / dt(\psi\bar{x}) = \varepsilon(Pu - b) + \vartheta(Qx - d)$$

На основании того, что $\varepsilon(t) \geqslant 0$, $Pu + b \geqslant 0$, $\vartheta(t) \dot{\geqslant} 0$, $Qx - d \dot{\geqslant} 0$, указанная форма порождает неравенство $(d / dt)(\psi\bar{x}) \leqslant 0$.

Согласно условиям теоремы, функция $\psi(t)$ регулярна в окрестностях $[0, \sigma_1]$ и $[T - \sigma_1, T]$, где $\sigma_1 > 0$. Возьмем произвольное $\sigma \in (0, \sigma_1]$ и построим функцию $v_\sigma(t) \in D_1$ в форме $v_\sigma(t) = 0$ на $[0, \sigma / 2]$ и $[T - \sigma / 2, T]$; $v_\sigma(t) = 1$ на $[\sigma, T - \sigma]$; $v_\sigma(t) = \eta(2t / \sigma - 1)$ на $[\sigma / 2, \sigma]$ и $v_\sigma(t) = \eta(2(T - t) / \sigma - 1)$ на $[T - \sigma, T - \sigma / 2]$, где

$$\eta(\tau) = \frac{1}{M}\int_0^\tau \exp\left(-\frac{1}{t(1-t)}\right)dt, \quad M = \int_0^T \exp\left(-\frac{1}{t(1-t)}\right)dt > 0$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}(\psi\bar{x}) = -\sum_{i=1}^n\left(\int_{\sigma/2}^{\sigma} + \int_{T-\sigma}^{T-\sigma/2}\right)\psi_i^\circ(t)\bar{x}_i(t)\frac{dv_\sigma}{dt}dt$$

Функции $\psi(t)$ и $\bar{x}(t)$ непрерывны в окрестностях точек $t = 0$ и $t = T$, поэтому для любого $\mu > 0$ существует $\sigma_2 > 0$, такое, что

$$\psi_i^\circ(t)\bar{x}_i(t) = \psi_i^\circ(0)\bar{x}_i(0) + \xi(t), \quad |\xi(t)| \leqslant \mu, \ \forall t \in [0, \sigma_2]$$

$$\psi_i^\circ(t)\bar{x}_i(t) = \psi_i^\circ(T)\bar{x}_i(T) + \zeta(t), \quad |\zeta(t)| \leqslant \mu, \ \forall t \in [T - \sigma_2, T]$$

Выберем $\sigma = \min\{\sigma_1, \sigma_2\}$, будем иметь неравенство

$$-\sum_{i=1}^n(\psi_i^\circ(0)\bar{x}_i(0) - \psi_i^\circ(T)\bar{x}_i(T)) -$$

$$-\sum_{i=1}^n\left(\int_{\sigma/2}^{\sigma}\xi(t)\frac{d}{dt}v_\sigma(t)\,dt + \int_{T-\sigma}^{T-\sigma/2}\zeta(t)\frac{d}{dt}v_\sigma(t)\,dt\right) \leqslant 0$$

которое в силу того, что $\bar{x}(0) = 0$, $\psi(T) = \gamma$, означает неравенство

$$\gamma\bar{x}(T) \leqslant \sum_{i=1}^n\left(\int_{\sigma/2}^{\sigma}\xi(t)\frac{d}{dt}v_\sigma(t)\,dt + \int_{T-\sigma}^{T-\sigma/2}\zeta(t)\frac{d}{dt}v_\sigma(t)\,dt\right)$$

Учитывая оценки

$$\left|\frac{d}{d\tau}\eta(\tau)\right| \leqslant \frac{e^{-4}}{M}, \quad \left|\frac{d}{dt}v_\sigma(t)\right| \leqslant \frac{2e^{-4}}{\sigma M}$$

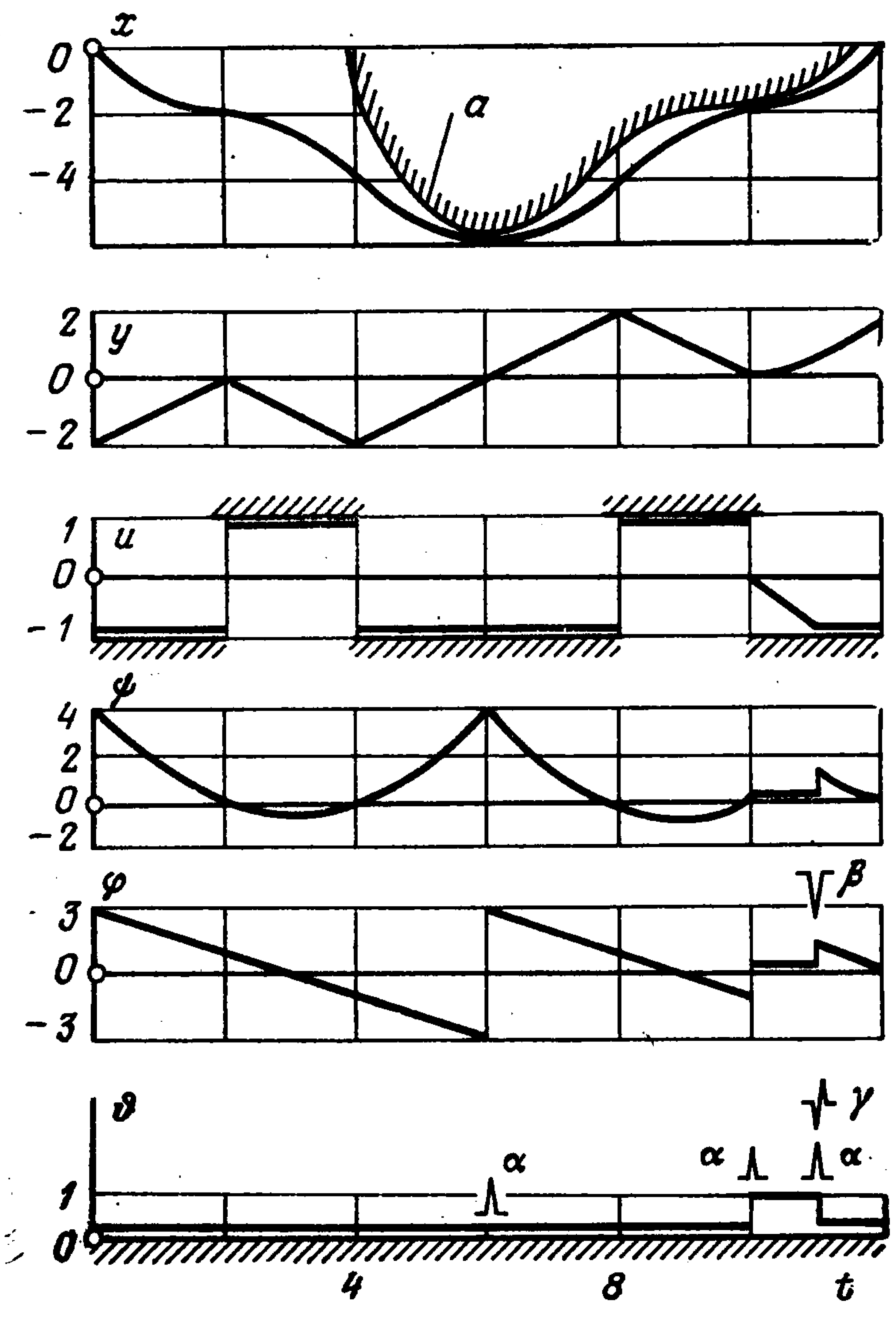
и выбирая $\mu = Me^4\varepsilon / (4n)$, получим неравенство $\gamma\bar{x}(T) \leqslant \varepsilon / 2$, которое противоречит ранее предположенному неравенству $\gamma\bar{x}(T) = \varepsilon > 0$. Теорема доказана.

Пример 1. На отрезке [0, 12] определить $x(t) \in L_{1,2}{}^2[0,12]$, $y(t) \in L_{1,2}{}^1[0, 12]$ $u(t) \in L_{1,2}{}^\circ[0, 12]$ из условия

$$\max\left\{\int_0^{12} x dt:\ \frac{dx}{dt} = y,\quad \frac{dy}{dt} = -u,\ x(0) = 0,\ y(0) = -2,\quad |u| \leqslant 1,\ x \leqslant a(t)\right\}$$

$$a(t) = (t-10)^3(3t-14) / 64 - 2$$

Рассмотрим следующее допустимое решение: $u^*(t) = 1$ на интервалах (2,4), (8, 10); $u^*(t) = -1$ на (0,2), (4,8), (11, 12) и $u^*(t) = -(d^2 / dt^2)\, a(t)$ на (10, 11). Для данной задачи и данного допустимого решения множеством ω является совокупность точки $t = 6$ и отрезка [10, 11], а множествами γ^-, γ^+ и γ° — отдельные точки $t = 10$, $t = 11$ и $t = 6$ соответственно.



Фиг. 1

Условие $g(t) = a(t) - x(t) \geqslant 0$ означает

$$g(t) \geqslant 0, \quad \left.\frac{d}{dt}g(t)\right|_{t=10} \leqslant 0, \quad \left.\frac{d}{dt}g(t)\right|_{t=11} \geqslant 0$$

Выпишем классы сопряженных функций

$$\varphi(t) \in L_{1,2}{}^{-1}\ [0,12],$$
$$\psi(t) \in L_{1,2}{}^\circ\ [0,12]$$
$$\varepsilon_1(t),\quad \varepsilon_2(t) \in L_{1,2}{}^\circ\ [0,12],$$
$$\vartheta(t) \in L_{1,2}{}^{-2}\ [0,12]$$

Сопряженная система условий для этих функций имеет следующую форму:

$$d\varphi/dt = \vartheta(t) - 1, \qquad d\psi/dt = -\varphi(t),$$
$$\varphi(12) = 0, \qquad \psi(12) = 0$$
$$\psi(t) = \varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t),$$
$$\varepsilon_1(t)(1 + u^*(t)) = 0,$$
$$\varepsilon_2(t)(1 - u^*(t)) = 0$$
$$\vartheta(t)(a(t) - x^*(t)) = 0,\ \varepsilon_1(t) \geqslant 0,$$
$$\varepsilon_2(t) \geqslant 0, \quad \vartheta(t) \dot{\geqslant} 0$$

Если функция $\vartheta(t)$ имеет представление $\vartheta(t) = \vartheta^*(t) + \alpha\delta(t-\tau) + \beta\delta'(t-\tau)$, где $\vartheta^*(t) \in L_{1,2}{}^\circ[0, 12]$ и $\tau \in \gamma$, то условие $\vartheta(t) \dot{\geqslant} 0$ означает: $\vartheta^*(t) \geqslant 0$; $\alpha \geqslant 0$; $\beta \geqslant 0$, если $\tau = 10$, $\beta \leqslant 0$, если $\tau = 11$ и $\beta = 0$, если $\tau = 6$.

Используя обозначение $\Pi_\alpha{}^\beta(t) = \theta(t-\alpha) - \theta(t-\beta)$, где $\theta(t)$ — характеристическая функция множества $\{t\colon\ t \geqslant 0\}$, составим решение сопряженной системы $\vartheta(t) = \Pi_{10}{}^{11}(t) + 6\delta(t-6) + \delta(t-10) + \delta(t-11) - {}^1/_2\delta'(t-11)$; $\varphi(t) = 3 - t$ на [0, 6], $\varphi(t) = 9 - t$ на (6, 10), $\varphi(t) = 0$ на (10, 11), $\varphi(t) = 12 - t -$

$-{}^1/_2\delta\,(t-11)$ на $[11,\ 12]$; $\psi(t)={}^1/_2\,(9-t)^2-{}^1/_2$ на $[0,\ 6)$, $\psi(t)=0$ на $(10{,}11)$, $\psi(t)={}^1/_2\,(t-12)^2$ на $(11,12)$ (см. фиг. 1, где α, β, γ означают соответственно δ-функцию, δ-функцию с отрицательным коэффициентом и производную от последней).

Согласно теореме 1, допустимое решение $x^*(t)$, $y^*(t)$, $u^*(t)$ является оптимальным решением примера 1 среди решений, близких к нему по условию полуупорядоченности $x(t)-a(t)\geqslant 0$.

Отметим, что предложенная здесь форма условий оптимальности проще и удобнее обычно используемых тем, что она не предусматривает: а) наряду с функцией $\psi(t)$ рассмотрение и исследование скачков функции Гамильтона $H(t)$, б) дополнительного введения в условия оптимальности задачи добавочных ограничений, получаемых первым и вторым дифференцированием функции и выражающей фазовое ограничение $x(t)-a(t)\geqslant 0$ в формах

$$y(t)\geqslant\frac{d}{dt}a(t),\quad u(t)\leqslant-\frac{d^2}{dt^2}a(t)$$

в) введения дополнительных сопряженных функций или мер, соответствующих этим ограничениям, г) на фазовой границе $[10,\ 11]=\{t:x^*(t)=$ $=a(t)\}$ определять значения $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ из достаточно сложной и трудоемкой системы уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{1}{D}\frac{\partial H}{\partial u}D_x,\quad \frac{d\psi}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y}+\frac{1}{D}\frac{dH}{\partial u}D_y$$

в которой D, D_x, D_y — некоторые определители.

6. Сингулярная оптимальная задача. *Задача Б.* На отрезке $[0,\ T]$ определить функцию $x(t)\in L_{n,p}{}^{\mathrm{n}}[0,\ T]$, $u(t)\in L_{k,p}{}^{\mathrm{k}}[0,\ T]$, где $1\leqslant p\leqslant+\infty$, $n_i\geqslant 0$, $-1\leqslant k_j\leqslant 0$ и функция $x(t)$ непрерывна в окрестностях точек $t=0$ и $t=T$, из условия

$$\max\{\gamma x(T):\ dx/dt=Ax+Bu+a,\ x(0)=c,\ Pu\geqslant b,\ Qx\geqslant d\}$$

в котором при любых $x(t)$, $u(t)$ из допустимого класса вектор-функций

$$A(t)x(t),\quad B(t)u(t),\quad a(t)\in L_{n,p}^{\mathrm{n-e}}[0,\ T]$$

$$P(t)u(t),\quad b(t)\in L_{s,p}{}^{\mathrm{s}}[0,\ T];\quad Q(t)x(t),\quad d(t)\in L_{m,p}{}^{\mathrm{m}}[0,\ T]$$

$$(-1\leqslant s_i\leqslant 0,\ m_j\geqslant 0)$$

Будем предполагать, что уравнение $dx/dt=Ax+Bu+a$ понимается в отмеченном выше обобщенном смысле. Неравенство $h(t)=$ $=Pu-b\geqslant 0$, в котором $h(t)\in L_{s,p}{}^{\mathrm{s}}[0,\ T]$, понимается тоже в отмеченном выше обобщенном смысле: если $s_i=0$, то $h_i(t)\geqslant 0$ в среднем на $[0,\ T]$, и если $s_i=-1$, то для любой функции $v(t)\in D_1$, где $v(t)\geqslant 0$ выполняется неравенство $(h_i(t),v(t))\geqslant 0$. Неравенство $g(t)=Qx-d\geqslant 0$, в котором $g(t)\in L_{m,p}{}^{\mathrm{m}}[0,\ T]$ и $m_i\geqslant 0$ при $m_i\geqslant 1$, означает поточечное выполнение неравенства $Q_ix(t)-d_i\geqslant 0$, а при $m_i=0$ — в среднем.

Рассмотрим некоторое допустимое решение $x^*(t)$, $u^*(t)$ задачи Б и для него аналогично предыдущему определим множества $\overline{\omega}_i=$ $=\{t:Q_ix^*(t)-d_i(t)=0\}$ и множества $\gamma_i{}^-$, $\gamma_i{}^+$, $\gamma_i{}^\circ$. Будем предполагать, что $\{\overline{\omega}_i\}\in\Omega$. Для функций

$$g(t)\in L_{m,\,p}^{\mathrm{m}}[0,T],\quad \vartheta(t)\in L_{m,\,q}^{-\mathrm{m}}[0,T]\quad\left(q=\frac{p}{p-1}\right)$$

определим соответственно отношения полуупорядоченности $g(t) \dot{\geqslant} 0$, $\vartheta(t) \dot{\geqslant} 0$ и при помощи первого из них определим условие близости допустимого решения $x(t)$, $u(t)$ задачи Б к допустимому решению $x^*(t)$, $u^*(t)$.

7. Условия оптимальности для сингулярной оптимальной задачи. *Теорема 2.* Если для некоторого допустимого решения $x^*(t)$, $u^*(t)$ задачи Б существуют функции

$$\psi(t) \in L_{n,q}^{-n+e}[0, T], \quad \varepsilon(t) \in L_{s,q}^{s}[0, T]$$

$$\vartheta(t) \in L_{m,q}^{-m}[0, T] \quad \left(q = \frac{p}{p-1}\right)$$

такие, что функция $\psi(t)$ регулярна и непрерывна в окрестности точек $t = 0$ и $t = T$; функции $\psi(t)$, $\varepsilon(t)$, $\vartheta(t)$ удовлетворяют системе

$$d\psi / dt + \psi A + \vartheta Q = 0, \quad \psi(T) = \gamma, \quad \psi B + \varepsilon P = 0$$

$$\varepsilon(t) \geqslant 0, \quad \vartheta(t) \dot{\geqslant} 0, \quad \varepsilon(t)(Pu^*(t) - b) = 0$$

$$\vartheta(t)(Qx^*(t) - d) = 0$$

то $x^*(t)$, $u^*(t)$ — оптимальное решение задачи Б среди допустимых решений этой задачи, близких к $x^*(t)$, $u^*(t)$ по отношению полуупорядоченности $Qx - d \geqslant 0$.

Доказательство теоремы 2 полностью повторяет доказательство теоремы 1.

Пример 2. На отрезке [0, 14] определить $y(x)$, $u(x)$ из условия

$$\max\left\{\int_0^{14} \alpha(x) u(x)\, dx: \quad \frac{d^2y}{dx^2} = u(x), \quad y(0) = 0,\right.$$

$$\left. y(x) \leqslant 0, \quad y(x) \leqslant a(x), \quad y(x) \leqslant b(x), \quad y(x) \geqslant c(x)\right\}$$

$$\alpha(x) = 2\,|x - 4| - 5, \quad a(x) = x - 2\,|x - 2|^2$$

$$b(x) = 14 - x + 2(x - 12)^2, \quad c(x) = 5 - {}^1/_6\,|x - 4| - {}^1/_4\,|x - 10|$$

Механическим содержанием этого приема может служить задача по определению оптимального профиля оболочки неположительной кривизны, укрывающей объект A при фазовых ограничениях и из условия минимума средневзвешенной кривизны.

Покажем, что допустимое решение $y^*(x) = 7 - |x - 7|$, $u^*(t) = -2\delta(x - 7)$ является оптимальным решением этого примера (см. фиг. 2, β означает δ-функцию с отрицательным коэффициентом).

Видно, что оптимальная задача этого примера сводится к задаче Б.

Составим сопряженную систему

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \vartheta(x) - \lambda(x) - \mu(x), \quad \psi(0) = \psi(14) = \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=14} = 0$$

$$\psi(x) = \varepsilon(x) - \alpha(x), \quad \vartheta(x) \dot{\geqslant} 0, \quad \lambda(x) \dot{\geqslant} 0, \quad \mu(x) \dot{\geqslant} 0$$

$$\varepsilon(x) \geqslant 0, \quad \varepsilon(x) u^*(x) = 0, \quad \lambda(x)(y^*(x) - a(x)) = 0$$

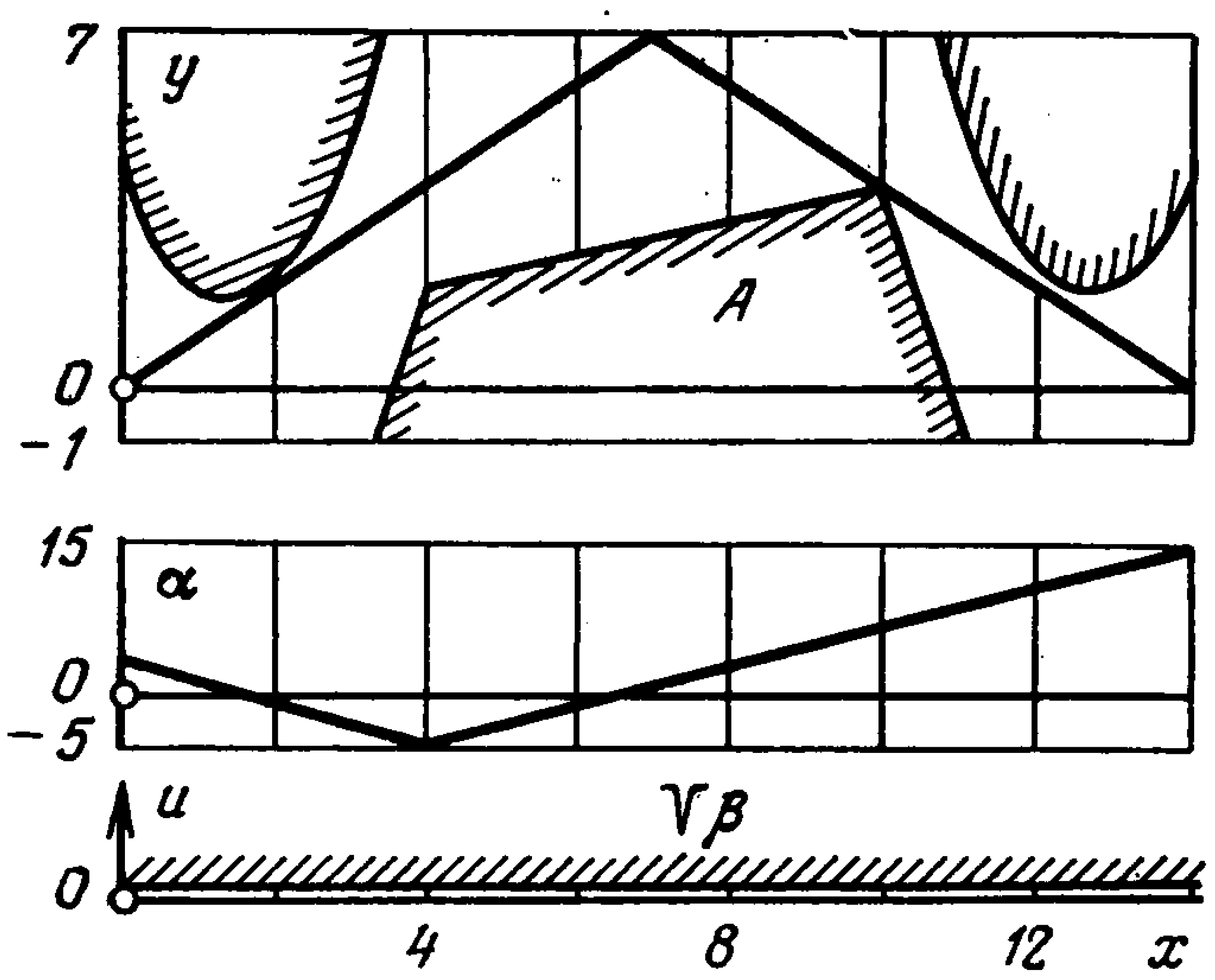
$$\mu(x)(y^*(x) - b(x)) = 0, \quad \vartheta(x)(y^*(x) - c(x)) = 0$$

В силу того, что равенства $y^*(x) = a(x)$, $y^*(x) = b(x)$, $y^*(x) = c(x)$ имеют место только соответственно в точках $x = 2$, $x = 12$, $x = 10$, имеем в остальных точках $d^2\psi / dx^2 = 0$. Так как $u^*(x) \neq 0$ только в точке $x = 7$, имеем $\varepsilon(7) = 0$.

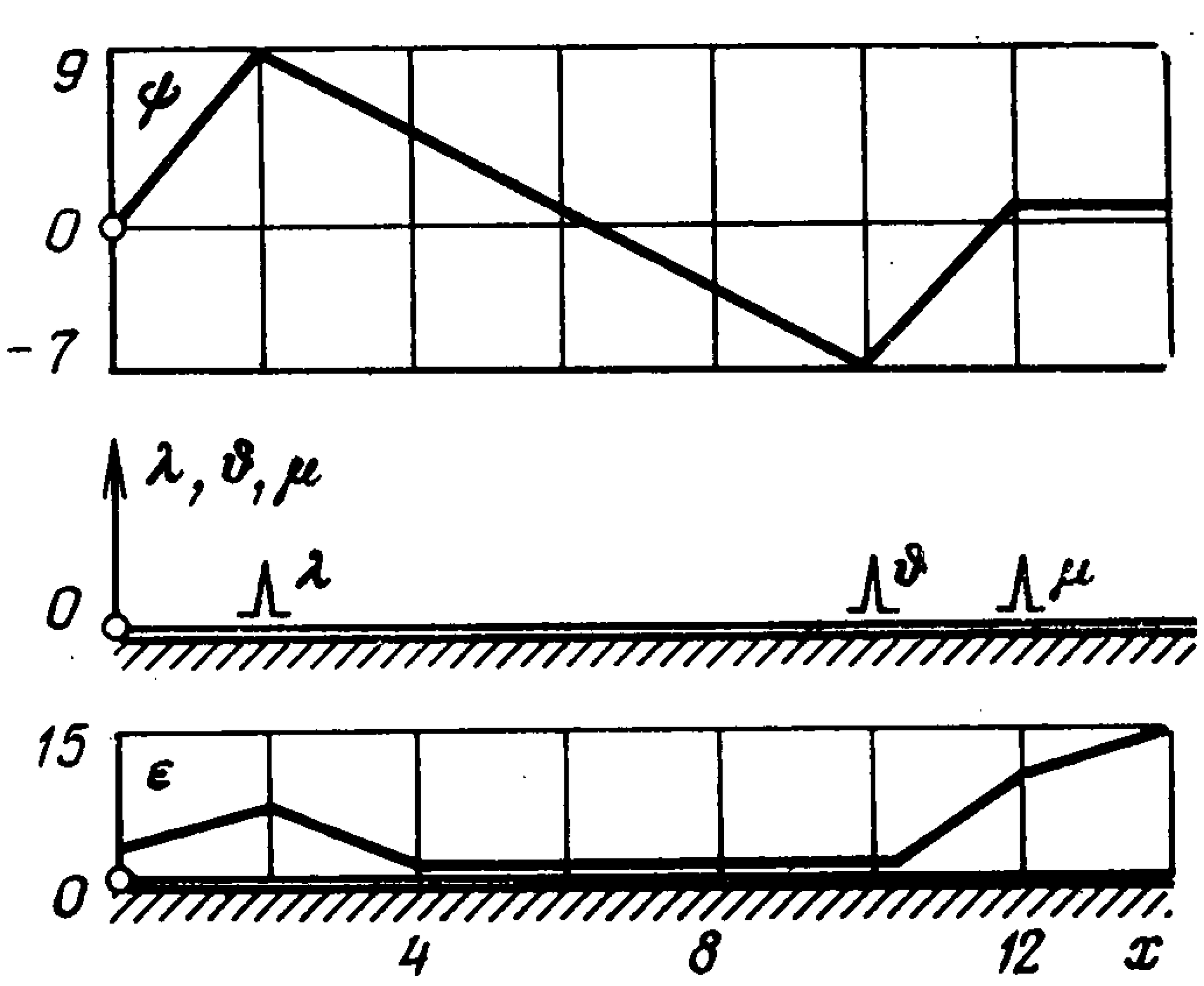
Выберем $\psi(x) = {}^9/_2\, x$ при $x \in [0, 2]$, $\psi(x) = 13 - 2x$ при $x \in [2, 10]$, $\psi(x) = {}^7/_2\,(x - 12)$ при $x \in [10, 12]$, $\psi(x) = 0$ при $x \in [12, 14]$. Получим неравенства

$$\varepsilon(x) = \psi(x) + \alpha(x) \geqslant 0, \quad \lambda(x) = {}^{13}/_2\, \delta(x - 2) \geqslant 0$$
$$\vartheta(x) = {}^{11}/_2 \delta(x - 10) \geqslant 0, \quad \mu(x) = {}^7/_2\, \delta(x - 12) \geqslant 0$$

и равенство $\varepsilon(7) = 0$, которые согласно теореме 2 доказывают оптимальность допустимого решения $y^*(x)$, $u^*(x)$ (см. фиг. 3).



Фиг. 2



Фиг. 3.

Данный пример показывает, во-первых, что для значительного числа оптимальных задач, у которых в классической постановке не существует оптимальных решений таковые могут существовать и иметь вполне реальный механический смысл в рамках обобщенной постановки, во-вторых, что рассмотренная выше постановка сингулярной задачи оптимизации не предполагает априорной дислокации или количества особенностей управляющих функций этой задачи.

8. Заключительные замечания. Принятая в данной работе схема исследования решений задачи оптимизации позволяет следующее.

1°. Освободиться от ограничительного рассмотрения независимой переменной в качестве фазовой.

2°. Изучать задачи, в которых управляющие функции принадлежат пространствам L_p или даже D' (см. [5]).

3°. Проводить составление сопряженной системы без привлечения дополнительных ограничений, получаемых дифференцированием фазовых ограничений, что существенно повышает размерность задачи и приводит к необходимости рассмотрения достаточно сложной задачи с переменной структурой (см. [9]).

4°. Допускать случаи, в которых основная сопряженная функция $\psi(t)$ может принимать нулевые значения на фазовой границе, что избавляет от дополнительного интегрирования сопряженной системы уравнений на фазовой границе (см. [8]).

5°. Наряду с рассмотренными здесь и в работе [6] достаточными условиями оптимальности, рассматривать также и необходимые условия, причем в следующих усложненных и обобщенных случаях:

а) при наличии фазовых ограничений общего вида [1],

б) для задач оптимизации с распределенными параметрами (задач с дифференциальными уравнениями в частных производных) (см. [7, 10]).

Поступила 23 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
2. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Некоторые оптимальные задачи для линейных систем. Автоматика и телемеханика, 1963, т. 24, № 12.
3. *Soboleff S.* Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hiperbolicues normales. Матем. сб., 1936, t. 43, № 1.
4. *Schwartz L.* Theorie des distributions, t. 1—2. Paris, Hermann, 1950—1951.
5. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1976.
6. *Кривенков Ю. П.* Достаточные условия оптимальности для задач с дифференциальными уравнениями второго порядка эллиптического типа при наличии фазовых ограничений. Дифференциальные уравнения, 1975, т. 11, № 1.
7. *Кривенков Ю. П.* Необходимые условия оптимальности для линейной задачи с дифференциальными уравнениями второго порядка эллиптического типа при наличии фазовых ограничений. Докл. АН СССР, 1977, т. 232, № 1.
8. *Аноров В. П.* Принцип максимума для процессов с ограничениями общего вида. Автоматика и телемеханика, 1967, т. 28, № 3—4.
9. *Брайсон А., Хо Ю-ши.* Прикладная теория оптимального управления. М., «Мир», 1972.
10. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М., «Наука», 1975.
11. *Желнин Ю. Н., Шилов А. А.* Траектории минимальной дальности при входе космического аппарата в атмосферу земли со сверхкруговой скоростью. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 1.

[1] *Кривенков Ю. П.* Необходимые условия оптимальности для линейной задачи математической теории оптимальных процессов с фазоограничениями. Деп. ВИНИТИ №1420-77 от 13 апреля 1977 г.