Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 531.011

ОПТИМАЛЬНАЯ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ СТАБИЛИЗАЦИЯ ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ С ИНВАРИАНТНОЙ НОРМОЙ

Л. Д. Акуленко

(Москва)

Исследуется задача оптимальной по быстродействию стабилизации возмущенной нелинейной системы управлениями, ограниченными сферой. Предполагается, что невозмущенная система принадлежит классу управляемых систем с инвариантной нормой [1], для которой синтез оптимального управления находится при помощи функционального неравенства Шварца [1,2]. В работе на основе достаточных условий оптимальности метода динамического программирования [3] предложен эффективный алгоритм приближенного аналитического построения функции Беллмана и возмущенного оптимального управления. Развита схема последовательных приближений определения оптимальной фазовой траектории. Приведено решение первого приближения задачи наискорейшего торможения вращений твердого тела, близкого к динамически симметричному, с учетом возмущающего момента сил вязкого трения [4].

1. Постановка задачи. Рассматривается система

$$y^{\cdot} = f_0(y) + \varepsilon f(y) + [I + \varepsilon F(y)]\, u, \quad y(0) = y_0 \tag{1.1}$$

Здесь $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — фазовый вектор, значения которого принадлежат ограниченной области, включающей точку $y = 0$; ε — числовой параметр ($|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$); I — единичная матрица; f_0, f — векторы, F — матрица; точкой обозначено дифференцирование по времени $t \geqslant 0$, y_0 — начальное фазовое состояние системы. Предполагается, что u — вектор-функция управления размерности $n \geqslant 1$ удовлетворяет ограничению $|u|^2 \leqslant u_0^2$, $u_0 = \mathrm{const}$. Не ограничивая общности, можно положить $u_0 = 1$. Предполагается также, что функции f_0, f и F допускают достаточное число производных по y в указанной области. Эти функции могут непрерывно зависеть от параметра ε, однако их зависимость от ε не указывается.

Далее считается, что неуправляемая невозмущенная система, т. е. система (1.1) при $u \equiv 0$, $\varepsilon = 0$, является системой с инвариантной нормой [1]

$$\eta' f_0(y) \equiv 0, \quad \eta = y h^{-1}, \quad h = |y|, \; h \in [0, h_0], \; h_0 = |y_0| \tag{1.2}$$

Здесь η — орт (вектор-столбец), направленный вдоль вектора y; η' — транспонированный вектор. Из (1.2) следует, что $h(t) = h_0 = \mathrm{const}$, так как $h^{2\cdot} = 0$; поэтому $|y_i(t)| \leqslant h_0$. Отметим, что в механике силы f_0, обладающие свойством (1.2), называются гироскопическими [5]. Их мощность в любой момент времени равна нулю.

Синтез оптимального по быстродействию управления, приводящего невозмущенную систему (1.1) в начало координат, определяется при помощи неравенства $|\eta' u| \leqslant 1$ (неравенства Шварца [1,2])

$$(1.3) \qquad u_0^*(y) = -\eta, \quad u_0^*[t] = -\eta_0(t) \equiv -y_0^*(t, y_0) / h_0^*(t, h_0)$$

$$h_0^* = h_0(1 - t / T_0^*), \quad T_0^* = h_0, \quad u_0^*[t] = u_0^*(y_0^*(t, y_0))$$

Здесь T_0^* — время быстродействия, $y_0^*(t, y_0)$ — невозмущенная фазовая траектория, $y_0^*(T_0^*, h_0) = 0$. Функция Беллмана задачи, т. е. положительное гладкое решение соответствующей задачи Коши для уравнения Гамильтона — Якоби [1] (уравнения Беллмана [3]), равна $T_0(y) = h$ (см. п. 3). Отметим, что применение управления (1.3) для стабилизации возмущенной системы (1.1) приводит, вообще говоря, к погрешности $O(\varepsilon)$ по фазовой траектории и функционалу — времени быстродействия T. Это утверждение следует из уравнения

$$(1.4) \qquad h^{\cdot} = -1 + \varepsilon\eta'(f - F\eta), \quad h(0) = h_0$$

и из ограниченности множителя при ε в (1.4).

В прикладных задачах часто необходимо более точно решить задачу оптимальной стабилизации возмущенной системы с учетом параметра ε. Ставится следующая задача. Требуется найти синтез оптимального по быстродействию закона управления $u = u(y, \varepsilon)$, минимальное значение времени $T = T(y_0, \varepsilon)$, необходимое для стабилизации системы, а также построить возмущенную фазовую траекторию $y = y(t, y_0, \varepsilon)$ ($y(0, y_0, \varepsilon) = y_0$, $y(T, y_0, \varepsilon) = 0$) с заданной степенью точности по малому параметру ε.

Задачи оптимального управления движением систем в аналогичных постановках исследовались методами теории возмущений в работах [2, 4, 6–8].

2. Управляемые вращения твердого тела. В качестве примера невозмущенной управляемой системы с инвариантной нормой рассматривается система динамических уравнений Эйлера [1, 9, 10]

$$(2.1) \qquad I_1\omega_1^{\cdot} + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = M_1, \quad \omega_1(0) = \omega_{10} \qquad (1, 2, 3)$$

Здесь $M_i = b_i u_i$ ($i = 1, 2, 3$) — управляющие моменты, $b_i = \mathrm{const} > 0$, u_i — управления, ограниченные неравенством $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leqslant 1$. Ставится задача о переводе фазовой точки системы из начального состояния $\omega_i(0) = \omega_{i0}$ в начало координат $\omega_i(T) = 0$ за минимальное время T, т. е. задача оптимальной по быстродействию стабилизации системы (2.1).

Если ввести переменные $z_i = L_i b_i^{-1}$, где $L_i = I_i\omega_i$ — компоненты вектора кинетического момента в связанных осях, то система (2.1) принимает вид невозмущенных уравнений (1.1)

$$(2.2) \qquad z_1^{\cdot} + (I_3 - I_2)I_2^{-1}I_3^{-1}b_2b_3b_1^{-1}z_2z_3 = u_1, \; z_1(0) = L_{10}b_1^{-1} \; (1, 2, 3)$$

Условие инвариантности (1.2) для системы (2.2) выполняется, если параметры I_i, b_i удовлетворяют соотношению

$$(2.3) \qquad I_1(I_3 - I_2)b_2^2b_3^2 + I_2(I_1 - I_3)b_1^2b_3^2 + I_3(I_2 - I_1)b_1^2b_2^2 = 0$$

Множество таких значений параметров не пусто. Пусть, ради определенности, $I_3 \geqslant I_2 \geqslant I_1 > 0$. Тогда равенство (2.3) при $I_3 > I_1$ можно представить в виде

$$b_1^2 b_2^{-2} = I_1 (I_3 - I_2) b_3^2 b_2^{-2} [I_2 (I_3 - I_1) b_3^2 b_2^{-2} - I_3 (I_2 - I_1)]^{-1}$$

Это соотношение имеет смысл, если b_3^2 достаточно велико, т. е. при заданном значении b_2^2 выполняется неравенство $b_3^2 > b_2^2 I_3 I_2^{-1} (I_2 - I_1) \times \times (I_3 - I_1)^{-1}$; аналогично для b_1^2.

Рассмотрим некоторые частные случаи, для которых выполняется условие инвариантности (2.3).

1). Твердое тело с произвольными [10] моментами инерции: $I_3 \geqslant I_2 \geqslant I_1$; равенство (2.3) выполняется, если а) $b_1 = b_2 = b_3 = b$ (см. [1, 4, 8, 10]) — в этом случае вектор z_i $(i = 1, 2, 3)$ коллинеарен вектору кинетического момента $L_i : L_i = bz_i$; б) другой случай: $b_1 = bI_1\sqrt{I_2 I_3}$, $z_1 = \omega_1 / (b\sqrt{I_2 I_3})$ (1, 2, 3); при этом $b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3$.

2). Динамически симметричное твердое тело: $I_1 = I_2 = I_0$; тогда равенство (2.3) выполняется при $b_1 = b_2 = b$; значения I_3, b_3 произвольны $(I_3 \leqslant 2I_0)$; в частности, при $I_0 b^{-1} = I_3 b_3^{-1}$ вектор z_i коллинеарен вектору угловой скорости $\omega_i : z_i = I_0 b^{-1} \omega_i$; (см. [4, 8]).

3). В случае сферически симметричного твердого тела $(I_1 = I_2 = I_3 = = I_0)$ соотношение (2.3) справедливо для любых значений b_1, b_2, b_3 [4, 8].

Итак, если условие (2.3) выполняется, то синтез оптимального торможения вращений твердого тела имеет вид (1.3)

$$(2.4) \qquad u_i^* = -z_i z^{-1}, \quad z = (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)^{1/2},$$

$$T_0^* = z_0, \quad z_0^* = z_0 (1 - t / T_0^*)$$

Оптимальная траектория $z_i(t)$ может быть построена на основе известного неуправляемого движения твердого тела [4, 8, 9, 10]. Свободное вращение в общем случае 1) выражается при помощи эллиптических функций [9]. Действительно, пусть ω_i° — общее решение системы (2.1) при $M_i \equiv 0$

$$(2.5) \qquad L_i^\circ = I_i \omega_i^\circ, \quad \omega_i^\circ = \omega_i^\circ (t + \tau, L^\circ, E^\circ)$$

Здесь ω_i° — 2π-периодические функции фазы $\psi = \Omega(t + \tau)$; частота Ω зависит от постоянных модуля кинетического момента L° и энергии E°. Значения этих параметров и фазовой постоянной τ определяются начальными условиями (2.1).

Решение управляемой системы (2.1) при $u_i = u_i^*$ (см. (2.5)) имеет вид $L_i = zl_i$, где функции l_i удовлетворяют системе

$$\frac{dl_1}{ds} + \frac{I_3 - I_2}{I_2 I_3} l_2 l_3 = 0, \quad l_1(0) = \frac{L_{10}}{z_0} \quad (1, 2, 3)$$

$$s = \int_0^t z\, dt' = z_0 t \left(1 - \frac{t}{2T_0^*}\right)$$

В результате для оптимальной траектории на основе (2.5) получается выражение

$$(2.6) \qquad L_i = zL_i^\circ (s + \theta, L^\circ z_0^{-1}, E^\circ z_0^{-2}) \quad (i = 1, 2, 3), \ \theta = \mathrm{const}$$

Отметим, что все составляющие вектора кинетического момента (2.6), а также скорость изменения фазы ψ обращаются в нуль одновременно при $z = 0$, т. е. в момент времени $t = T_0^*$ [4, 8, 10].

3. Построение приближенного оптимального управления методом динамического программирования. Решение задачи синтеза оптимальной по быстродействию стабилизации возмущенной системы (1.1) заключается в нахождении неотрицательной дифференцируемой функции Беллмана $T(y, \varepsilon)$, которая удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби [1] (уравнению Беллмана [3]) с краевым условием

$$\frac{\partial T}{\partial y}[f_0(y) + \varepsilon f(y)] + \min_{u^2 \leqslant 1}\left\{\frac{\partial T}{\partial y}[I + \varepsilon F(y)]\,u\right\} = -1, \quad T(0, \varepsilon) \equiv 0 \tag{3.1}$$

Здесь $\partial T / \partial y$ — вектор-строка, а выражение $\partial T / \partial y \; f_0$ и аналогичные — скалярные произведения. Минимизация выражения в фигурной скобке (3.1) приводит к замкнутой задаче Коши

$$\frac{\partial T}{\partial y}[f_0(y) + \varepsilon f(y)] - \left|\frac{\partial T}{\partial y}[I + \varepsilon F(y)]\right| = -1, \quad T(0, \varepsilon) \equiv 0 \tag{3.2}$$

и выражению для оптимального управления

$$u^* = -(I + \varepsilon F')\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)'\left|\frac{\partial T}{\partial y}(I + \varepsilon F)\right|^{-1} \tag{3.3}$$

Решение задачи (3.2) строится в виде разложения

$$T(y, \varepsilon) = T_0(y) + \varepsilon T_1(y) + \ldots + \varepsilon^j T_j(y) + \ldots, \tag{3.4}$$
$$T_j(0) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots$$

Здесь неизвестные коэффициенты T_j могут, как и функции f, F (см. п. 1), непрерывно зависеть от параметра ε. Эта зависимость не указывается. Функции $T_j(y)$ находятся последовательным решением зацепляющейся системы уравнений в частных производных [4, 8]

$$\frac{\partial T_0}{\partial y} f_0(y) - \left|\frac{\partial T_0}{\partial y}\right| = -1, \qquad T_0(0) = 0 \tag{3.5}$$
$$\frac{\partial T_j}{\partial y} f_0(y) - \frac{\partial T_j}{\partial y}\left(\frac{\partial T_0}{\partial y}\right)'\left|\frac{\partial T_0}{\partial y}\right|^{-1} = V_j(y), \quad T_j(0) = 0, \quad j \geqslant 1$$

Функции V_j в (3.5) становятся известными в результате решения префыдущих уравнений, так как на любом j-м шаге они вычисляются через дункции, вычисленные на предыдущих шагах, т. е. f, F и $\partial T_0 / \partial y$, $\partial T_1 / \partial y, \ldots, \partial T_{j-1} / \partial y$; например, при $j = 1$

$$V_1(y) = \frac{\partial T_0}{\partial y} F'\left(\frac{\partial T_0}{\partial y}\right)'\left|\frac{\partial T_0}{\partial y}\right|^{-1} - \frac{\partial T_0}{\partial y} f \tag{3.6}$$

Для произвольных значений индекса $j = 1, 2, \ldots$ функции $V_j(y)$ определяются соотношениями

$$V_j = W_j - \frac{\partial T_{j-1}}{\partial y} f, \quad W_j = W_j\left(F, \frac{\partial T_0}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial T_{j-1}}{\partial y}\right) \tag{3.7}$$
$$\left|\frac{\partial T}{\partial y}(I + \varepsilon F)\right| = \left[\frac{\partial T}{\partial y}(I + \varepsilon F)(I + \varepsilon F')\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)'\right]^{1/2} =$$
$$= \left|\frac{\partial T_0}{\partial y}\right| + \varepsilon\left[\frac{\partial T_1}{\partial y}\left(\frac{\partial T_0}{\partial y}\right)'\left|\frac{\partial T_0}{\partial y}\right|^{-1} + W_1\right] + \ldots +$$
$$+ \varepsilon^j\left[\frac{\partial T_j}{\partial y}\left(\frac{\partial T_0}{\partial y}\right)'\left|\frac{\partial T_0}{\partial y}\right|^{-1} + W_j\right] + \varepsilon^{j+1}\ldots$$

На основе выражений (1.3) из определения функции Беллмана T [3] следует, что $T_0(y) = h = |y|$ — решение первой задачи Коши (3.5), т. е. T_0 — функция Беллмана невозмущенной задачи оптимальной по быстродействию стабилизации. Так как $|\partial T_0 / \partial y| = 1$, то проведенные выше формальные разложения (3.4)—(3.7) справедливы для достаточно малых значений параметра ε. Функция T_0 определяет оптимальное управление в виде синтеза u^* (3.3) с погрешностью $O(\varepsilon)$: $u_0^* = -\eta$ (см. п. 1, (1.4)).

Решения задач Коши (3.5) для $j \geqslant 1$ проводятся последовательно методом характеристик [11, 12] аналогично [4, 8]. Уравнения характеристик приводятся к виду

$$(3.8) \qquad \frac{dy_1}{f_{01}(y)-\eta_1} = \ldots = \frac{dy_n}{f_{0n}(y)-\eta_n} = \frac{dT_j}{V_j(y)} = \frac{dh}{-1}$$

Пусть известна функция y^* — общее решение системы (3.8) вида (c — общий интеграл)

$$(3.9) \qquad y^* = y^*(h, y_0), \quad y^*(h_0, y_0) = y_0, \quad |y^*(h_0, y_0)| = h_0$$
$$(c = C(y), \quad c' = (c_1, \ldots, c_{n-1}))$$

Тогда искомые решения находятся квадратурами

$$(3.10) \qquad T_j(y) = -\int_0^h V_j(y^*(l, y^*(h, y)))\,dl, \qquad h = |y|, \qquad j = 1, 2, \ldots$$
$$(y^*(h, y) \equiv y)$$

Таким образом, для вычисления коэффициентов T_j (3.10) разложения (3.4) необходимо уметь строить общее решение невозмущенной управляемой системы (1.1) с $u = u_0^* = -\eta$ (см. п. 2, 4, 5).

Для обоснования развитого в п. 3 метода построения приближенного решения уравнения (3.2) с заданным граничным условием нужно рассмотреть задачу о приведении фазовой точки системы (1.1) в μ-окрестность начала координат $y = 0$ за минимальное время, а затем перейти к пределу при $\mu \to 0$. В результате предельного перехода получаются выражения для коэффициентов разложения (3.4), совпадающие с (3.10).

Вектор-функция оптимального управления $u^*(y, \varepsilon)$ (3.3) может быть представлена в виде разложения, аналогичного (3.4)

$$(3.11) \qquad u^*(y, \varepsilon) = -\eta + \varepsilon u_1^* + \ldots + \varepsilon^j u_j^* + \varepsilon^{j+1} \ldots \equiv$$
$$\equiv -\eta + \varepsilon u_{(1)}^*(y, \varepsilon)$$

Здесь коэффициенты $u_j^*(y)$ определяются через производные функций $T_j(y)$ после подстановки выражения (3.4) в (3.3) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε. В частности, для $j = 1$ получим (см. (3.7))

$$(3.12) \qquad u_1^{*\prime}(y) = \eta' \left(\frac{\partial T_1}{\partial y}\eta - \eta\frac{\partial T_1}{\partial y}\right) + U_1'(y), \qquad U_1' = \eta'(W_1 - F)$$

Для произвольного значения $j \geqslant 1$ функции $u_j^*(y)$ равны

$$(3.13) \qquad u_j^{*\prime}(y) = \eta'\left(\frac{\partial T_j}{\partial y}\eta - \eta\frac{\partial T_j}{\partial y}\right) + U_j'(y)$$

Здесь функции $U_j(y)$ определяются аналогично функциям W_j в (3.7) и зависят от F, $\partial T_0 / \partial y = \eta'$, $\partial T_1 / \partial y, \ldots, \partial T_{j-1} / \partial y$.

Замечание. Если порождающее решение (3.9) в аналитической форме не известно, то алгоритм приближенного вычисления функции Беллмана может быть реализован следующим образом. Коэффициенты T_j (3.10) находятся для достаточно плотного множества точек y_k: $y_{i1}, \ldots, y_{ik_i}, \ldots, y_{iN_i} = h_0$. Здесь первый индекс $i = 1, 2, \ldots, n$ — номер компоненты вектора y, второй индекс k_i означает номер точки разбиения, а N_i — количество точек разбиения интервала изменения i-й координаты. Далее вычисляется функция y_* — семейство решений задачи Коши для невозмущенной управляемой системы

$$y^{\cdot} = f_0(y) - \eta, \quad y(0) = y_k \quad (k = (k_1, \ldots, k_n), \ 1 \leqslant k_i \leqslant N_i) \tag{3.14}$$

При численном интегрировании это семейство также известно на дискретном множестве точек аргумента $t \in [0, h_k]$

$$y_{lk} = y_*(t_l, y_k), \qquad l = 1, \ldots, N(k), \ h_k = |y_k|$$

Так как $h_l = h_k - t_l$, то искомое семейство функций $y^*(h, y)$ (3.9), заданное на дискретном множестве точек h_l, имеет вид

$$y_{lk} = y_*(h_k - h_l, y_k) \equiv y^*(h_l, y_k), \quad 0 \leqslant h_l \leqslant h_k$$

Наконец, интегрируя, согласно (3.10), функции $V_j(y^*(h_l, y_k))$ дискретного аргумента h_l, зависящие от дискретного векторного параметра y_k, получим коэффициенты $T_j(y_k)$, заданные на достаточно плотном множестве точек $|y_k| \leqslant h_0$. Интегрирование может проводиться методом прямоугольников или при помощи другой, более точной схемы. Приближенное вычисление управлений $u^*(y, \varepsilon)$ (3.11) по формулам (3.12), (3.13) может быть проведено дискретным дифференцированием (конечными разностями) или другим способом, связанным с решением системы в вариациях для задачи (3.14).

Аналогичный алгоритм приближенного синтеза, основанный на методе динамического программирования, можно построить для дискретных систем оптимального управления, наиболее удобных для реализации на ЭВМ. Однако эта задача требует отдельного рассмотрения.

4. Построение приближенной оптимальной траектории. После подстановки оптимального управления $u^*(y, \varepsilon)$ (3.11) в (1.1) получается замкнутая задача Коши для определения оптимальных фазовых траекторий $y = y(t, y_0, \varepsilon)$, которые могут быть построены в виде разложений или последовательными приближениями по степеням параметра ε. Пусть известно общее решение (1.3) невозмущенной управляемой системы (1.1) (в частности, для системы (2.1) это функции L_i (2.6)) или полная система интегралов типа (3.9). Тогда возмущенная оптимальная траектория или оскулирующие переменные (интегралы) c и «фаза» ψ могут быть определены в виде квадратур с такой же точностью по ε, с какой найдена вектор-функция управления $u^*(y, \varepsilon)$ (3.11).

Итак, решение невозмущенной управляемой системы $y_0^*(t, y_0)$, $y_0^*(0, y_0) = y_0$ известно. Решение возмущенной системы (1.1) строится в виде $y = y_0^* + \varepsilon x(t, \varepsilon)$. Неизвестный вектор x определяется как решение задачи Коши

$$x^{\cdot} = \left(\frac{\partial f_0}{\partial y_0^*} h_0^* - I + \eta_0\eta_0'\right)\frac{x}{h_0^*} + f^* - F^*\eta_0 + \overset{*}{u}_{(1)} + \varepsilon P(t, x) \tag{4.1}$$

$$f^*(t) \equiv f(y_0^*), \quad F^*(t) \equiv F(y_0^*), \ldots, \eta_0(t) = y_0^*/h_0^*, \quad x(0, \varepsilon) \equiv 0$$

Здесь, как и раньше, зависимость от ε функций f, F, $u_{(1)}^*$, P не указывается; функция P известна с нужной степенью точности. Решение квазилинейной системы (4.1) строится последовательными приближениями по схеме [12]

$$x_k(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon X(t) \int_0^t X^{-1}(t') P(t', x_{k-1}(t', \varepsilon))\, dt' \tag{4.2}$$

$$x_0(t) = X(t) \int_0^t X^{-1}(t')(f^* - F\overset{*}{\eta}_0 + \overset{*}{u}_{(1)})\, dt', \quad k = 1, 2, \ldots, j-1$$

Здесь $X(t) = \partial y_0^* / \partial y_0$ — известная фундаментальная матрица решений невозмущенной системы (4.1). Последовательные приближения x_k (4.2) при достаточно малых значениях $|\varepsilon|$ определяют единственное решение системы (4.1) $x^*(t, \varepsilon)$ с погрешностью $O(\varepsilon^j)$, а $y^*(t, \varepsilon) = y_0^*(t, y_0) + \varepsilon x^*(t, \varepsilon)$ — возмущенная оптимальная траектория системы, определенная с такой же погрешностью $O(\varepsilon^{j+1})$, с какой вычислена управляющая функция $u^*(y, \varepsilon)$ (3.11).

К квадратурам, аналогичным (4.2), приводится решение задачи построения возмущенных интегралов типа (3.9), описываемых уравнениями ($\psi = \sigma(y) = t + \tau$ — интеграл, зависящий от времени)

$$c^\cdot = \varepsilon \frac{\partial C}{\partial y^\circ} \varphi(y^\circ), \quad \psi^\cdot = 1 + \varepsilon \frac{\partial \sigma}{\partial y^\circ} \varphi(y^\circ), \quad c(0) = C(y_0), \quad \psi(0) = \sigma(y_0) \tag{4.3}$$

$$c = C(y), \quad \psi = \sigma(y), \quad y = y^\circ(c, \psi), \quad \varphi = f + Fu^* + u_{(1)}^*$$

Приближенное решение системы (4.3) строится последовательными приближениями по схеме типа (4.2) [12]

$$c_k = C(y_0) + \varepsilon \int_0^t \frac{\partial C_{k-1}}{\partial y^\circ} \varphi(y^\circ(c_{k-1}, \psi_{k-1}))\, dt', \quad c_0 = C(y_0) \tag{4.4}$$

$$\psi_k = t + \sigma(y_0) + \varepsilon \int_0^t \frac{\partial \sigma_{k-1}}{\partial y^\circ} \varphi(y^\circ(c_{k-1}, \psi_{k-1}))\, dt', \quad \psi_0 = t + \sigma(y_0)$$

Таким образом, проведенные выше построения сводятся к квадратурам, если известно общее решение $y_0^*(t, y_0)$ невозмущенной управляемой системы (1.1). Следует заметить (это показано, в частности, в п. 2 для уравнений Эйлера (2.1)), что для некоторых важных прикладных задач общее решение управляемой системы

$$y^\cdot = f_0(y) - \eta, \quad y(0) = y_0 \tag{4.5}$$

можно найти на основе известного неуправляемого движения $v = v(t, a, h_0)$, удовлетворяющего системе с инвариантной нормой [1]

$$v^\cdot = f_0(v), \quad v(0) = y_0, \quad a = (a_1, \ldots, a_{n-1}), \quad |v| = h_0$$

Действительно (см. п. 2), подстановкой $y = h_0^* w$, где w — неизвестная вектор-функция, система (4.5) приводится к виду

$$w^\cdot = f_0(h_0^* w) / h_0^*, \quad w(0) = y_0 h_0^{-1}, \quad |w| = 1 \tag{4.6}$$

Пусть $f_0(y)$ — однородная функция y степени $m \geqslant 1$, т. е. $f_0(\gamma y) =$

$= \gamma^m f_0(y)$. Тогда система уравнений (4.6) принимает вид

$$\frac{dw}{ds} = f_0(w), \quad s = \frac{1}{m}(h_0^m - h_0^{*m}), \quad w|_{s=0} = y_0 h_0^{-1}$$

В результате для y_0^* получено выражение

$$y_0^*(t, y_0) = h_0^*(t, h_0) v(s, a, 1), \quad v(0, a, 1) = y_0 h_0^{-1} \tag{4.7}$$

Здесь v — известная, по предположению, функция, описывающая неуправляемое движение. В п. 2 рассмотрен частный случай системы с инвариантной нормой, для которой $m = 2$.

5. Торможение вращений твердого тела с учетом возмущающих моментов. Исследуется приближенное решение задачи оптимальной по быстродействию стабилизации твердого тела, близкого к динамически симметричному, с учетом возмущающего момента сил вязкого трения [4, 8]. Предполагается, что параметры системы (2.1) равны

$$I_{1,2} = I_0(1 + \varepsilon\varkappa_{1,2}), \quad b_{1,2} = b_0(1 + \varepsilon\beta_{1,2}) \tag{5.1}$$

$$M_i = b_i u_i - \varepsilon \sum_{j=1}^{3} \Lambda_{ij}\omega_j \quad (i = 1, 2, 3), \quad I_3 \neq I_0$$

Здесь ε ($|\varepsilon| \ll 1$) — малый числовой параметр; $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, β_1, β_2 — постоянные числа, величина которых порядка единицы; $(\varepsilon\Lambda_{ij})$ — тензор возмущающего момента сил вязкого трения (неотрицательно-определенная постоянная матрица). При $\varepsilon = 0$ решение задачи оптимального по быстродействию торможения равно

$$u_i^* = -x_i h^{-1}, \quad T_0(x) = h = |x| \tag{5.2}$$

$$x_i = I_i\omega_i b_i^{-1}, \quad h_0^* = h_0(1 - t / T_0^*), \quad T_0^* = h_0, \quad h_0 = |x_0|$$

Оптимальная фазовая траектория имеет вид (см. п. 2 и (4.7))

$$x_1 = h_0^* v_1 = (1 - t|T_0^*)|x_{0\perp}|\cos(s^\circ + \tau), \quad \cos\tau = x_{10}|x_{0\perp}|^{-1} \tag{5.3}$$

$$x_2 = h_0^* v_2 = (1 - t / T_0^*)|x_{0\perp}|\sin(s^\circ + \tau), \sin\tau = x_{20}|x_{0\perp}|^{-1}$$

$$x_3 = h_0^* v_3 = (1 - t / T_0^*) x_{30}, \quad s^\circ = dx_{30} t(1 - t / (2T_0^*))$$

$$d = (I_3 - I_0) b_3 / (I_0 I_3)$$

Оптимальное управление как функция времени получается на основе выражений (5.2), (5.3)

$$u_1^*[t] = -|x_{0\perp}| h_0^{-1}\cos(s^\circ + \tau), \quad u_2^*[t] = \tag{5.4}$$

$$= -|x_{0\perp}| h_0^{-1}\sin(s^\circ + \tau), \; u_3^*[t] = -x_{30} h_0^{-1}$$

При $\varepsilon \neq 0$ система (2.1), (5.1) приводится к виду (1.1) [4, 8]

$$x_1^\cdot + dx_2 x_3 = u_1 + \varepsilon\varphi_1(x) + \varepsilon a_1 x_2 x_3, \quad x_{10} = I_1\omega_{10} b_1^{-1} \tag{5.5}$$

$$x_2^\cdot - dx_1 x_3 = u_2 + \varepsilon\varphi_2(x) + \varepsilon a_2 x_1 x_3, \; x_{20} = I_2\omega_{20} b_2^{-1}$$

$$x_3^\cdot = u_3 + \varepsilon\varphi_3(x) + \varepsilon a_3 x_1 x_2, \quad x_{30} = I_3\omega_{30} b_3^{-1}$$

Здесь φ_i — преобразованные компоненты возмущающего момента сил вязкого трения (без множителя ε)

$$\varphi_i(x) = -\sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij} x_j, \quad \lambda_{ij} = \Lambda_{ij} I_j^{-1} b_i^{-1} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Постоянные a_i определяются соотношениями

$$\varepsilon a_1 = d - \frac{I_3 - I_2}{I_2 I_3}\frac{b_2 b_3}{b_1}, \quad \varepsilon a_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_1 I_3}\frac{b_1 b_3}{b_2} \quad \varepsilon a_3 = -\frac{I_2 - I_1}{I_1 I_2}\frac{b_1 b_2}{b_3}$$

Построим решение задачи оптимального синтеза первого приближения: $T(x, \varepsilon) = h + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 \ldots$. Согласно (3.6), функцию $V_1(x)$, участвующую в определении коэффициента $T_1(x)$ (3.10), можно разбить на два слагаемых: $V_1 = V_{1G} + V_{1F}$, обусловленных возмущениями гироскопических моментов и силами трения соответственно

$$V_{1G}(x) = \frac{x_1 x_2 x_3}{h}\sum_{i=1}^{3} a_i, \quad V_{1F}(x) = \frac{1}{h}\sum_{i,\,j=1}^{3} \lambda_{ij} x_i x_j \tag{5.6}$$

В результате для T_{1G} $(T_1 = T_{1G} + T_{1F})$ получим [4, 8]

$$\begin{gathered} T_{1G}(x) = -{}^1/_2(a_1 + a_2 + a_3)x_3 h^{-3}\{[(x_2^2 - x_1^2)\cos\theta + \\ + 2x_1x_2\sin\theta]\int_0^h l^2 \sin\beta l^2\,dl + [2x_1x_2\cos\theta - \\ - (x_2^2 - x_1^2)\sin\theta]\int_0^h l^2\cos\beta l^2 dl\}, \quad \theta = dx_3 h, \quad \beta = dx_3 h^{-1} \end{gathered} \tag{5.7}$$

Это выражение при $x_{30} \neq 0$ приводится к интегралам Френеля [13]. При выводе формулы (5.7) используется известное выражение для решения вида (3.9)

$$\begin{gathered} x_1 = h(\eta_{10}\cos s_0 - \eta_{20}\sin s_0), \quad x_2 = h(\eta_{10}\sin s_0 + \eta_{20}\cos s_0) \\ x_3 = h\eta_{30} \quad (s_0 = {}^1/_2 dh^2\eta_{30}, \quad \eta_0 = x_0 h_0^{-1}) \end{gathered} \tag{5.8}$$

Далее подстановкой (5.8) в (3.10) для T_{1F} на основании (5.6) получается конечное выражение

$$T_{1F}(x) = \sum_{i,\,j=1}^{3} \lambda_{ij}\alpha_{ij}(x, \eta_0), \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \int_0^h x_i(l, \eta_0)\,x_j(l, \eta_0)\frac{dl}{l} \tag{5.9}$$

После интегрирования в (5.9) подставляются выражения для компонент вектора η_0, получаемых на основании (5.8)

$$\begin{gathered} \eta_{10} = \eta_1\cos s + \eta_2\sin s, \quad \eta_{20} = \eta_2\cos s - \eta_1\sin s \\ \eta_{30} = \eta_3, \quad s = {}^1/_2 dh^2\eta_3 \end{gathered} \tag{5.10}$$

Коэффициенты $\alpha_{ij}(x, \eta_0)$ в (5.9) определяются явно, например

$$\alpha_{11} = (\eta_{10}^2 + \eta_{20}^2)\frac{h^2}{4} + \frac{\eta_{10}^2 - \eta_{20}^2}{4d\eta_{30}}\sin 2s_0 - \frac{\eta_{10}\eta_{20}}{2d\eta_{30}}(1 - \cos 2s_0) \tag{5.11}$$

Если величина η_{30} мала ($|\eta_{30}| \ll 1$), то в линейном приближении по η_{30} и кубическом по h формулы (5.7), (5.11) значительно упрощаются

$$T_{1G} = -\frac{x_1x_2x_3}{3}\sum_{i=1}^{3} a_i + O(\eta_{30}^2), \quad T_{1F} = -\frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{3}\lambda_{ij}x_ix_j + O(\eta_{30}h^4) \tag{5.12}$$

Далее на основании известного выражения для коэффициента $T_1(x)$ по формуле (3.12) вычисляется вектор-функция u_1^*, определяющая синтез оптимального управления $u^* = -\eta + \varepsilon u_1^*$ в первом приближении по ε, т. е. с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ по функционалу и фазовой траектории. Фазовая траектория первого приближения находится квадратурами (4.2) при помощи известного общего решения x_i (5.3) невозмущенной системы (5.5). Следует отметить, что момент сил трения приводит к уменьшению времени быстродействия T [4, 8].

Таким образом, развитая выше методика позволяет приближенно решать в квадратурах задачи оптимальной по быстродействию стабилизации возмущенных систем вида (1.1), (1.2). Для ее применения необходимо уметь строить общее решение невозмущенной управляемой системы с инвариантной нормой, а в ряде важных прикладных случаев достаточно знать только неуправляемое движение.

Отметим, что предлагаемый подход позволяет решать задачу синтеза для систем более общего вида, чем (1.1); например

$$x^{\cdot} = f_0(t, x) + \varepsilon f(t, x) + b(t, h)[S(t, x) + \varepsilon F(t, x)]\, u$$
$$x(t_0) = x_0, \quad h = |x|, \quad |u| \leqslant 1$$

Здесь f_0, f — вектор-функции, b — скалярная функция, S — ортогональная матрица. Все функции предполагаются достаточно гладкими в рассматриваемой области изменения аргументов. Относительно функции f_0 допускается более общее предположение, чем (1.2) (см. [1, 8]): $\eta' f_0(t, x) = \varphi(t, h)$. В частности, для невозмущенной управляемой системы с инвариантной нормой $\varphi \equiv 0$.

Поступила 29 IX 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. М., «Машиностроение», 1968.
2. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
3. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. М., «Наука», 1969.
4. *Акуленко Л. Д., Рощин Ю. Р.* Оптимальное по быстродействию торможение вращений твердого тела управлениями, ограниченными эллипсоидом. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1.
5. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М., «Наука», 1965.
6. *Черноусько Ф. Л.* Некоторые задачи оптимального управления с малым параметром. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
7. *Альбрехт Э. Г.* Об управлении движением нелинейных систем. Дифференциальные уравнения, 1966, т. 2, вып. 3.
8. *Акуленко Л. Д.* Приближенный синтез оптимальных по быстродействию управлений в задачах, близких к сферически-симметричным. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 2.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика, т. 1. М., «Наука», 1965.
10. *Смольников Б. А.* Обобщение эйлерова случая движения твердого тела. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
11. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Наука», 1964.
12. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. Изд-во МГУ, 1971.
13. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.