Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 62—50

ОБ УПРАВЛЕНИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

С. П. Охезин

(Свердловск)

Рассматривается задача об управлении гиперболической системой по принципу обратной связи в условиях неопределенности или конфликта. Задача интерпретируется как позиционная дифференциальная игра [1–3] в подходящем функциональном пространстве. Управляющие воздействия входят в краевые условия, причем механизм выработки этих воздействий описывается обыкновенным дифференциальным уравнением. В основе построений лежит подход к задачам позиционного управления в системах с распределенными параметрами, развитый в [4–8]. Как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений [1–3], указывается класс стратегий, доставляющих решение рассматриваемых задач.

1. Пусть Ω — ограниченное связное открытое множество в евклидовом пространстве R_n, Γ — граница Ω — многообразие размерности $n-1$.

Рассматривается конфликтно-управляемая система

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = Ay(t,x) + g(t,x) \text{ в } Q = (t_0, \vartheta) \times \Omega \tag{1.1}$$

$$y(t_0, x) = y_0(x), \quad \frac{\partial y(t_0,x)}{\partial t} = y_1(x) \text{ в } \Omega$$

$$(y_0 \in H^1(\Omega), \ y_1 \in L_2(\Omega))$$

$$\frac{\partial y(t,x)}{\partial \nu} + \sigma(x) y(t,x) = \alpha(x) w(t) \text{ в } \Sigma = (t_0, \vartheta) \times \Gamma$$

$$(\alpha(x) = \{\alpha_i(x)\}, \ \alpha_i(\cdot) \in L_2(\Gamma), \ t = 1, \ldots, m)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = f(t, w) + B(t) u - C(t) v; \ w(t_0) = w_0 \tag{1.2}$$

$$Ay = \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j}\right) + a(x) y$$

Здесь $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ — непрерывно дифференцируемые на $\overline{\Omega}$ функции, причем существует постоянная $\nu > 0$, такая, что для любых $x \in \Omega$, $\xi_i \in R_1$, $i = 1, \ldots, n$ выполняется неравенство

$$\nu(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2) \leqslant \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j$$

где $a(x)$ — непрерывная на $\overline{\Omega}$ функция. $H^1(\Omega)$ — пространство Соболева первого порядка на множестве Ω [9], $L_2(\Omega)$ — пространство (классов) функций, суммируемых с квадратом на Ω (по Лебегу). Будем считать, что граница Γ области Ω такова, что элементы пространства $H^1(\Omega)$ имеют следы на Γ из $L_2(\Gamma)$ и для них верна формула интегрирования по частям и теорема о компактности вложения $H^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и в $L_2(\Gamma)$ (см., например, [9–11]), $g \in L_2(Q)$ — заданное возмущение, w — m-мерный фазовый вектор системы (1.2), $\sigma(\cdot)$ — измеримая, ограниченная на Γ функция. Ради несущественных упрощений будем считать (см. [10–12]), что $\sigma \geqslant 0$, $a \leqslant 0$, $\sigma^2 + a^2 \not\equiv 0$ на Γ. Функция в правой части уравнения (1.2) предполагается непрерывной по всем аргументам, удовлетворяющей условию Липшица по w в каждой ограниченной области пространства R_m и условию равномерной продолжимости решений $w(t)$ для $t \geqslant t_0$ при всяком выборе

$$u(t) \in P(t), \quad v(t) \in Q(t) \tag{1.3}$$

где $P(t)$, $Q(t)$ — выпуклые компакты в евклидовых пространствах R_{l_1} и R_{l_2} соответственно, измеримые и равноограниченные по $t \in [t_0, \vartheta]$; $B(t)$, $C(t)$ — непрерывные матрицы соответствующих размерностей.

В пространстве $R_1 \times H^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ задано замкнутое множество M. Требуется построить такой способ выбора управления u (управления v) по принципу обратной связи, вырабатывающий измеримые на $[t_0, \vartheta]$ по Лебегу реализации $u[t]$ ($v[t]$), удовлетворяющие (1.3), что, каков бы ни был закон формирования измеримых реализаций $v[t] \in Q(t)$ ($u[t] \in P(t)$), выполняется условие $\{t, y(t, \cdot), \partial y(t, \cdot) / \partial t\} \in M$ для некоторого $t \in [t_0, \vartheta]$ ($\{t, y(t, \cdot), \partial y(t, \cdot) / dt\} \notin M$ для всех $t \in [t_0, \vartheta]$).

Замечание 1.1. Гладкость обобщенных решений системы (1.1) (см. [9–12]) существенно зависит от гладкости краевых условий в Σ. Практический интерес представляют обобщенные решения из так называемых «энергетических» классов (см. [11]). Введение в систему (1.1) обыкновенного дифференциального уравнения есть один из возможных вариантов получения нужной гладкости обобщенных решений. С механической точки зрения задачу можно рассматривать как задачу получения оптимального возмущенного состояния колеблющегося тела Ω в условиях неопределенной помехи посредством механического воздействия $\alpha(x)\, w(t)$, распределенного на границе тела Γ. При этом считается, что закон изменения воздействия w описывается обыкновенным дифференциальным уравнением.

Уточним постановку задач. Пусть $\{P; q\}$ — совокупность всех измеримых на множестве q функций $u(t) \in P(t)$. Состоянием системы (1.1), (1.2) будем называть вектор $r = \{w, y_1, y_2\}$, где $w \in R_m$, $y_1 \in H^1(\Omega)$, $y_2 \in L_2(\Omega)$. Пары $\{t, r\}$, $t \in [t_0, \vartheta]$ будем называть позициями. Стратегией U (V) первого (второго) игрока назовем правило, ставящее в соответствие каждой тройке $\{t_1, t_2, r\}$, где $t_0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \vartheta$, $r = \{w, y_1, y_2\}$, непустое множество

$$U(t_1, t_2, r) \subset \{P; [t_1, t_2)\} \quad (V(t_1, t_2,) \subset \{Q; [t_1, t_2)\})$$

Рассмотрим систему, сопряженную системе (1.1).

Когда $\varphi(t, x)$ пробегает пространство $L_2(Q)$ (см. [9, 11]), решение сопряженной системы (см. [9, 11, 12]) пробегает множество X, которое наделим топологией, вносимой отображением $\varphi \to z(\cdot, \cdot; \varphi)$, где $z(\cdot, \cdot, \varphi)$ — решение сопряженной системы.

Пусть Δ — разбиение отрезка $[t_0, \vartheta]$ точками τ_i, $i = 1, \ldots, m(\Delta)$ $(\tau_{i+1} > \tau_i,\ \tau_1 = t_0,\ \tau_{m(\Delta)} = \vartheta)$, $\delta(\Delta) = \max_i(\tau_{i+1} - \tau_i)$. Пару $\{y(t, \cdot)_\Delta, \partial y(t, \cdot)_\Delta / \partial t\} = \{y(t, x;\ t_0, w_0, y_0, y_1, U)_\Delta,\ y_t'(t, x;\ t_0, w_0, y_0, y_1, U)_\Delta\}$, $x \in \Omega$ назовем движением системы (1.1) из позиции $\{t_0, w_0, y_0, y_1\}$, отвечающим стратегии U и разбиению Δ, если

$$y(t, \cdot)_\Delta \in C^\circ([t_0, \vartheta];\ H^1(\Omega)) \cap C^1([t_0, \vartheta];\ L_2(\Omega)) \tag{1.4}$$

$$\int_{t_0}^{\vartheta}\int_\Omega y(t, x)_\Delta \left(\frac{\partial^2\varphi(t, x)}{\partial t^2} - A\varphi(t, x)\right) dx\,dt = \int_{t_0}^{\vartheta}\int_\Omega g(t, x)\varphi(t, x)\,dx\,dt - \tag{1.5}$$
$$-\int_\Omega y_0(x)\frac{\partial\varphi(t_0, x)}{\partial t}dx + \int_\Omega y_1(x)\varphi(t_0, x)\,dx +$$
$$+\int_{t_0}^{\vartheta}\int_\Gamma \alpha(x)w(t)\varphi(t, x)\,d\Gamma\,dt, \quad \forall\varphi \in X$$

Здесь $w(t)$ — решение интегрального уравнения

$$w(t) = w_0 + \int_{t_0}^{t}\{f(\tau, w(\tau)) + B(\tau)u(\tau) - C(\tau)v(\tau)\}\,d\tau \tag{1.6}$$

причем на $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ управление $u(\cdot) \in U(\tau_i, \tau_{i+1}, w(\tau_i), y(\tau_i, \cdot)_\Delta, y_t'(\tau_i, \cdot)_\Delta)$, $v(\cdot) \in \{Q;\ [\tau_i, \tau_{i+1})\}$, $i = 1, \ldots, m(\Delta) - 1$; $y_t'(t, \cdot)_\Delta$ — производная по t от $y(t, \cdot)$ как элемента пространства $C^1([t_0, \vartheta];\ L_2(\Omega))$. Аналогично определяем движения $\{y(t, x;\ t_0, w_0, y_0, y_1, V)_\Delta,\ y_t'(t, x;\ t_0, w_0, y_0, y_1, V)_\Delta\}$. Здесь $C^k([t_0, \vartheta];\ X)$ — пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций на $[t_0, \vartheta]$ со значениями в пространстве X. Множество введенных движений не пусто.

Замечание 1.2. Существование функции $y(t, x)_\Delta \in L_2(Q)$, удовлетворяющей интегральному тождеству (1.5), вытекает из результатов работ [9,11]. Для доказательства того, что $y(\cdot, \cdot)_\Delta \in C^\circ([t_0, \vartheta];\ H^1(\Omega)) \cap C^1([t_0, \vartheta];\ L_2(\Omega))$, используется разложение решения (1.5) в ряд по собственным функциям спектральной задачи

$$A\omega = -\lambda\omega, \quad \partial\omega / \partial\nu_A + \sigma\omega|_\Gamma = 0$$

и оценки из работы [13].

Известно [10,11], что эта задача имеет решение из $H^1(\Omega)$ для счетного числа значений λ. Отметим, что при сделанных предположениях все $\lambda_j > 0$.

В пространстве $H^1(\Omega)$ вводится норма

$$\|h\|_1^2 = \int_\Omega \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial h}{\partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_i}\,dx - \int_\Omega a(x)h^2\,dx + \int_\Gamma \sigma h^2\,d\Gamma$$

эквивалентная норме пространства $H^1(\Omega)$ [10,11].

Исходные задачи формализуем следующим образом. Пусть M^ε — замкнутая ε-окрестность множества M в пространстве $R_1 \times H^1(\Omega) \times \times L_2(\Omega)$.

Задача 1 (задача сближения). Требуется построить стратегию U со свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется положительное число δ_0, такое, что для всех движений $\{y(t, x;\ t_0, w_0, y_0, y_1, U)_\Delta,\ y_t'(t, x;\ t_0, w_0, y_0, y_1, U)_\Delta\}$

выполняется включение $\{t,\ y\ (t,\ \cdot)_\Delta,\ y_t'\ (t,\ \cdot)_\Delta\} \in M^\varepsilon$ для некоторого $t \in [t_0, \vartheta]$, если только $\delta\ (\Delta) \leqslant \delta_0$.

Задача 2 (*задача уклонения*). Требуется построить стратегию V со свойством: найдется число $\varepsilon > 0$, найдется положительное число δ_0, такое, что для всех движений $\{y\ (t,\ x;\ t_0,\ w_0,\ y_0,\ y_1,\ V)_\Delta,\ y_t' \subset (t,\ x;\ t_0,\ w_0,\ y_0,\ y_1,\ V)_\Delta\}$, для всех $t \in [t_0, \vartheta]$ выполняется включение $\{t,\ y\ (t,\ \cdot)_\Delta,\ y'\ (t,\ \cdot)_\Delta\} \notin M$, если только $\delta\ (\Delta) \leqslant \delta_0$.

2. Справедлива следующая основная

Теорема 2.1 (*об альтернативе в игре сближения — уклонения*). Каковы бы ни были начальная позиция $\{t_0,\ w_0,\ y_0,\ y_1\}$, $w_0 \in R_m$, $\{y_0,\ y_1\} \in H^1\ (\Omega) \times L_2\ (\Omega)$, момент времени $\vartheta \geqslant t_0$ и замкнутое множество $M \subset R_1 \times H^1\ (\Omega) \times L_2\ (\Omega)$, справедливо одно и только одно из следующих утверждений:

1) существует стратегия U первого игрока, разрешающая для указанных данных задачу сближения;

2) существует стратегия V второго игрока, разрешающая для указанных данных задачу уклонения.

Рассмотрим основные конструкции, используемые для доказательства теоремы 2.1. Через H будем обозначать пространство

$$H = R_m \times H^1\ (\Omega) \times L_2\ (\Omega)$$

с нормой

$$\|\{w,\ y_0,\ y_1\}\|_H = (\|w\|^2_{R_m} + \|y_0\|^2_{H^1(\Omega)} + \|y_1\|^2_{L_2(\Omega)})^{1/2}$$

Определим множество M° как

$$M^\circ = \{\{t,\ w,\ y_1,\ y_2\} \in [t_0, \vartheta] \times H \mid \{t,\ y_1,\ y_2\} \in M\}$$

По аналогии с [1,4–8] введем понятие стабильных множеств. Пусть K_1 и K_2 — некоторые совокупности пар $\{t,\ h\}$, $t \in [t_0, \vartheta]$, $h \in H$. Скажем, что множество K_1 u-стабильно относительно множества K_2, если при всяком выборе пары $\{t_*,\ h_*\} \in K_1$, $h_* = \{w_*,\ y_*^1,\ y_*^2\}$, момента $t^* > t_*$ и управления $v\ (\cdot) \in \{Q;\ [t_*,\ t^*)\}$ найдется по крайней мере одно управление $u\ (\cdot) \in \{P;\ [t_*,\ t^*)\}$, такое, что для функции $r\ [t] = \{w\ [t],\ y\ [t,\ \cdot],\ y_t' \cdot [t,\ \cdot]\}$ справедливо включение

$$\{t^*,\ r\ [t^*]\} \in K_1, \quad \{\tau,\ r\ [\tau]\} \in K_2 \tag{2.1}$$

при некотором $\tau \in [t_*,\ t^*]$. Здесь $w\ [t]$ — решение уравнения (1.4) с начальным условием w_*, управлениями $u\ (\cdot)$ и $v\ (\cdot)$; $\{y\ [t,\ \cdot],\ y_t'\ [t,\ \cdot]\}$ — соответствующее движение системы (1.1) из позиции $\{t_*,\ w_*,\ y_*^1,\ y_*^2\}$ на отрезке $[t_*,\ t^*]$.

Аналогично вводится понятие v-стабильного множества.

Пусть K — произвольное множество в пространстве позиций $\{t,\ r\} \in [t_0, \vartheta] \times H$. Построим стратегию U^e первого игрока, которую назовем экстремальной к множеству K. Обозначим через J следующий функционал на пространстве $H \times H$:

$$J\ (r_1,\ r_2) = \langle w_1,\ w_2\rangle_{R_m} + \langle y_{11},\ y_{12}\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle y_{21},\ y_{22}\rangle_{H^{-1}(\Omega)}$$

$$J_0\ (r) = J\ (r,\ r) \quad (H^{-1}\ (\Omega) = (H^1\ (\Omega))^*;\ r_i = \{w_i,\ y_{1i},\ y_{2i}\})$$

Через $K(t)$ будем обозначать сечение множества K гиперплоскостью $\tau = t$.

Пусть выбрана некоторая тройка $\{t_*, t^*, r\}$, где $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$, $r = \{w, y_1, y_2\} \in H$. Если $K(t_*) \neq \phi$, то через $U^e(t_*, t^*, r)$ обозначим совокупность всех $u^e(\cdot) \in \{P; [t_*, t^*)\}$ со свойством:

1) найдется последовательность функций $u^{(n)}(\cdot) \in \{P; [t_*, t^*)\}$, сходящаяся слабо в пространстве $L_2([t_*, t^*); R_{l_1})$ к функции $u^e(\cdot)$;

2) найдется последовательность $r_n \in K(t_*)$, $r_n = \{w^n, z_1^n, z_2^n\}$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} J_0(r - r_n) = \inf\{J_0(r - r_\alpha) \mid r_\alpha \in K(t_*)\} \tag{2.2}$$

3) для каждого $n = 1, 2, \ldots$

$$\left\langle w - w^n, \int_{t_*}^{t^*} B(t)\, u^n(t)\, dt \right\rangle_{R_m} = \tag{2.3}$$

$$= \min\left\{\left\langle w - w^n, \int_{t_*}^{t^*} B(t)\, u(t)\, dt \right\rangle_{R_m} \mid u(\cdot) \in \{P; [t_*, t^*)\}\right\}$$

Множество $U^e(t_*, t^*, r)$ непусто, так как $\{P; [t_*, t^*)\}$ — слабо компактное в себе подмножество пространства $L_2([t_*, t^*); R_{l_1})$.

Аналогичным образом определяется экстремальная к множеству K^k стратегия V^e второго игрока.

Символом V_0 будем обозначать стратегии, полунепрерывные сверху по изменению r. Последнее означает, что, каковы бы ни были величины $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$, $r \in H$, из условий $r_k \to r$ в H, $v_k \to v$ слабо в $L_2([t_*, t^*); R_{l_2})$, $v_k \in V_0(t_*, t^*, r_k)$, вытекает включение $v \in V_0(t_*, t^*, r)$.

Под движением системы (1.1), (1.2), отвечающим стратегии $U(V)$ и разбиению Δ, будем понимать тройку $\{w[t]_\Delta, y[t, \cdot]_\Delta, y_t'[t, \cdot]_\Delta\}$, где пара $\{y[t, \cdot]_\Delta, y_t'[t, \cdot]_\Delta\}$ определяет движение системы (1.1), а $w[t]_\Delta$ определяется из (1.6).

Через $W(M^\circ)$ обозначим совокупность всех пар $\{t_*, r_*\} \in [t_0, \vartheta] \times H$, обладающих свойством: каковы бы ни были стратегия V_0, числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, существует по крайней мере одно движение $\{w[t; t_*, r_*, V_0]_\Delta$, $y[t, x; t_*, r_*, V_0]_\Delta$, $y_t'[t, x; t_*, r_*, V_0]_\Delta\}$, отвечающее разбиению Δ промежутка $[t_\Delta, \vartheta]$ с диаметром $\delta(\Delta) \leqslant \delta$, для которого в некоторый момент $t \in [t_*, \vartheta]$ выполняется включение

$$\{t, w[t]_\Delta, y[t, \cdot]_\Delta, y_t'[t, \cdot]_\Delta\} \in M^{\circ\varepsilon}$$

Здесь $M^{\circ\varepsilon}$ — замкнутая ε-окрестность множества M° в метрике $\|\{t, r\}\| = (t^2 + \|r\|_H^2)^{1/2}$.

Лемма 2.1. Множество $W(M^\circ)$ u-стабильно относительно множества M°.

Доказательство этой леммы проводится по схеме доказательства аналогичных утверждений из [1, 4-8].

Замечание 2.1. Так как пучок движений системы (1.1) в силу управлений u, v, удовлетворяющих (1.3), есть компакт в $C^\circ([t_0, \vartheta]; H^1(\Omega) \times$

$\times L_2(\Omega)$), не уменьшая общности, можно считать, что множество M — компакт в $R_1 \times H^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$.

Теорема 2.2. Задача 1 о сближении имеет решение тогда и только тогда, когда для начальной позиции $\{t_0, w_0, y_0, y_1\}$ выполняется условие

$$\{w_0, y_0, y_1\} \in W(M^\circ)(t_0) \tag{2.4}$$

При включении (2.4) решение задачи доставляет стратегия U^e, экстремальная к множеству $W(M^\circ)$.

Рассмотрим основные моменты доказательства этой теоремы.

Пусть $r^e[t]_\Delta = \{w[t]_\Delta, y[t, \cdot]_\Delta, y_t'[t, \cdot]_\Delta\}$ — движение системы (1.1), (1.2), отвечающее экстремальной стратегии U^e и выбранному $\Delta(\tau_i)$ разбиению отрезка $[t_0, \vartheta]$. Введем следующие функционалы

$$\varepsilon[t] = \begin{cases} \inf\{J_0(r^e[t]_\Delta - r) \mid r \in W(M^\circ)(t), & W(M^\circ)(t) \neq \phi \\ \infty, & W(M^\circ)(t) = \phi \end{cases}$$

$$\gamma[t] = \begin{cases} \inf\{J_0(r^e[t]_\Delta - r) \mid r \in M^\circ(t)\}, & M^\circ(t) \neq \phi \\ \infty, & M^\circ(t) = \phi \end{cases}$$

Учитывая определение экстремальной стратегии U^e и стабильность множества $W(M^\circ)$ для $\varepsilon[\tau_{i+1}]$ и $\gamma[t^{(k)}]$, получаем оценки

$$\begin{gathered} \varepsilon^2[\tau_{i+1}] \leqslant \varepsilon^2[\tau_i] \ (1 + K\delta(\Delta)) + o(\delta(\Delta)) \\ \gamma^2[t^{(k)}] \leqslant 2J_0 \times (r^e[\tau_i]_\Delta - r_k)(1 + N\delta(\Delta)) + o(\delta(\Delta)) + \varphi(k) \\ (K, N = \mathrm{const} > 0; \ \varphi(k) \to 0, \ k \to \infty; \ o(\delta(\Delta)) / \delta(\Delta) \to \\ \to 0, \ \delta(\Delta) \to 0) \end{gathered} \tag{2.5}$$

Здесь $t^{(k)} \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ удовлетворяют второму из включений в (2.1), величины r_k определяются в соответствии с (2.2).

Из оценок (2.5) и компактности пучка движений системы (1.1) в $R_1 \times H^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ вытекает утверждение теоремы.

Замечание 2.2. Стратегию V, доставляющую решение задачи 2, можно построить в виде экстремальной стратегии к некоторому v-стабильному множеству.

Как и в [1, 6-8], можно выделить широкий класс множеств M (например, выпуклые замкнутые и ограниченные в $R_1 \times H^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$), для которых множество $W(M^\circ)$ допускает эффективное описание в форме линейных неравенств в $R_1 \times H^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$).

Автор благодарит Ю. С. Осипова за постановку задачи и ценные советы.

Поступила 9 XII 1977

ЛИТУРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
2. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх. Докл. АН СССР, 1967, т. 174. № 6.
3. *Мищенко Е. Ф.* Задачи преследования и уклонения от встречи в теории дифференциальных игр. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1971, № 5.
4. *Осипов Ю. С.* Дифференциальные игры систем с последействием. Докл. АН СССР, 1971, т. 196, № 4.

5. *Осипов Ю. С.* К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 6.
6. *Вайсбурд И. Ф., Осипов Ю. С.* Дифференциальная игра сближения для систем с распределенными параметрами. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
7. *Осипов Ю. С., Охезин С. П.* К теории дифференциальных игр в параболических системах. Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 6.
8. *Осипов Ю. С., Охезин С. П.* К теории позиционного управления в гиперболических системах. Докл. АН СССР, 1977, т. 233, № 4.
9. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., «Мир», 1972.
10. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1973.
11. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М., «Наука», 1973.
12. *Ладыженская О. А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения. М., Гостехиздат, 1953.
13. *Плотников В. И.* Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1968, т. 32, № 4.