Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 62—50

АППРОКСИМАЦИЯ В ЗАДАЧАХ ПОЗИЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

А. И. Короткий, Ю. С. Осипов

(Свердловск)

Обсуждаются вопросы, связанные с аппроксимацией задач позиционного управления параболическими системами подходящими конечномерными задачами управления. Работа примыкает к исследованиям [1–3].

1. Рассмотрим систему, состояние которой в каждый момент t из промежутка $[t_0, \vartheta]$ характеризуется скалярной функций $y(t, \cdot) = y(t, x)$, определенной в области Ω n-мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^n$. Система подвержена управляющим воздействиям u_1, u_2 и неконтролируемым возмущениям (помехам) v_1, v_2. Динамика системы описывается соотношениями

$$\frac{\partial y(t, x)}{\partial t} = Ay(t, x) + b_1(t, x)u_1(t) - c_1(t, x)v_1(t) + f(t, x); \quad x \in \Omega, \ t_0 < t < \vartheta \tag{1.1}$$

$$\sigma_1 \frac{\partial y(t, x)}{\partial \nu_A} + \sigma_2(x) y(t, x) = b_2(x)u_2(t) - c_2(x)v_2(t); \ x \in \Gamma, \ t_0 < t < \vartheta$$

$$y(t_0, x) = y_0(x), \quad x \in \Omega \tag{1.2}$$

$$Ay = \sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j}\right) + a(x) y$$

Здесь y_0 — заданное начальное состояние системы, Γ — граница Ω, $\partial / \partial \nu_A$ — нормальная производная, a_{ij}, a, b_i, c_i, f, σ_i — известные параметры, параметр σ_1 равен либо нулю, либо единице, причем $\sigma_2 = 1$ при $\sigma_1 = 0$ и $\sigma_2 \geqslant 0$ при $\sigma_1 = 1$. Предполагается, что величины, входящие в соотношения (1.1), (1.2), удовлетворяют некоторым условиям регулярности (например, указанным в [2]).

В каждый момент t управления u_i стеснены ограничениями $u_i(t) \in P_i(t) \subset R^{r_i}$, и для помех v_i имеются оценки $v_i(t) \in Q_i(t) \subset R^{m_i}$, $i = 1, 2$, где $P_i(t)$, $Q_i(t)$ — в соответствующих пространствах выпуклые замкнутые множества, равноограниченные и измеримые по $t \in [t_0, \vartheta]$. (Измеримость и интегрируемость понимаются в смысле Лебега.)

Для краткости ограничимся лишь обсуждением задачи сближения для системы (1.1). Результаты, аналогичные излагаемым ниже, имеют место и для задачи об уклонении (см. [2,3]).

Задача сближения для системы (1.1) состоит в следующем: при заданных ограничениях на ресурсы управлений и известных оценках интенсивностей помех требуется указать способ формирования воздействий u_1, u_2 по принципу обратной связи ($u_i = u_i[t, y[t, \cdot]]$, $i = 1, 2$), который обеспечивал бы при любых допустимых реализациях помех приведение системы (1.1) из начального состояния в заданные сроки на заданное множество состояний, причем так, чтобы в процессе управления выполнялись заданные фазовые ограничения.

Данная задача изучалась в [2,3], где предложена ее математическая формализация, указаны необходимые и достаточные условия разрешимости и способ построения разрешающих управлений, аналогичный правилу экстремального прицеливания [1]. Напомним некоторые понятия из [2], необходимые для дальнейшего изложения. При этом без пояснений будем использовать обозначения [2]. Пусть $U(t_1, t_2, y)$ — правило, ставящее в соответствие каждой тройке $\{t_1, t_2, y\}$, где $t_1 \in [t_0, \vartheta)$, $t_2 \in (t_1, \vartheta]$, $y \in L_2(\Omega)$, пару $\{u_1(t), u_2(t)\}$ измеримых на $[t_1, t_2)$ функций $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$, причем $u_1(t) \in P_1(t)$, $u_2(t) \in P_2(t)$. Каждое такое правило называется стратегией. Обозначим символом Δ разбиение $[t_0, \vartheta]$ точками $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{m(\Delta)} = \vartheta$, $\delta(\Delta) = \max_i (\tau_{i+1} - \tau_i)$. Пусть $y[t]_\Delta = y[t; t_0, y_0, U]_\Delta$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ — движение системы (1.1) из позиции $\{t_0, y_0\}$, отвечающее стратегии U и разбиению Δ (см. [2]). Пусть, наконец, M и N — некоторые множества в пространстве $[t_0, \vartheta] \times L_2(\Omega)$. Строгая постановка задачи сближения следующая.

Задача 1. Требуется построить стратегию U со свойством: каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно указать число $\delta > 0$, такое, что для каждого движения $y[t]_\Delta = y[t; t_0, y_0, U]_\Delta$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ с $\delta(\Delta) \leqslant \delta$ в некоторый момент $t_* = t(y[\cdot]_\Delta)$ имеем

$$\rho(\{t_*, y[t_*]_\Delta\}, M) = \inf_{\{t, h\} \in M} (|t_* - t|^2 + \|y[t_*]_\Delta - h\|_\Omega^2)^{1/2} \leqslant \varepsilon$$

и при этом

$$\rho(\{t, y[t]_\Delta\}, N) \leqslant \varepsilon, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_*$$

2. Обсудим возможность аппроксимации задачи 1 подходящими конечномерными задачами позиционного управления.

Сначала сопоставим системе (1.1) конечномерную управляемую систему размерности $k \geqslant 1$ (k — целое число). Состояние этой системы в каждый момент $t \in [t_0, \vartheta]$ характеризуется вектором $z^{(k)}(t) = \{z_1^{(k)}(t), \ldots, z_k^{(k)}(t)\}'$, изменяющимся по закону

$$dz^{(k)}/dt = \Lambda^{(k)} z^{(k)} + B_1^{(k)} u_1 + B_2^{(k)} u_2 - C_1^{(k)} v_1 - C_2^{(k)} v_2 + f^{(k)}(t) \tag{2.1}$$

Здесь u_i, v_i — управления, стесненные условиями $u_i(t) \in P_i(t)$, $v_i(t) \in Q_i(t)$, $i = 1, 2$; матрицы, входящие в (2.1), имеют вид

$$\Lambda^{(k)} = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$$

$$f^{(k)}(t) = \operatorname{col}\{\langle f(t, \cdot), \omega_1\rangle_\Omega, \ldots, \langle f(t, \cdot), \omega_k\rangle_\Omega\}$$

$B_\nu^{(k)}(C_\nu^{(k)})$ — матрица размерности $k \times r_\nu (k \times m_\nu)$ с элементами

$$b_{ij}^{(\nu)} = \langle b_{\nu j}(t, \cdot), \omega_i\rangle_{Q_\nu} \quad (c_{ij}^{(\nu)} = \langle c_{\nu j}(t, \cdot), \omega_i\rangle_{Q_\nu})$$

$$\nu = 1, 2, \quad Q_1 = \Omega, \quad Q_2 = \Gamma$$

где $\{\lambda_i, \omega_i\}$ — решение в $H^1(\Omega)$ (см. [4,5]) спектральной задачи

$$A\omega = -\lambda\omega, \ x \in \Omega; \quad \sigma_1 \frac{\partial \omega}{\partial \nu_A^r} + \sigma_2 \omega = 0, \ x \in \Gamma$$

Множеству M (N) сопоставим в пространстве $[t_0, \vartheta] \times R^k$ множество

$$M^{(k)}(N^{(k)}) = \{\{t, z\} \mid t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta,$$
$$z = \{\langle y, \omega_1\rangle_\Omega, \ldots, \langle y, \omega_k\rangle_\Omega\}', \{t, y\} \in M(N)\}$$

Образуем вектор

$$z_0^{(k)} = \{\langle y_0, \omega_1\rangle_\Omega, \ldots, \langle y_0, \omega_k\rangle_\Omega\}' = D^{(k)} y_0$$

и рассмотрим для системы (2.1) с начальным состоянием $z^{(k)}(t_0) = z_0^{(k)}$ задачу сближения с множеством $M^{(k)}$ во множестве $N^{(k)}$ (см. [1]). Эту задачу удобно здесь сформулировать в следующем виде. Назовем стратегией $U^{(k)} = U^{(k)}(t_1, t_2, z)$ правило, ставящее всякой тройке $\{t_1, t_2, z\}$, $t_1 \in [t_0, \vartheta)$, $t_2 \in (t_1, \vartheta]$, $z \in R^k$ пару $\{u_1(\cdot), u_2(\cdot)\}$ измеримых на $[t_1, t_2)$ функций $u_1(t)$, $u_2(t)$ со значениями в $P_1(t)$, $P_2(t)$. Движение $z^{(k)}[t]_\Delta = z^{(k)}[t; t_0, z_0^{(k)}, U^{(k)}]_\Delta$ системы (2.1) из позиции $\{t_0, z_0^{(k)}\}$, отвечающее стратегии $U^{(k)}$ и разбиению Δ, определим как абсолютно непрерывное решение $z^{(k)}[t]$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, $z^{(k)}[t_0] = z_0^{(k)}$ уравнения (2.1) при $u_j = u_j[t]$, $v_j = v_j[t]$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, где $v_j[t]$ — какие-то измеримые функции со значениями в $Q_j(t)$, и на каждом полуинтервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$

$$\{u_1[\cdot], u_2[\cdot]\} \in U^{(k)}(\tau_i, \tau_{i+1}, z^{(k)}[\tau_i]_\Delta)$$

Задача $1^{(k)}$. Требуется построить стратегию $U^{(k)}$ со свойством: каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно указать число $\delta > 0$, такое, что для каждого движения $z^{(k)}[t]_\Delta = z^{(k)}[t; t_0, z_0^{(k)}, U^{(k)}]_\Delta$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, с $\delta(\Delta) \leqslant \delta$ в некоторый момент $t_* = t(z^{(k)}[\cdot]_\Delta)$ выполняется условие

$$\rho(\{t_*, z^{(k)}[t_*]_\Delta\}, M^{(k)}) = \inf_{\{t, z\} \in M^{(k)}} (|t_* - t|^2 + \|z^{(k)}[t_*]_\Delta -$$
$$- z\|_{R^k}^2)^{1/2} \leqslant \varepsilon$$

и при этом

$$\rho(\{t, z^{(k)}[t]_\Delta\}, N^{(k)}) \leqslant \varepsilon, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_*$$

Задача $1^{(k)}$ изучена в [1], где указаны необходимые и достаточные условия ее разрешимости, способ построения искомых управлений; выделены случаи, когда решение задачи может быть получено эффективным образом.

Укажем связь между задачами 1 и $1^{(k)}$.

Теорема 2.1. Пусть множества M и N замкнуты в метрике $\|\{t, y\}\|_\alpha$ (см. [2,3]). Задача 1 разрешима тогда и только тогда, когда для любого k разрешима задача $1^{(k)}$. Пусть $U^{(k)}$ — стратегия, решающая задачу $1^{(k)}$. Положим $U_*^{(k)} = U^{(k)}(t_1, t_2, D^{(k)}y)$, $y \in L_2(\Omega)$. Тогда, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, существует номер k_0 со свойством: для любого $k \geqslant k_0$ можно указать число $\delta = \delta(k, \varepsilon) > 0$, такое, что каждое движение $y[t]_\Delta = y[t; t_0, y_0, U_*^{(k)}]_\Delta$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ системы (1.1), отвечающее разбиению Δ с $\delta(\Delta) \leqslant \delta$, в некоторый момент $t_* = t(y[\cdot]_\Delta)$ удовлетворяет условию

$$\rho(\{t_*, y[t_*]_\Delta\}, M) \leqslant \varepsilon$$

и при этом

$$\rho\ (\{t,\ y[t]_\Delta\},\ N) \leqslant \varepsilon, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_*$$

Доказательство теоремы опирается на теоремы об альтернативе для систем (1.1) и системы (2.1) (см. [1,2]), на свойства движений системы (1.1) и на связь между стабильными множествами систем (1.1) и (2.1)

3. Обсудим возможность аппроксимации задачи 1 подходящими конечномерными задачами позиционного управления, которые строятся на основе метода конечных разностей. Для определенности ограничимся рассмотрением ступенчатой области Ω и неявной разностной схемы. Будем следовать обозначениям [5] и будем считать, что сетка на Ω (вообще говоря, неравномерная) согласована с боковыми гранями области Ω.

Запишем неявную схему для (1.1), (1.2) (см. [5]) в виде

$$(y_k^l)_{\bar t} = \Lambda y_k^l + f_k^l, \quad k \in \Omega_h, \quad l = 1, \ldots, m(\Delta) \tag{3.1}$$

$$\sigma_1 \frac{\partial y_k^l}{\partial \nu} + \sigma_{2k} y_k^l = \varphi_k^l, \quad k \in \Gamma_h^+ \tag{3.2}$$

$$y_k^\circ = y_{0k}, \quad k \in \Omega_h \tag{3.3}$$

Здесь

$$\Lambda y_k^l = \sum_{i,\, j=1}^{n} (a_{ijk} (y_k^l)_{x_j})_{\bar{x}_i} + a_k y_k^l$$

$$y_{0k} = \frac{1}{h(k)} \int\limits_{\omega(k)} y_0^\cdot\, dx$$

$$f_k^l = \frac{1}{(\tau_l - \tau_{l-1})\, h(k)} \int\limits_{\tau_{l-1}}^{\tau_l} \int\limits_{\omega(k)} (b_1 u_1 - c_1 v_1 + f)\, dx\, dt$$

Если $k = (k_1, \ldots, k_p, \ldots, k_n) \in \Gamma_h^+$ лежит на правой (левой) боковой грани Γ_p^+ (Γ_p^-), ортогональной оси Ox_p, то в (3.2) полагаем ($\gamma = (k_1, \ldots$ $\ldots, k_p - 1, \ldots, k_n)$)

$$\frac{\partial y_k^l}{\partial \nu} = \sum_{j=1}^{n} a_{pj\gamma} (y_\gamma^l)_{x_j} \Bigl(- \sum_{j=1}^{n} a_{pjk} (y_k^l)_{x_j}\Bigr)$$

$$\varphi_k^l = \frac{h_p(k)}{(\tau_l - \tau_{l-1})\, h(k)} \int\limits_{\tau_{l-1}}^{\tau_l} \int\limits_{\omega^+} (b_2 u_2 - c_2 v_2)\, d\Gamma\, dt$$

$$\Bigl(\varphi_k^l = \frac{h_p(k)}{(\tau_l - \tau_{l-1})\, h(k)} \int\limits_{\tau_{l-1}}^{\tau_l} \int\limits_{\omega^-} (b_2 u_2 - c_2 v_2)\, d\Gamma\, dt\Bigr)$$

если же окажется, что при некотором $k \in \Gamma_h^+$ функции φ_k^l задается несколькими значениями, то при этом k в (3.2) φ_k^l полагаем равным нулю; $\omega^+(\omega^-)$ — правая (левая) грань $\omega\ (\gamma)$ ($\omega\ (k_1, \ldots, k_p + 1, \ldots, k_n)$), ортогональная оси Ox_p.

Условие 1 (*см.* [5–7]). Имеет место оценка

$$\max\nolimits_l \sum_{\Omega_h^+} h(k) (y_k^l)^2 \leqslant C$$

где C — постоянная, не зависящая от разбиений $[t_0, \vartheta]$ и Ω, а также от управлений u_i и v_i.

Перепишем схему (3.1), (3.2) в виде

$$(E - D)\ y_k^l = y_k^{l-1} + B(u,\ l) - C(v,\ l) + F \tag{3.4}$$
$$l = 1, \ldots\ m(\Delta)$$

Здесь D — линейный самосопряженный неположительный оператор $H \to H$, строящийся по коэффициентам Λ, σ_1 и σ_{2k}, причем существует обратный к $(E - D)$ определенный на H; $B(\cdot,\ l)$ $(C(\cdot,\ l))$ — линейный вполне непрерывный оператор, построенный по коэффициентам схемы, определенный на множестве допустимых управлений

$$u = \{u_1(t),\ u_2(t)\}\ (v = \{v_1(t),\ v_2(t)\}),\ \tau_{l-1} \leqslant t < \tau_l$$

со значениями в H; H — пространство сеточных функций, определенных на Ω_h (равных нулю вне Ω_h), снабженное нормой

$$\| y_k \|_H = \Big(\sum_{\Omega_h} h(k)(y_k)^2\Big)^{1/2}$$

Сопоставим системе (1.1) конечномерную дискретную управляемую систему размерности $|\Omega_h|$. Состояние этой системы в каждый момент τ_l разбиения Δ характеризуется вектором $y_k^l \in H$, изменяющимся по рекуррентному закону (3.4). Множеству M (N) сопоставим в пространстве $[t_0, \vartheta] \times H$ множество

$$M_h(N_h) = \Big\{\{t,\ y_k\}\ |\ t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta,\ y_k = \frac{1}{h(k)} \int\limits_{\omega(k)} y\, dx,\ k \in \Omega_h,\ \{t,\ y\} \in M(N)\Big\}$$

Задачу сближения с M_h внутри N_h для системы (3.4) сформулируем следующим образом. Стратегией U_h назовем правило, ставящее всякой тройке $\{t_1, t_2, y_k\}$, где $t_1 \in [t_0, \vartheta)$, $t_2 \in (t_1, \vartheta]$, $y_k \in H$, пару $\{u_1(\cdot), u_2(\cdot)\}$ измеримых на $[t_1,\ t_2)$ функций $u_1(t)$, $u_2(t)$ со значениями в $P_1(t)$, $P_2(t)$. Движением $y_h[l]_\Delta = y_h[l;\ t_0,\ y_k^\circ,\ U_h]_\Delta$ системы (3.4) из позиции $\{t_0, y_k^\circ\}$, отвечающим стратегии U_h и разбиению Δ, назовем совокупность состояний $\{\overset{\circ}{y_k},\ \overset{1}{y_k}, \ldots,\ \overset{m(\Delta)}{y_k}\} \subset H$, связанных рекуррентным соотношением (3.4), причем на каждом из $[\tau_i,\ \tau_{i+1})$ $u = \{u_1(\cdot),\ u_2(\cdot)\} \in U_h(\tau_i, \tau_{i+1}, \overset{i}{y_k})$ и $v = \{v_1(t),\ v_2(t)\}$ — какие-то измеримые функции со значениями в $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ соответственно.

Задача 1_h. Требуется построить стратегию U_h со свойством: каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно указать число $\delta = \delta(h, \varepsilon) > 0$, такое, что для каждого движения $y_h[l]_\Delta = y[l;\ t_0,\ \overset{\circ}{y_k},\ U_h]_\Delta$, соответствующего разбиению Δ с $\delta(\Delta) \leqslant \delta$, в некоторый момент $t_* = t(y_h[\cdot]_\Delta)$ выполняется условие

$$\rho(\{t_*, y_h^*[t_*]_\Delta\},\ M_h) = \inf_{\{t,\ z\} \in M_h} (|t_* - t|^2 + \| y_h^*[t_*]_\Delta - z \|_H^2)^{1/2} \leqslant \varepsilon$$

и при этом

$$\rho(\{t,\ y_h^*[t]_\Delta\},\ N_h) \leqslant \varepsilon,\quad t_0 \leqslant t \leqslant t_*$$

Здесь $y_h^*[t]_\Delta$ — кусочно-линейная по t интерполяция $y_h[l]_\Delta$; так, при $t \in [\tau_l, \ \tau_{l+1}]$

$$y_h^*[t]_\Delta = y_h[l]_\Delta \frac{\tau_{l+1}-t}{\tau_{l+1}-\tau_l} + y_h[l+1]\frac{t-\tau_l}{\tau_{l+1}-\tau_l}$$

Не указывая здесь условий, при которых разрешима задача 1_h, сформулируем сразу основной результат.

Пусть $G(v, i) = \{z \in H \mid z = y_h(\tau_i; \tau_{i+1}, y_k, u^*, v)_\Delta, u^* \in U_h(\tau_{i-1}, \tau_i, y_k)$, v пробегает допустимые на $[\tau_{i-1}, \tau_i)$ управления$\}$. Если $z \in H$, то под $\bar z$ будем понимать кусочно-постоянную на Ω интерполяцию z (см. [5]).

Заметим, что всякая стратегия U_h индуцирует стратегию (правило) $U_h^*(\tau_{i-1}, \tau_i, \tau_{i+1}, y, z)$ (где $\tau_{i-1}, \tau_i, \tau_{i+1}$ — элементы разбиения Δ, $y \in L_2(\Omega)$, $z \in H$) по закону

$$U_h^*(\tau_{i-1}, \tau_i, \tau_{i+1}, y, z) = \{u = \{u_1(\cdot), u_2(\cdot)\} \mid u \in U_h(\tau_i, \tau_{i+1}, z_*)$$

где z_* — элемент $G(v, i)$, такой, что $\bar z_*$ — ближайший в $\|\cdot\|_\alpha$ к $y\}$. При $i = 0$ сразу полагаем $z_* = \mathring{y}_k$.

Теорема 3.1. Пусть выполняется условие 1, множества M и N удовлетворяют условию теоремы 2.1. Если найдется последовательность сгущающихся сеток [5] на Ω, вдоль которой разрешимы задачи 1_h, то тогда разрешима задача 1. Пусть $\Delta^{(p)} \times \Omega_h^{(p)}$ — последовательность сгущающихся сеток на $[t_0, \vartheta] \times \Omega$, связанных предельным переходом

$$\delta^\gamma \left(\max_k h^{-1/2}(k) \sum_{i=1}^n h_i^{-1}(k)\right)^8 \leqslant \text{const}, \qquad 0 < \gamma \leqslant 1$$

$$\delta(\Delta^{(p)}) \leqslant \min\{\delta(h^{(1)}, \beta_1), \ldots, \delta(h^{(p)}, \beta_p)\}, \qquad \beta_p \to 0$$

и пусть $U_h^{(p)}$ — стратегия, решающая задачу $1_h^{(p)}$. Тогда, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно найти номер p_0, такой, что каждое движение $y[t]_{\Delta(p)} = y[t;\ t_0,\ y_0,\ U_h^{*(p)}]_{\Delta(p)}$ с $p \geqslant p_0$ удовлетворяет при некотором $t_* = t(y[\cdot]_{\Delta(p)})$ условию

$$\rho_\alpha(\{t_*, \ y[t_*]_{\Delta(p)}\}, \ M) \leqslant \varepsilon$$

и при этом

$$\rho_\alpha(\{t, \ y[t]_{\Delta(p)}\}, \ N) \leqslant \varepsilon, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_*$$

Доказательство теоремы опирается на теорему об альтернативе для системы (1.1), на теорему о разрешимости задачи 1_h и на свойства сходимости решения разностной схемы (3.1) — (3.3) к решению задачи (1.1), (1.2).

Полученные результаты могут быть положены в основу численной реализации на ЭВМ искомых процедур управления.

Замечания. 1°. Полученные результаты имеют место и для более общей параболической системы, а также для ряда других разностных схем (см., например, [5]).

2°. По схеме (3.1), (3.2) могут быть построены также некоторые другие специальные конечномерные системы (вообще говоря, не обладающие свойством полугруппы по t), для которых имеет место альтернатива и которые позволяют принимать решение о выборе управления первого игрока в исходной системе (1.1) и в промежутках между разбиениями Δ; при этом имеет место теорема, аналогичная теореме 3.1.

3°. Стратегия U_h, разрешающая задачу 1_h, может быть построена в форме стратегии, экстремальной к подходящим множествам из H.

Поступила 28 XI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
2. *Осипов Ю. С.* Позиционное управление в параболических системах. ПММ, 1977, т. 41, вып. 2.
3. *Осипов Ю. С., Охезин С. П.* К теории дифференциальных игр в параболических системах. Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 6.
4. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1973.
5. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М., «Наука», 1973.
6. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.
7. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем. М., «Наука», 1973.