

получим следующее выражение:

$$J_{u^\varepsilon}^\varepsilon - J_{u^0}^\varepsilon = \varepsilon \int_{t_0}^{T^\varepsilon} [h^\circ(t, u^\circ(t)) - h^\circ(t, u^\varepsilon(t))] dt + \\ + \varepsilon \int_{T^\varepsilon}^{T^0} [h^\circ(t, u^\circ(t)) - h^\circ(t, u^\varepsilon(t))] dt + O(\varepsilon^2)$$

В первом интеграле подынтегральное выражение имеет порядок ε в силу леммы 6. Во втором интеграле промежуток интегрирования имеет порядок ε , а подынтегральное выражение заведомо ограничено. Поэтому вся правая часть последней формулы имеет порядок ε^2 . Теорема доказана.

Автор благодарит Ф. Л. Черноусько за полезные критические замечания, сделанные в ходе работы над статьей.

Поступила 31 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф. Л. Некоторые задачи оптимального управления с малым параметром. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1971.

УДК 533.6.011

СФЕРИЧЕСКАЯ ЦЕНТРИРОВАННАЯ ВОЛНА СЖАТИЯ

И. Е. Забабахин, В. А. Симоненко
(Челябинск).

Получено решение, отвечающее изэнтропическому сжатию идеального газа в сферической центрированной волне. При этом осуществляется бесконечное сжатие конечной массы первоначально однородного вещества. Конкретные результаты приводятся для показателей адиабаты, равных 3 и $5/3$, асимптотические выражения в общем случае. Обсуждается связь полученного решения с известными.

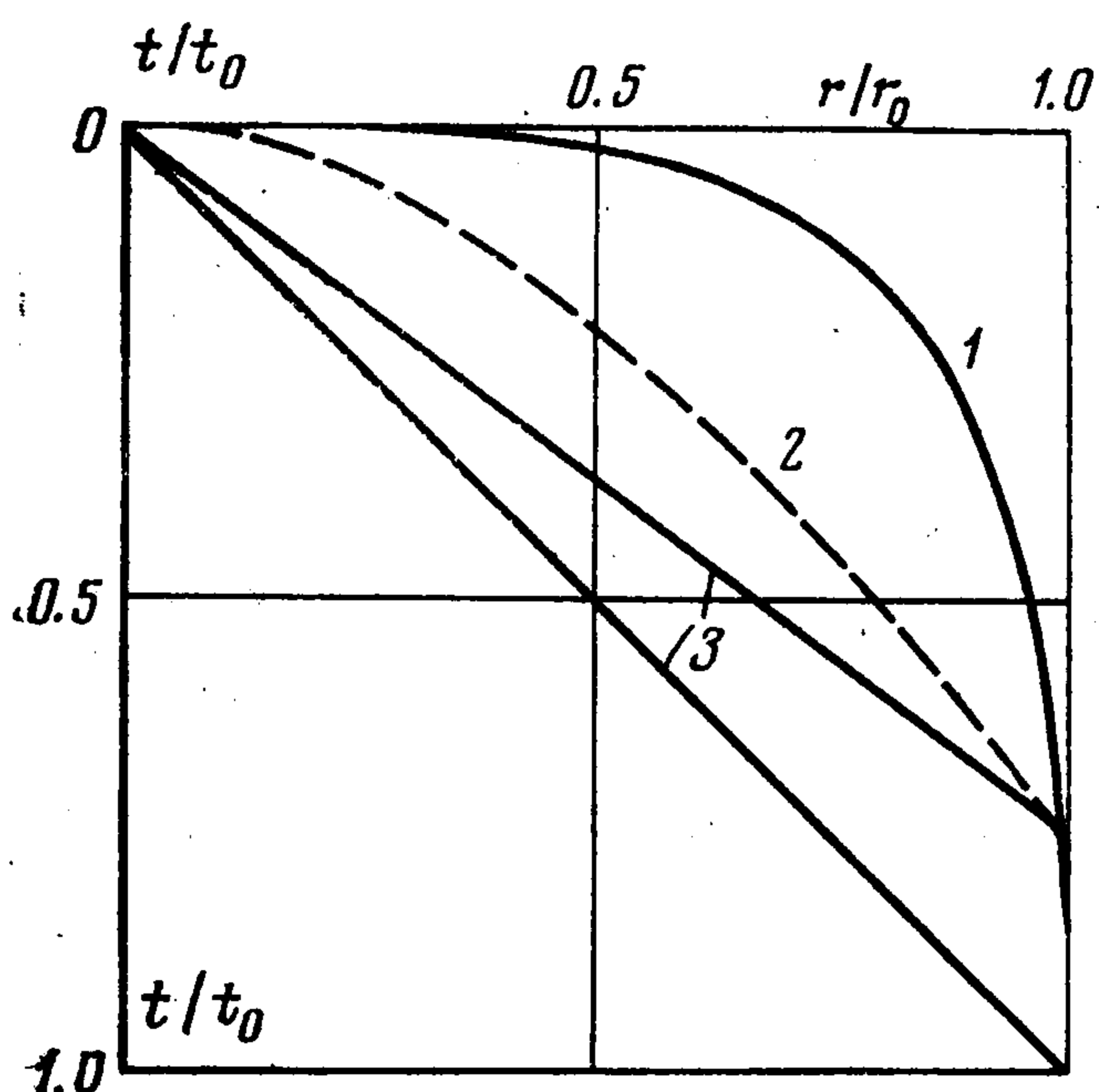
Центрированные волны разрежения с характеристиками, исходящими из одной точки, являются широко известным классом автомодельных решений уравнений газовой динамики для одномерного плоского случая. Аналогичное решение для плоских волн сжатия было построено К. П. Станюковичем [1]. В последнее время большое внимание уделяется случаям изэнтропического коллапса — схождения массы в центр. В частности, получена асимптотика изменения давления от времени для частиц вещества при таких движениях [2], дано аналитическое решение для нового класса автомодельных задач об изэнтропическом коллапсе при специальном профиле плотности в волне сжатия [3,4].

Ниже дается решение задачи о сферической центрированной волне сжатия, граничащей с однородным первоначально покоящимся веществом (см. фиг. 1), где 1 — «траектория» частицы, 2 — β -характеристики, 3 — τ -линии. Случай с коллапсом — предельный в классе автомодельных решений, известных как сферические квазипростые волны [5].

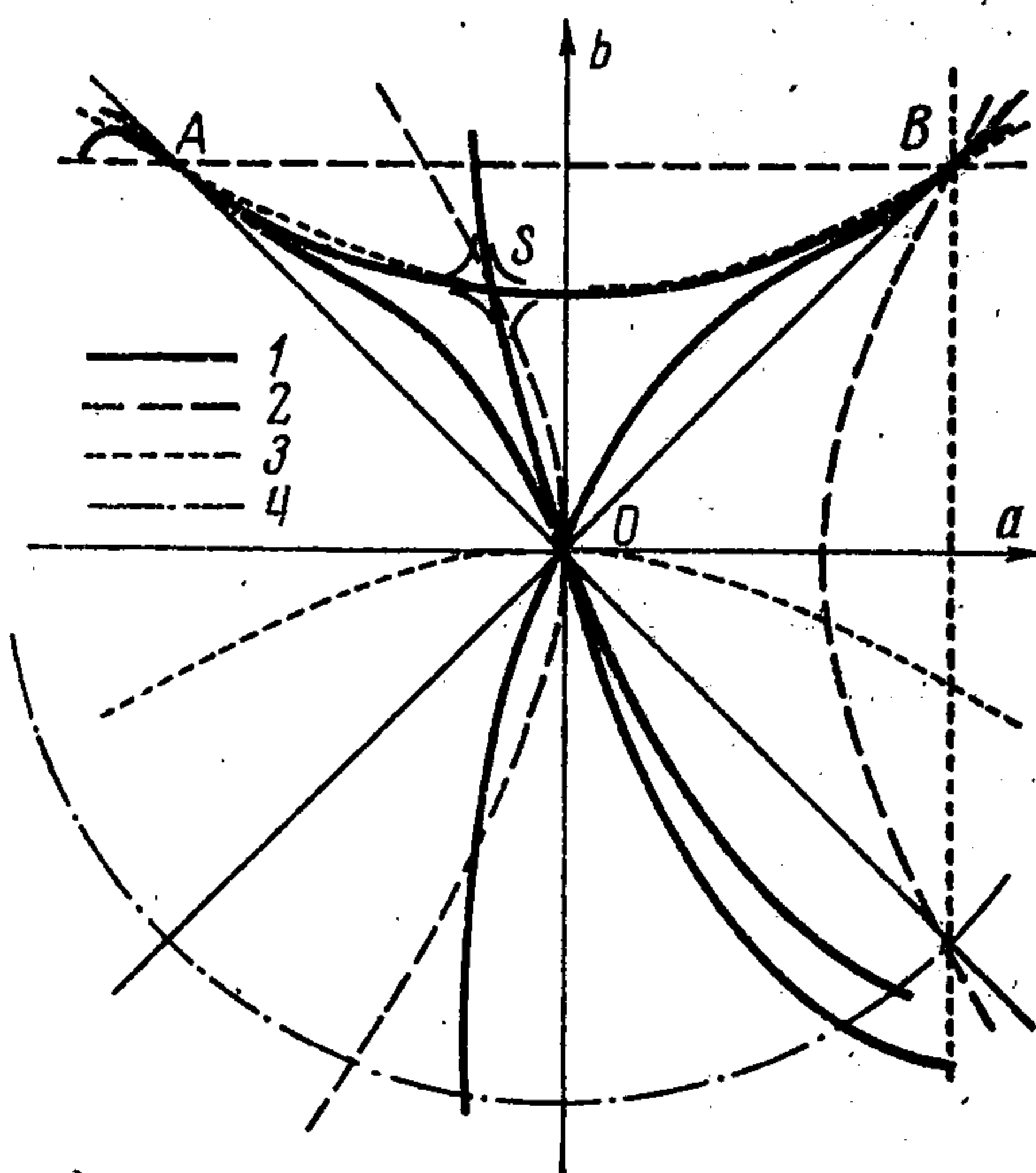
Пусть сжимающееся вещество — идеальный газ с начальными значениями давления, плотности и скорости звука p_0 , ρ_0 и c_0 соответственно. Показатель адиабаты $\gamma = 3$, при этом формулы отличаются простотой (для других значений γ приведем лишь некоторые окончательные результаты). Отметим, что аналогичные результаты можно получить для конденсированного вещества с уравнением состояния типа $p = \gamma^{-1} \rho_0 c_0^2 [(\rho / \rho_0)^\gamma - 1]$. Роль p_0 в этом случае играет $\gamma^{-1} \rho_0 c_0^2$.

В переменных Римана уравнения движения имеют вид

$$(1) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2r} = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial t} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial r} + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2r} = 0$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где $\alpha = u + c$, $\beta = u - c$, u и c — скорости вещества и звука. Решение их ищем в автономной форме

$$(2) \quad \alpha(r, t) = \frac{r}{t} a(\tau), \quad \beta(r, t) = \frac{r}{t} b(\tau), \quad \tau = \frac{c_0 t}{r}$$

где t — время, отсчитываемое от фокусировки, r — расстояние до центра.

Это исследование аналогично проведенному в работах [5, 6]. Отличие заключается лишь в выборе переменных, более удобных в рассматриваемом случае. Подстановка величин (2) в (1) дает

$$(3) \quad \tau \frac{da}{d\tau} = \frac{b^2 - 3a^2 + 2a}{2(1-a)}, \quad \tau \frac{db}{d\tau} = \frac{a^2 - 3b^2 + 2b}{2(1-b)}$$

Движение ограничено слабым разрывом $r = -c_0 t$, на котором $u = 0$, $c = c_0$. Это приводит к начальным условиям для системы (3)

$$a(-1) = -1, \quad b(-1) = 1$$

Задача состоит в том, чтобы в плоскости (a, b) найти интегральную кривую, соединяющую начальную точку $A(-1, 1)$, где $\tau = -1$, и конечную, где $\tau = 0$.

Общая картина расположения кривых на плоскости (a, b) показана на фиг. 2: 1 — интегральные кривые, 2 — изоклины бесконечностей, 3 — изоклины нулей, 4 — геометрическое место точек, где вещество ударным образом переводится в состояние покоя ($a = b$). Пересечения изоклин — особые точки. Далее будут существенны: $A(-1, 1)$, $B(1, 1)$ — дирекционные узлы, $O(0, 0)$ — дикритический узел, $S((1 - \sqrt{3})/4, (1 + \sqrt{3})/4)$ — седло с угловыми коэффициентами сепаратрис $K_{1,2} = -4 \pm \sqrt{15}$.

В начальной точке A [величина $\tau = -1$. При движении вдоль кривой она увеличивается и в S обращается в нуль. В самом деле, обозначив $a - a_S = x$, $b - b_S = y$ и считая, что $y = kx$ вблизи S , после отбрасывания малых членов из уравнений (3) и упрощений получаем

$$\tau dx/d\tau = (\sqrt{5} - 1)x$$

отсюда $\tau = x^{0,809}$ и при $x \rightarrow 0$ действительно $\tau \rightarrow 0$. Таким образом, сепаратриса AS седла S — искомая кривая, а точка S соответствует коллапсу.

Вся кривая AS находится численным интегрированием системы (3) (от S влево), после чего численным интегрированием уравнения $u = (\alpha + \beta)/2$ или $dr/dt = r(a + b)/(2t)$ находится закон движения поршня $r(t)$, а затем скорость звука и давление на нем: $c = r(a - b)/(2t)$, $p/p_0 = (c/c_0)^3$.

Вблизи фокусировки

$$\frac{dr}{dt} \approx \frac{(a_S + b_S)r}{2t} = \frac{r}{4t}, \quad c = \frac{(a_S - b_S)r}{2t} = -\frac{\sqrt{3}r}{4t}$$

т. е. $r \sim t^{1/4}$, $p \sim c^3 \sim (r/t)^3 \sim t^{-3/4}$.

Для других γ (результаты приводим без вывода)

$$(4) \quad a_S = (1 - \sqrt{\nu})\eta, \quad b_S = (1 + \sqrt{\nu})\eta, \quad \eta = 2/(\nu\gamma - \nu + 2)$$

$$r \sim t^\eta, \quad p \sim t^{-\nu\eta}, \quad E \sim t^{-\xi}, \quad \xi = [1 + 3/2\nu(\gamma - 1)]\eta$$

Здесь $\nu = 1, 2, 3$ для плоского, цилиндрического и сферического случаев соответственно, $E(t)$ — поток энергии в единицу времени через выделенную сферическую поверхность вещества. Эти выражения совпадают с соответствующими результатами работ [2-4,7] и отличаются от аналогичных выражений работы [8].

Зависимости давления на поршне p/p_0 и среднего сжатия шара $\bar{\delta} = (r_0/r)^3$ от времени t/t_0 (t_0 — полное время сжатия) для $\gamma = 3$ и $\gamma = 5/3$ показаны на фиг. 3 (кривые 1 и 2 соответственно). Для сравнения приведены соответствующие асимптотические выражения согласно формулам (4), которые используются (см., например, [2]) в прикладных расчетах (кривые 3 и 4). Коэффициенты в асимптотических формулах получены численно.

Отметим роль других интегральных кривых в окрестности AS . Кривые, расположенные выше седла S , не являются решением задачи, так как при пересечении горизонтали $b = 1$ производная $db/d\tau$ меняет знак, т. е. τ снова начинает убывать, не стремясь к нулю, и решение для a и b делается двузначным. Другие кривые типа ADO соответствуют реальным движениям — квазипростым волнам [5]. В точке O на них τ обращается в нуль: вблизи точки O из (3) получаем $\tau da/d\tau = a$, т. е. $\tau = ma$ и $\tau \rightarrow 0$ при $a \rightarrow 0$. При этом скорость остается конечной, так как вблизи нуля $b = na$ и

$$(5) \quad u = \frac{(a+b)r}{2t} \approx \frac{c_0(1+n)}{2m}$$

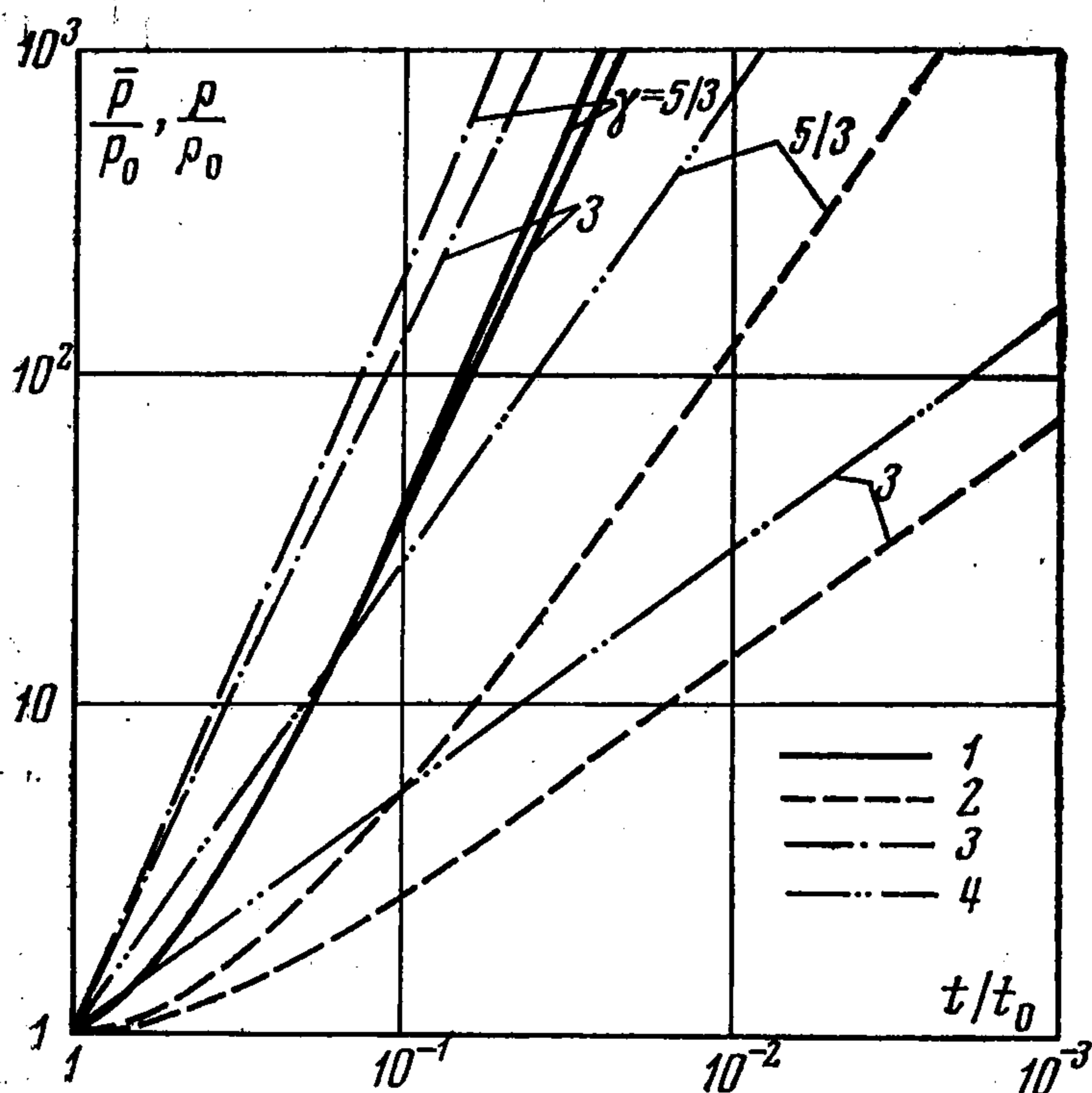
Схема движения в этом случае показана на фиг. 4 (OB — отраженная ударная волна, остальные обозначения те же, что на фиг. 1). Волна сжатия не будет центрированной (характеристики не сходятся в центре), но остается взаимное подобие траекторий частиц (автомодельность). Скорость в момент $t = 0$ всюду одинакова и направлена в центр, т. е. получаем исходное состояние известного решения Л. И. Седова о фокусировке газа в точке [6]. Оно описывается продолжением кривых за точку O до пересечения с линией MN . Из центра идет ударная волна OB , за которой газ покоится.

Крайняя нижняя кривая AO (фиг. 2) соответствует покою и отсутствию сжатия ($a = -b$, $u = 0$), верхняя, примыкающая к SO , — бесконечным значениям скорости и сжатия. Последнее видно из того, что при движении по кривой, близкой к SO , τ меняется медленно (в S и в O $\tau = 0$), т. е. $m = 0$ и по (5) скорость u бесконечна. Следовательно, можно указать законы движения выделенной частицы и изменения давлений в ней, при которых реализуется любое сжатие первоначально однородной сферы от 1 до ∞ причем конечные состояния также однородны.

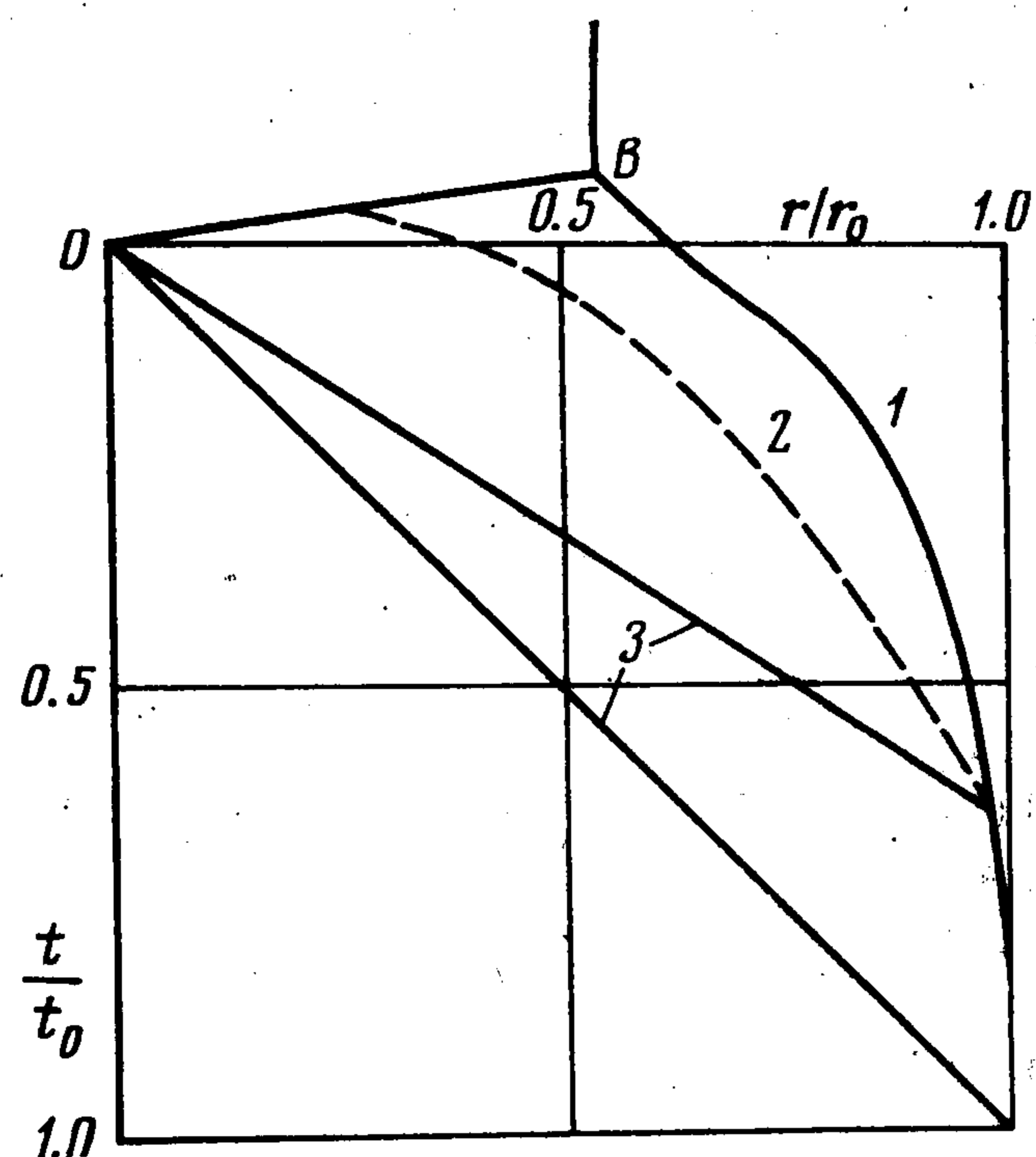
Близкими по характеру являются решения, отвечающие интегральным кривым внутри криволинейного треугольника BSO на фиг. 2 и их продолжениям до пересечения с MN . Физически им соответствует схождение оболочки, на внутренней границе которой $c = 0$ и $u = \text{const}$. Линия BS отвечает коллапсу. При этом асимптотическое изменение величин такое же, как для центрированной волны (4).

Таким образом, в сферических первоначально однородных системах могут осуществляться течения типа центрированных волн сжатия. При этом достигается бесконечное сжатие конечной массы вещества. Энергия, затрачиваемая на сжатие, также стремится к бесконечности.

По аналогии с [7] можно указать другие решения с такими же свойствами, например при степенной зависимости автомодельной переменной $\tau \sim t/r^q$ ($q > 1$). Однако



Фиг. 3



Фиг. 4

они соответствуют физически искусственным специально создаваемым профилям. Некоторые из них могут все же реализоваться как предельные для реальных движений [7]. Результаты данной работы дополняют исследование [5] при $q = 1$.

Полученные в работе асимптотические выражения для изменения газодинамических величин совпадают с решениями, приведенными в [3,4]. Однако в отличие от рассмотренных в этих работах случаев обсуждаемое решение для центрированной волны, как и для близких по характеру сферических квазипростых волн, не требует создания специальных профилей величин. Это позволяет надеяться на возможность экспериментальной реализации полученных результатов в опытах, аналогичных [2,8].

Поступила 12 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М., Гостехиздат, 1955, стр. 205.
2. Clarke J., Fisher H. M., Mason R. J. Laser-driven implosion of spherical DT targets to thermonuclear burn conditions. Phys. Rev. Letters, 1973, vol. 30, No. 3, p. 82—92.
3. Kidder R. E. Theory of homogeneous isentropic compression and its applications to laser fusion. Nucl. Fusion, 1974, vol. 14, No. 1, p. 53—60.
4. Змитриенко Н. В., Курдюмов С. П. Автомодельный режим сжатия конечной массы плазмы. Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 6.
5. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Изд-во иностр. лит., 1950, стр. 390.
6. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехиздат, 1954, стр. 182.
7. Годунов С. К., Куреева И. Л. О некоторых автомодельных движениях идеального газа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, т. 8, № 2.
8. Nuckolls J., Wood L., Thiessen A., Zimmerman G. Laser compression of matter to super-high densities thermonuclear (CTR) applications. Nature, 1972, vol. 239, No. 5368, p. 139.

Технический редактор З. В. Филиппова

Сдано в набор 24.03.78

Подписано к печати 01.06.78

Т-00377 Формат бумаги 70×108^{1/16}

Высокая печать

Усл. печ. л. 16,8 Уч.-изд. л. 16,0 Бум. л. 6 Тираж 2930 экз.

Зак. 325

Издательство «Наука». 103717, Москва, Подсосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука». 121099, Москва, Шубинский пер., 10