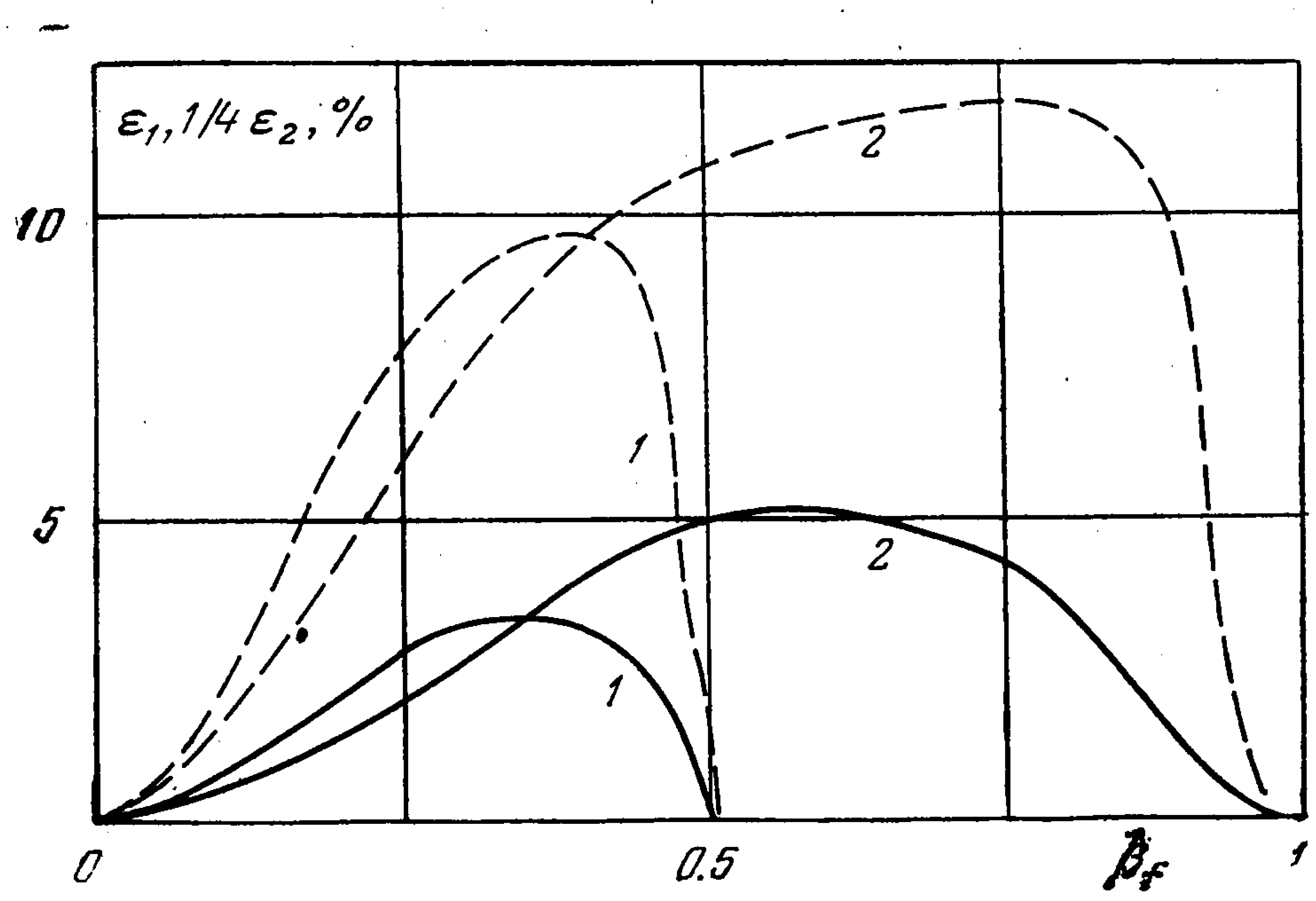

Фиг. 4

нуля в точку β_f с $u_2 = U$ за время t_1 и затем система переводится из точки $(0, \beta_f)$ в точку (α_f, β_f) за время t_2 с $u_1 = U$. Нетрудно подсчитать, что

$$t_1 = U^{-1} \sin \beta_f,\ t_2 = U^{-1} \ln \operatorname{tg} (\alpha_f / 2 + \pi / 4),\ t_{f1} = t_1 + t_2$$

На фиг. 4 штриховыми линиями показаны зависимости относительной ошибки $\varepsilon_2 = (t_{f1} - t_f) t_f^{-1} \times 100\%$ для тех же изохрон. Сравнивая графики относительных ошибок, можно заключить, что предложенный квазиоптимальный способ управления по быстродействию отличается от оптимального не более чем на 5%. Второй способ управления, являющийся достаточно простым в реализации, допускает проигрыш в быстродействии до 45%.

Анализируя оптимальное по быстродействию управление и предлагаемые управления, отличные от оптимального, видно из (1.3) и кривых ε_1, ε_2 (фиг. 4), что все рассмотренные управления по времени перевода эквивалентны, если конечные точки имеют координаты: $(\alpha_f, \beta_f \approx 0)$, $(\alpha_f \approx 0, \beta_f)$.

Поступила 28 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Доу Р. Б.* Основы теории современных снарядов. М., «Наука», 1964.
2. *Ройтенберг Я. Н.* Об ускоренном приведении гироскопического комплекса в меридиан. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
3. *Frik M.* Zeitoptimale Steuerung des Einstellvorganges bei Kreiselkompassen. Ingr-Arch., 1966, Bd 35, H4.
4. *Ривкин С. С.* Теория гироскопических устройств, ч. 1. Л., Судпромгиз, 1962.
5. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.

УДК 62—50

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ СЛАБОУПРАВЛЯЕМЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

А. А. Любушин

(Москва)

Дается обоснование метода малого параметра [1] для приближенного решения одного класса задач оптимального управления. Оценивается скорость сходимости метода.

1. Постановка задачи. Пусть имеется слабоуправляемая система

$$x^\cdot = f^0(x, t) + \varepsilon f^1(x, t, u), \quad \varepsilon \in [0, \delta],\ u \in U \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный вектор, u— r-мерный управляющий вектор, ε — положительный параметр, U — компактное множество в r-мерном евклидовом пространстве. Процесс начинается в фиксированной точке

(1.2) $$x(t_0) = a$$

Функцию $u(t)$ будем называть допустимым управлением, если эта функция измерима и $u(t) \in U$ для всех t. Решение задачи Коши для уравнения (1.1) при начальном условии (1.2) и при фиксированных допустимом управлении $u(t)$ и $\varepsilon \in (0, \delta]$ будем обозначать $x_u^\varepsilon(t)$. Обозначим через T_u^ε первый момент времени, когда траектория $x_u^\varepsilon(t)$ достигнет поверхности $g(x, t) = 0$, где $g(x, t)$ — некоторая скалярная функция, т. е. T_u^ε — наименьшее решение уравнения

(1.3) $$g(x_u^\varepsilon(t), t) = 0, \quad t > t_0$$

Поставим вариационную задачу: для данного $\varepsilon \in (0, \delta]$ найти функцию $u^\varepsilon(t)$ (оптимальное управление), реализующую минимум функционала

(1.4) $$J_u^\varepsilon = F(x_u^\varepsilon(T_u^\varepsilon), T_u^\varepsilon)$$

по всевозможным допустимым управляющим функциям $u(t)$. Здесь $F(x, t)$ — некоторая скалярная функция.

Особенность этой задачи заключается в том, что если параметр ε обращается в нуль, то система (1.1) становится неуправляемой (перестает зависеть от u).

Предположим, что для всех $\varepsilon \in (0, \delta]$ существует оптимальное управление $u^\varepsilon(t)$. Обозначим через $x^\varepsilon(t)$, T^ε оптимальную траекторию и момент окончания оптимального процесса. Необходимые условия оптимальности в данном случае имеют следующий вид [1]. Существует вектор-функция $p^\varepsilon(t)$, такая, что

(1.5) $$p^{\varepsilon\cdot} = -\nabla H(x^\varepsilon(t), t, u^\varepsilon(t), p^\varepsilon(t), \varepsilon)$$

(1.6) $$p^\varepsilon(T^\varepsilon) = \left(\frac{F'}{g'}\nabla g - \nabla F\right)\Big|_{x^\varepsilon(t),\, u^\varepsilon(t),\, t=T^\varepsilon}$$

(1.7) $$(p^\varepsilon(t), f^1(x^\varepsilon(t), t, u^\varepsilon(t)) = \max_{u\in U}(p^\varepsilon(t), f^1(x^\varepsilon(t), t, u)), \quad t \in [t_0, T^\varepsilon]$$

Здесь

$$H(x, t, u, p, \varepsilon) = (p, f^\circ(x, t)) + \varepsilon(p, f^1(x, t, u))$$

$$F' = F_t(x, t) + (\nabla F(x, t), f^\circ(x, t) + \varepsilon f^1(x, t, u))$$

Функция g' выписывается аналогично F'. Очевидно, g' и F' — полные производные функций g и F вдоль траектории системы (1.1).

Метод малого параметра заключается в следующем [1]. Положим формально в (1.1) $\varepsilon = 0$, тогда получим следующую задачу Коши: $x^\cdot = f^\circ(x, t)$, $x(t_0) = a$.

Обозначим ее решение через $x^\circ(t)$ и найдем момент времени T° как первый корень уравнения $g(x^\circ(t), t) = 0$. Теперь положим $\varepsilon = 0$ в правых частях формул (1.5) и (1.6), в результате получим

(1.8) $$p^\cdot = -A^*(t)p$$

$$p(T^\circ) = \left[\frac{F'(x^\circ(t), t)}{g'(x^\circ(t), t)}\nabla g(x^\circ(t), t) - \nabla F(x^\circ(t), t)\right]\Big|_{t=T^\circ}$$

Здесь $A(t) = \partial f^\circ(x^\circ(t), t) / \partial x$ — матрица с компонентами $\partial f_i^\circ(x^\circ(t), t) / \partial x_j$, $A^*(t)$ — транспонированная матрица.

Решение этой задачи Коши обозначим $p^\circ(t)$. Затем обозначим

$$h^\varepsilon(t, u) = (p^\varepsilon(t), f^1(x^\varepsilon(t), t, u)), \quad h^\circ(t, u) = (p^\circ(t), f^1(x^\circ(t)\, t, u))$$

Довольно очевидно, что $x^\varepsilon(t) = x^\circ(t) + O(\varepsilon)$, $p^\varepsilon(t) = p^\circ(t) + O(\varepsilon)$. Тогда $h^\varepsilon(t, u) = h^\circ(t, u) + O(\varepsilon)$ и естественно искать приближение к оптимальному управлению $u^{\varepsilon}(t)$ как решение такого уравнения:

$$h^{\circ}(t, u) = \max_{u \in U} h^{\circ}(t, u) \tag{1.9}$$

Функцию, реализующую максимум $h^{\circ}(t, u)$ на множестве U, обозначим $u^{\circ}(t)$. Очевидно, что $u^{\circ}(t) \in U$, и, кроме того, можно доказать, что функция $u^{\circ}(t)$ измерима (частный случай леммы А. Ф. Филиппова, см. [2], стр. 172). Следовательно, $u^{\circ}(t)$ — допустимое управление. Функция $u^{\circ}(t)$, удовлетворяющая (1.9), может быть неединственной, в этом случае берется произвольная функция, для которой справедливо уравнение (1.9).

Возникает вопрос: как связано найденное таким формальным способом управление $u^{\circ}(t)$ с оптимальным $u^{\varepsilon}(t)$. Если взять произвольно допустимое управление $u(t)$, то $J^{\varepsilon}_{u^{\varepsilon}} - J_u^{\varepsilon} = O(\varepsilon)$ равномерно по $u(t)$, так как $x_u^{\varepsilon}(t) - x^{\circ}(t) = O(\varepsilon)$. Ниже показано, что при некоторых достаточно общих предположениях $J^{\varepsilon}_{u^{\varepsilon}} - J_{u^{\circ}}^{\varepsilon} = O(\varepsilon^2)$.

2. Вспомогательные утверждения. Пусть выполнены следующие условия:

1) функции $f^{\circ}(x, t)$ и $f^1(x, t, u)$ дважды непрерывно дифференцируемы по x и непрерывны по (t, u);

2) функция $g(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируема по (x, t), функция $\varphi^{\circ}(t) \equiv g(x^{\circ}(t), t)$ обращается в нуль в момент $T^{\circ} > t_0$, причем $\varphi^{\circ}(t) \neq 0$ для $t \in [t_0, T^{\circ})$ и

$$\varphi^{\circ\cdot}(T^{\circ}) \neq 0 \tag{2.1}$$

3) существует такая постоянная $b > 0$, что для всех $\varepsilon \in [0, \delta]$, для всех допустимых $u(t)$ и для любых $t \in [t_0, T^*]$, где T^* — некоторый момент времени, бóльший T°, справедливо неравенство

$$|x_u^{\varepsilon}(t)| \leqslant b \tag{2.2}$$

4) функция $F(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируема; 5) для всех $\varepsilon \in (0, \delta]$ существует оптимальное управление u^{ε}. При условиях 1) — 5) справедливы следующие леммы.

Лемма 1. Для всех $\varepsilon \in [0, \delta]$ и для любых допустимых $u(t)$

$$x_u^{\varepsilon}(t) = x^{\circ}(t) + \varepsilon x_u^1(t) + O(\varepsilon^2) \tag{2.3}$$

где $x_u^1(t)$ — решение уравнения

$$x_u^{1\cdot} = A(t) x_u^1 + f^1(x^{\circ}(t), t, u(t)), \qquad x_u^1(t_0) = 0 \tag{2.4}$$

Оценку (2.3) надо понимать так: существует постоянная $\beta > 0$, не зависящая ни от $\varepsilon \in [0, \delta]$, ни от выбора допустимого управления $u(t)$, ни от $t \in [t_0, T^*]$, такая, что

$$|x_u^{\varepsilon}(t) - x^{\circ}(t) - \varepsilon x_u^1(t)| \leqslant \varepsilon^2 \beta, \quad t \in [t_0, T^*]$$

Лемма 1 доказывается с помощью стандартных рассуждений, используемых при доказательстве разложения решений регулярно возмущенных дифференциальных уравнений в ряд по малому параметру. Двукратная непрерывная дифференцируемость функций f° и f^1 по x позволяет разложить $x_u^{\varepsilon}(t)$ с точностью до ε^2, уравнение (2.4) для $x_u^1(t)$ получается очевидным образом, факт равномерности оценки (2.3) по допустимым $u(t)$ (т. е. то, что постоянная β не зависит от выбора $u(t)$) устанавливается с использованием равномерной ограниченности траекторий уравнения (1.1) на $[t_0, T^*]$, т. е. с помощью неравенства (2.2).

Лемма 2. Существует число δ^*: $0 < \delta^* \leqslant \delta$, такое, что для всех $\varepsilon \in [0, \delta^*]$ и для любого допустимого $u(t)$ существует момент времени T_u^{ε}, когда траектория $x_u^{\varepsilon}(t)$ достигает поверхности $g(x, t) = 0$, причем $T_u^{\varepsilon} \leqslant T^*$.

Смысл этой леммы достаточно очевиден: так как все траектории уравнения (1.1) лежат в ε-окрестности траектории $x^{\circ}(t)$, а последняя «достаточно нормально» входит в терминальную поверхность в момент времени T° (в силу неравенства 2.1), то при достаточно малых ε все траектории также достигают терминальной поверхности в момент времени T_u^{ε}, отличающийся от T° на величину порядка ε.

Лемма 3. Для любых $\varepsilon \in [0, \delta^*]$ и для всех допустимых $u(t)$

$$T_u^\varepsilon = T^\circ + \varepsilon T_u^1 + O(\varepsilon^2) \tag{2.5}$$

равномерно по $u(t)$, где

$$T_u^1 = -(\nabla g(x^\circ(T^\circ), T^\circ), x_u^1(T^\circ)) / \varphi^{\cdot\circ}(T^\circ) \tag{2.6}$$

Доказательство. Используя оценку (2.3) и условие 2), получим

$$\varphi_u^\varepsilon(t) \equiv g(x_u^\varepsilon(t), t) = \varphi^\circ(t) + \varepsilon(\nabla g(x^\circ(t), t), x_u^1(t)) + O(\varepsilon^2)$$

$$\varphi_u^\varepsilon(T_u^\varepsilon) = 0 = \varphi^\circ(T_u^\varepsilon) + \varepsilon(\nabla g(x^\circ(T_u^\varepsilon), T_u^\varepsilon), x_u^1(T_u^\varepsilon)) + O(\varepsilon^2)$$

Будем искать T_u^ε в виде $T_u^\varepsilon = T^\circ + \varepsilon T_u^1 + O(\varepsilon^2)$. Тогда легко получить формулу (2.6). Равномерность оценки (2.5) доказывается с использованием непрерывной дифференцируемости функции $\varphi^\circ(t)$ и условия (2.2).

Лемма 4. Для любого $\varepsilon \in [0, \delta^*]$ и для всех допустимых $u(t)$

$$J_u^\varepsilon = F(x^\circ(T^\circ), T^\circ) - \varepsilon(p^\circ(T^\circ), x_u^1(T^\circ)) + O(\varepsilon^2) \tag{2.7}$$

равномерно по $u(t)$, где $p^\circ(T^\circ)$ определяется правой частью второй формулы (1.8).

Доказательство. Используя оценку (2.3) и условие 4), получим

$$J_u^\varepsilon = F(x^\circ(T^\circ), T^\circ) + \varepsilon[F'(x^\circ(T^\circ)T^\circ)T_u^1 + (\nabla F(x^\circ(T^\circ), T^\circ), x_u^1(T^\circ))] + O(\varepsilon^2)$$

Подставляя сюда T_u^1 из (2.6), получим (2.7).

Лемма 5. Для всех $\varepsilon \in (0, \delta^*]$ равномерно по $t \in [t_0, T^*]$

$$p^\varepsilon(t) = p^\circ(t) + O(\varepsilon) \tag{2.8}$$

Доказательство этой леммы непосредственно следует из двукратной непрерывной дифференцируемости функций F, g, f°, f^1 по x и из оценок (2.3), (2.5).

Обозначим $T^{\circ\varepsilon} = \min\{T^\circ, T^\varepsilon\}$. Очевидно, что $T^\circ - T^{\circ\varepsilon} = O(\varepsilon)$.

Лемма 6. Существует постоянная $\varkappa > 0$, такая, что

$$0 \leqslant h^\circ(t, u^\circ(t)) - h^\circ(t, u^\varepsilon(t)) \leqslant 2\varepsilon\varkappa, \quad \varepsilon \in (0, \delta^*], \quad t \in [t_0, T^{\circ\varepsilon}] \tag{2.9}$$

Доказательство. Из оценок (2.3), (2.5), (2.8) и гладкости функции f^1 по x следует существование некоторой постоянной $\varkappa > 0$, такой, что

$$|h^\varepsilon(t, u) - h^\circ(t, u)| \leqslant \varepsilon\varkappa, \quad t \in [t_0, T^{\circ\varepsilon}], \quad \varepsilon \in (0, \delta^*], \quad u \in U$$

Отсюда получаем

$$h^\varepsilon(t, u^\varepsilon(t)) - h^\circ(t, u^\varepsilon(t)) \leqslant \varepsilon\varkappa, \quad h^\circ(t, u^\circ(t)) - h^\varepsilon(t, u^\circ(t)) \leqslant \varepsilon\varkappa$$

Кроме того, в силу (1.7) $h^\varepsilon(t, u^\circ(t)) - h^\varepsilon(t, u^\varepsilon(t)) \leqslant 0$. Сложив последние три неравенства, получим

$$h^\circ(t, u^\circ(t)) - h^\circ(t, u^\varepsilon(t)) \leqslant 2\varepsilon\varkappa.$$

Теперь, из того, что $u^\circ(t)$ — решение уравнения (1.9), следует оценка (2.9).

3. Основная теорема. Если выполнены условия 1) — 5), то

$$J_{u^\varepsilon}^\varepsilon - J_{u^\circ}^\varepsilon = O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \in (0, \delta^*] \tag{3.1}$$

Доказательство. Обозначим $\Delta x^1(t) = x_{u^\circ}^1(t) - x_{u^\varepsilon}^1(t)$. Тогда из (2.7) имеем

$$J_{u^\varepsilon}^\varepsilon - J_{u^\circ}^\varepsilon = \varepsilon(p^\circ(T^\circ), \Delta x^1(T^\circ)) + O(\varepsilon^2) = \varepsilon \int_{t_0}^{T^\circ} [(p^{\circ\cdot}(t), \Delta x^1(t)) + (p^\circ(t), \Delta x^{1\cdot}(t))]\, dt + O(\varepsilon^2)$$

Подставляя теперь

$$p^{\circ\cdot} = -A^* p^\circ, \quad \Delta x^{1\cdot} = A\Delta x^1 + f^1(x^\circ(t), t, u^\circ(t)) - f^1(x^\circ(t), t, u^\varepsilon(t))$$

получим следующее выражение:

$$J^{\varepsilon}_{u^{\varepsilon}} - J^{\varepsilon}_{u^{\circ}} = \varepsilon \int\limits_{t_0}^{T^{\circ}\varepsilon} [h^{\circ}(t, u^{\circ}(t)) - h^{\circ}(t, u^{\varepsilon}(t))]dt +$$

$$+ \varepsilon \int\limits_{T^{\circ}\varepsilon}^{T^{\circ}} [h^{\circ}(t, u^{\circ}(t)) - h^{\circ}(t, u^{\varepsilon}(t))]\, dt + O(\varepsilon^2)$$

В первом интеграле подынтегральное выражение имеет порядок ε в силу леммы 6. Во втором интеграле промежуток интегрирования имеет порядок ε, а подынтегральное выражение заведомо ограничено. Поэтому вся правая часть последней формулы имеет порядок ε^2. Теорема доказана.

Автор благодарит Ф. Л. Черноусько за полезные критические замечания, сделанные в ходе работы над статьей.

Поступила 31 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф. Л.* Некоторые задачи оптимального управления с малым параметром. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
2. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Качественная теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1971.

УДК 533.6.011

СФЕРИЧЕСКАЯ ЦЕНТРИРОВАННАЯ ВОЛНА СЖАТИЯ

И. Е. Забабахин, В. А. Симоненко
(Челябинск)

Получено решение, отвечающее изэнтропическому сжатию идеального газа в сферической центрированной волне. При этом осуществляется бесконечное сжатие конечной массы первоначально однородного вещества. Конкретные результаты приводятся для показателей адиабаты, равных 3 и $^5/_3$, асимптотические выражения в общем случае. Обсуждается связь полученного решения с известными.

Центрированные волны разрежения с характеристиками, исходящими из одной точки, являются широко известным классом автомодельных решений уравнений газовой динамики для одномерного плоского случая. Аналогичное решение для плоских волн сжатия было построено К. П. Станюковичем [1]. В последнее время большое внимание уделяется случаям изэнтропического коллапса — схождения массы в центр. В частности, получена асимптотика изменения давления от времени для частиц вещества при таких движениях [2], дано аналитическое решение для нового класса автомодельных задач об изэнтропическом коллапсе при специальном профиле плотности в волне сжатия [3,4].

Ниже дается решение задачи о сферической центрированной волне сжатия, граничащей с однородным первоначально покоящимся веществом (см. фиг. 1), где *1* — «траектория» частицы, *2* — β-характеристики, *3* — τ-линии. Случай с коллапсом— предельный в классе автомодельных решений, известных как сферические квазипростые волны [5].

Пусть сжимающееся вещество — идеальный газ с начальными значениями давления, плотности и скорости звука p_0, ρ_0 и c_0 соответственно. Показатель адиабаты $\gamma = 3$, при этом формулы отличаются простотой (для других значений γ приведем лишь некоторые окончательные результаты). Отметим, что аналогичные результаты можно получить для конденсированного вещества с уравнением состояния типа $p = \gamma^{-1}\rho_0 c_0^2 [(\rho / \rho_0)^{\gamma} - 1]$. Роль p_0 в этом случае играет $\gamma^{-1}\rho_0 c_0^2$.

В переменных Римана уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \alpha\frac{\partial\alpha}{\partial r} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2r} = 0, \quad \frac{\partial\beta}{\partial t} + \beta\frac{\partial\beta}{\partial r} + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2r} = 0 \tag{1}$$