

Ось чувствительности датчика угловой скорости составляет с осями базиса xuz равные углы $n = \|\frac{1}{\sqrt{3}} / \sqrt{3} / \sqrt{3}\|'$. Вектор l в системе оценки состояния (2.2) и матрица K в законе управления (2.7) принимаются соответственно равными [1]

$$l = \|\ -3.62 \quad -37.80 \quad 41.91 \ \|'$$

$$K = \text{diag} \{-1.25 \cdot 10^5, \quad -6.9 \cdot 10^5, \quad -7.1 \cdot 10^5\}$$

а весовые коэффициенты μ и ν в квадратичной форме (2.4) — $\mu = 1.25 \cdot 10^2$ н·м, $\nu = 6.9 \cdot 10^6$ н·м·сек⁻¹.

Вопрос о выборе начального условия в системе оценки состояния решается аналогично работе [1].

В момент начала управляемого движения тела рассогласование между осью z (вектор ξ) и требуемым направлением (вектор η) составляет 90°. Начальные значения остальных параметров ориентации даны на фигуре (а). Кривыми 1, 2, 3 на фигуре показан характер изменения направляющих косинусов η_x (xuz) в процессе управления (а) и изменения во времени угловых скоростей ω_x , ω_y и ω_z объекта (б).

Из анализа характера изменения параметров ориентации оси вращения и вектора угловой скорости ω следует, что в процессе управляемого движения тело асимптотически стремится к требуемому режиму движения.

Поступила 25 III 77

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев Д. В. К управлению вращательным движением твердого тела при неполной информации о векторе угловой скорости. ПММ, 1977, т. 41, вып. 2.
2. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Наука», 1965.
3. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения, М., «Наука», 1966.
4. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. М., «Наука», 1970.
5. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М., «Наука», 1973.
6. Seltzer S. M., Schweitzer G., Asner B., Jr. Attitude control of a spinning skylab. J. Spacecraft and Rockets, 1973, vol. 10, No. 3.

УДК 531

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ КОРРЕКЦИИ ГИРОСКОПА

В. Г. Гетманов

(Москва)

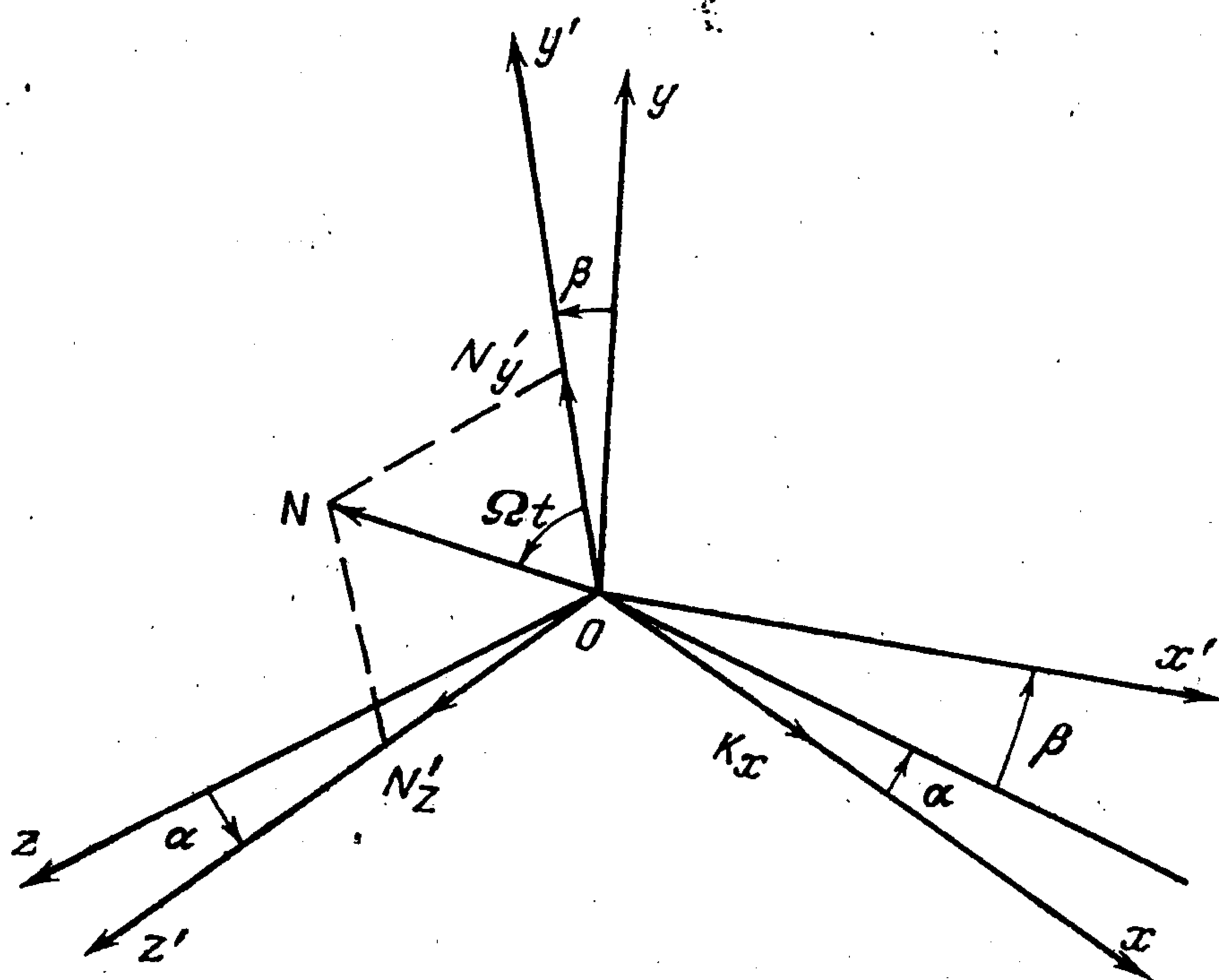
Рассматривается электромагнитная коррекция гироскопа (см. [1], стр. 409). Предполагается, что намагниченный ротор вращается в соленоиде. Управление перемещениями оси ротора осуществляется регулированием амплитуды и фазы тока в обмотке соленоида. Исследуется оптимальное по быстродействию управление угловыми перемещениями оси ротора. Статья по содержанию примыкает к работам [2, 3].

1. Для способа коррекции, описанного в [1], механический момент M , действующий на ротор, вычисляется как векторное произведение: $M = N \times K$, где N — вектор магнитного момента ротора, вращающийся в экваториальной плоскости, K — вектор напряженности магнитного поля соленоида. На фиг. 1 изображены оси подвижной и неподвижной систем координат: ось OX' совпадает с осью ротора, $OY'Z'$ — экваториальная плоскость, Ox — продольная ось соленоида. Проекция вектора магнитного момента на подвижные и неподвижные оси запишутся следующим образом:

$$N_{x'} = 0, \quad N_{y'} = N_0 \cos \Omega t, \quad N_{z'} = N_0 \sin \Omega t$$

$$N_x = N_{z'} \sin \alpha - N_{y'} \sin \beta \cos \alpha, \quad N_y = N_{y'} \cos \beta,$$

$$N_z = N_{z'} \cos \alpha + N_{y'} \sin \alpha \sin \beta$$



Фиг. 1

Вектор напряженности магнитного поля в соленоиде имеет только продольную составляющую: $K_y = K_z = 0$, $K_x = K \cos(\Omega t + \varphi)$. Система регулирования устроена таким образом, что амплитуда напряженности поля подвержена ограничению $|K| \leq K_0$. Составляющие вектора механического момента, если раскрыть векторное произведение, таковы: $M_x = 0$, $M_y = K_x N_z$, $M_z = -K_x N_y$. Подставим выражения для K_x , N_y , N_z и получим формулы для механических коррекционных моментов

$$(1.1) \quad \begin{aligned} M_y &= K \cos(\Omega t + \varphi) [N_0 \sin \Omega t \cos \alpha + N_0 \cos \Omega t \sin \alpha \sin \beta] \\ M_z &= -K \cos(\Omega t + \varphi) N_0 \cos \Omega t \cos \beta \end{aligned}$$

Ограничимся изучением прецессионного движения. Уравнения перемещения оси ротора гироскопа относительно неподвижной системы координат возьмем из [4]

$$(1.2) \quad \alpha' = -\frac{M_z \cos \alpha}{H \cos \beta}, \quad \beta' = \frac{M_y}{H \cos \beta}$$

Видно, что выражения для моментов (1.1), если раскрыть произведения $\cos(\Omega t + \varphi) \sin \Omega t$, $\cos(\Omega t + \varphi) \cos \Omega t$, содержат слагаемые, колеблющиеся с частотой 2Ω , и слагаемое с множителями $\cos \varphi$, $\sin \varphi$. На практике, обычно выполняется соотношение $1 \ll 2\Omega$, и при интегрировании (1.2) без особого ущерба для точности можно отбросить высокочастотные слагаемые для моментов и рассматривать перемещения оси ротора только под действием заведомо плавных на длительных (по сравнению с $\pi\Omega^{-1}$) отрезках времени управляющих функций (слагаемые с $\cos \varphi$, $\sin \varphi$). Величина K из (1.1) входит линейно в правые части (1.2), поэтому при решении задачи максимального быстродействия видно, что остается всего лишь один управляющий параметр — фаза φ , и должно выполняться соотношение $K = K_0$. Обозначим

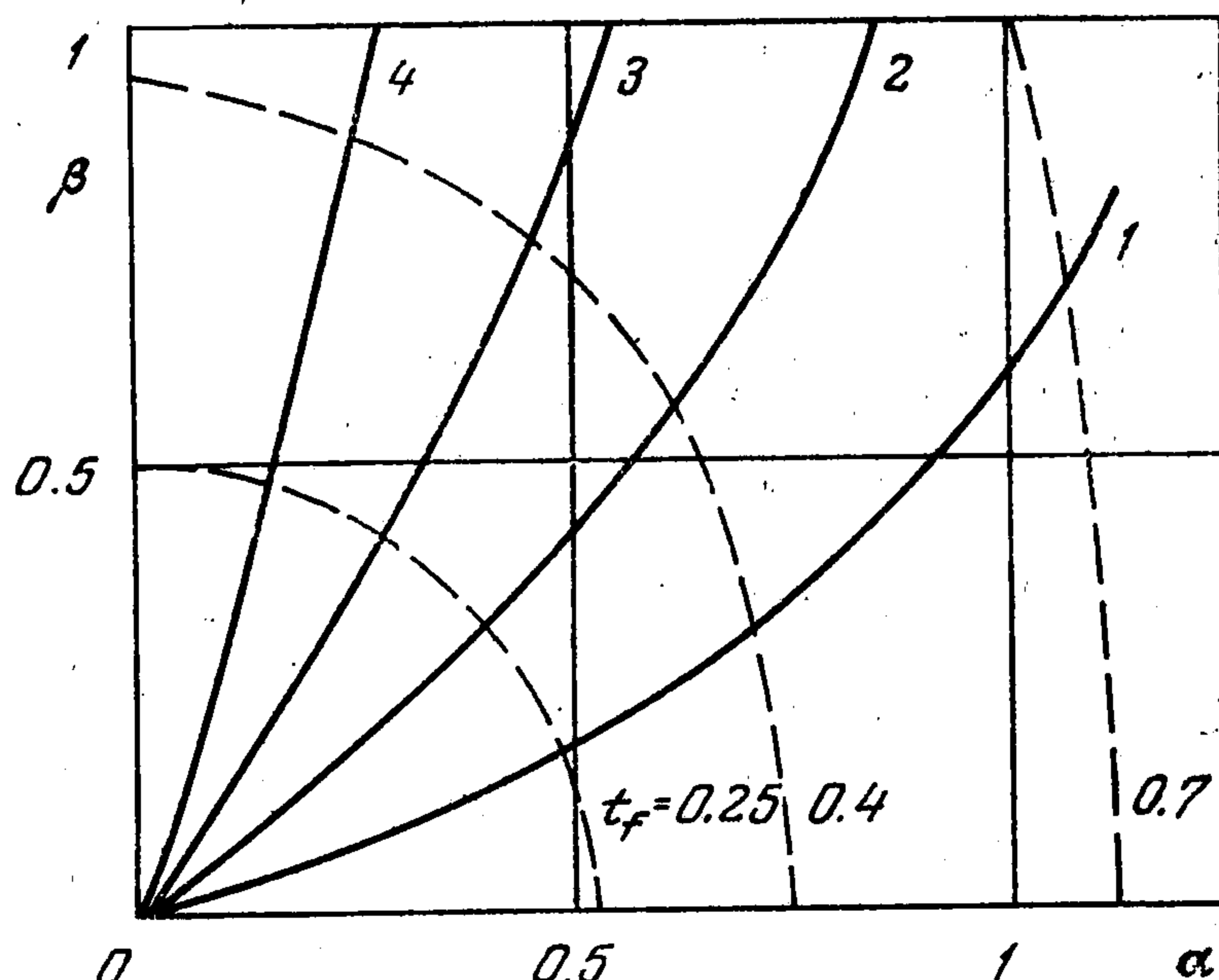
$$K_0 N_0 (2H)^{-1} = U, \quad u_1 = U \cos \varphi, \quad u_2 = U \sin \varphi$$

Тогда уравнения (1.2) примут вид

$$(1.3) \quad \alpha' = u_1 \cos \alpha, \quad \beta' = u_2 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + u_1 \sin \alpha \operatorname{tg} \beta$$

Начальные условия для (1.3) $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 0$. Управляющие функции связаны ограничением $u_1^2 + u_2^2 = U^2$. Регулируя фазу тока в обмотке соленоида, управ-

ляем системой (1.3): $\operatorname{tg} \varphi = u_2 (u_1)^{-1}$. Задача заключается в том, чтобы 1) исследовать оптимальный закон регулирования фазы во времени, переводящий систему (1.3) из начального состояния $\alpha(0), \beta(0)$ в заданное конечное состояние α_f, β_f за минимальное время t_f с учетом ограничения на вектор управляющего воздействия: $u_1^2 + u_2^2 = U^2$; 2) подыскать квазиоптимальный закон регулирования фазы, осуществляющий практически перевод системы из начальной точки в заданную, за время, близкое к оптимальному.



Фиг. 2

2. Воспользуемся процедурой принципа максимума [5]. Гамильтониан и уравнения для сопряженной системы имеют вид

$$(2.1) \quad H = -1 + \psi_1 u_1 \cos \alpha + \psi_2 \left(u_1 \sin \alpha \operatorname{tg} \beta + u_2 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right)$$

$$(2.2) \quad \psi_1' = \psi_1 u_1 \sin \alpha - \psi_2 u_2 \operatorname{tg} \beta \cos \alpha + \psi_2 u_2 \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$$

$$\psi_2' = -\psi_2 u_1 \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \beta} - \psi_2 u_2 \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos^2 \beta}$$

Следует отметить, что для решения задачи оптимизации с использованием [5] необходимо, чтобы правые части (1.3) были непрерывны по управлению и непрерывно дифференцируемы по переменным состояния. Для этого следует рассматривать (1.3) при $|\beta| \leq \beta^* < \pi/2$, α — любое. Сгруппируем в (2.1) члены при u_1 и u_2 . Видно, что оптимальное управление, максимизирующее (2.1), выражается следующим образом:

$$(2.3) \quad u_1^\circ(t) = f_1 \|f\|^{-1} U, \quad u_2^\circ(t) = f_2 \|f\|^{-1} U \\ f = (f_1, f_2), \quad f_1 = \psi_1 \cos \alpha + \psi_2 \sin \alpha \operatorname{tg} \beta, \quad f_2 = \psi_2 \cos \alpha \cos^{-1} \beta$$

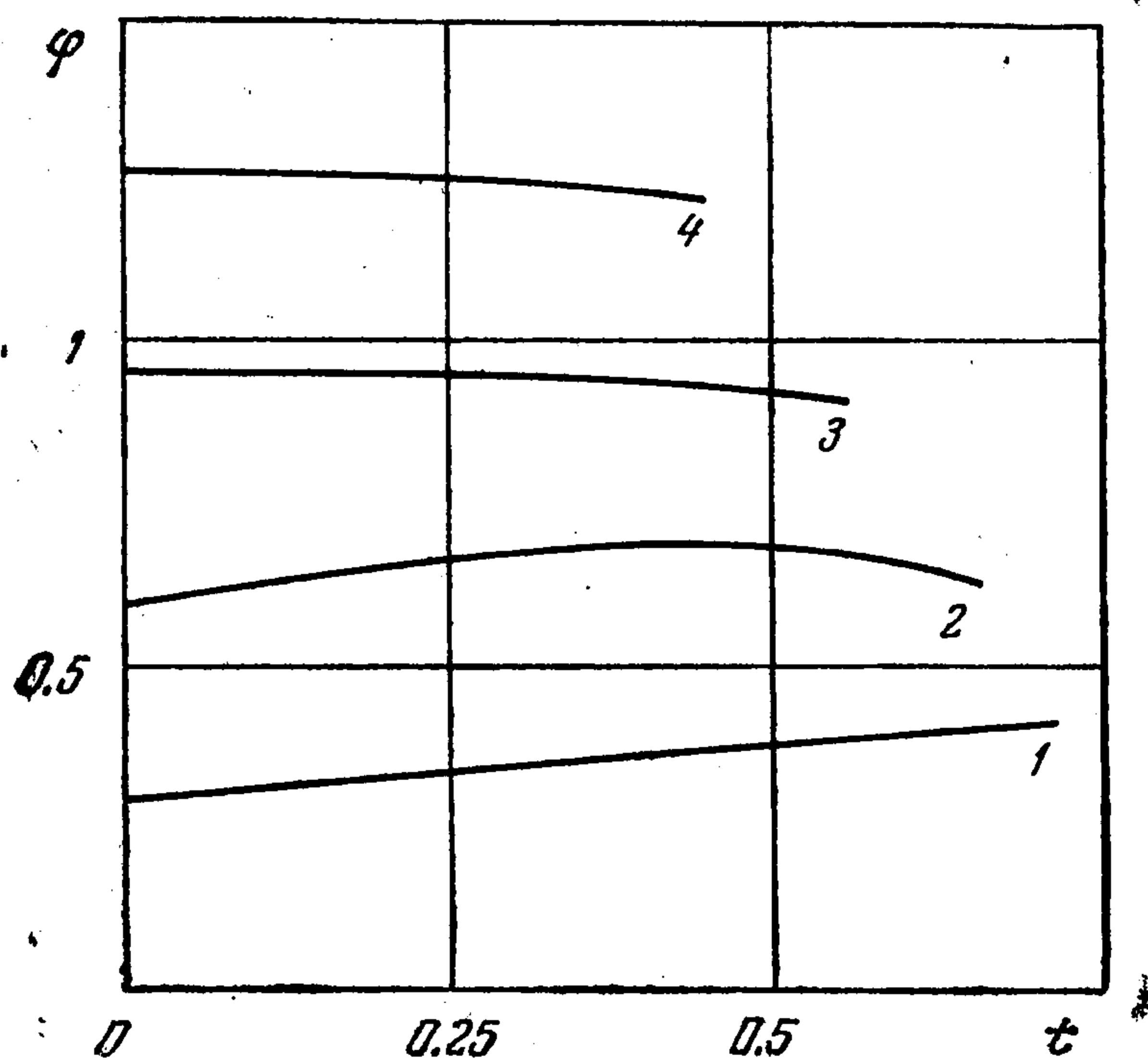
Нахождение оптимального управления, переводящего объект из начальной точки в заданную конечную точку за минимальное время, связано с решением краевой задачи для системы уравнений (1.3), (2.2) с учетом связи (2.3). Получение $u_1^\circ(t), u_2^\circ(t)$ как функций времени в аналитическом виде вряд ли возможно. Исследуем фазовые траектории системы (1.3), решая на ЦВМ систему (1.3), (2.2), (2.3), задав ряд начальных условий $\psi_1(0), \psi_2(0)$.

Известно, что вектор $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ определяется с точностью до постоянного множителя. Более того, оптимальные управления $u_1^\circ(t), u_2^\circ(t)$ как функции времени в данном случае зависят только от соотношения ψ_2 / ψ_1 (2.3). Поэтому будем задавать начальные условия для набора сопряженных переменных в виде $\psi_{1i} = \cos \theta_i, \psi_{2i} = \sin \theta_i$.

На фиг. 2 изображено семейство фазовых траекторий 1—4 для $\alpha \geq 0, \beta^* > \beta > 0$ и $U = 2, \theta_i = i\Delta\theta, \Delta\theta = 0.3, i = 1, \dots, 4$. Можно заметить, что для линейного приближения (1.3) оптимальные управления равны

$$u_1^\circ(t) = U \alpha_f [\alpha_f^2 + \beta_f^2]^{-1/2}, \quad u_2^\circ(t) = U \beta_f [\alpha_f^2 + \beta_f^2]^{-1/2}$$

При этом $\psi_1 = \psi_1(0) = u_1^\circ U^{-1}, \psi_2 = \psi_2(0) = u_2^\circ U^{-1}$. Видно, что для α, β , близких к нулю, фазовые траектории представляют собой прямые линии с угловым коэффициентом $\operatorname{tg} \theta_i$. Из (1.3) следует, что при замене знаков u_1, u_2 расположение фазовых траекторий будет симметрично относительно начала координат; если заменить только знак u_1 , то фазовые траектории станут симметричными относительно оси β . Штриховыми линиями соединены точки, для которых время максимального быстрогодействия t_f одинаково.



Фиг. 3

На фиг. 3 представлена зависимость фазы φ тока коррекции от времени для траекторий с номерами 1—4, полученные на ЦВМ. Видно, что оптимальное значение фазы φ практически постоянно в пределах времени управления. Воспользуемся этим фактом для того, чтобы сконструировать квазиоптимальное управление, переводящее систему в точку α_f, β_f при некоторых фиксированных u_1 и u_2 , обеспечивающих постоянство фазы.

3. Рассмотрим (1.3), полагая u_1 и u_2 постоянными по времени. Решение первого уравнения из (1.3) с учетом начального условия $\alpha(0) = 0$ имеет вид

$$(3.1) \quad \alpha = -\pi/2 + 2 \operatorname{arctg} E(t), \quad E(t) = \exp u_1 t$$

Тогда $\cos \alpha, \sin \alpha$ выражаются как функции времени следующим образом:

$$\cos \alpha = 2E(t) [1 + E^2(t)]^{-1}, \quad \sin \alpha = [E^2(t) - 1] [1 + E^2(t)]^{-1}$$

Второе из уравнений (1.3) становится линейным при подстановке $d\beta \cos \alpha = dx$

$$(3.2) \quad x' + p(x)x = q(t); \quad p(t) = -u_1 \sin \alpha, \quad q(t) = u_2 \cos \alpha$$

Решение (3.2) запишем в общем виде

$$x = \left\{ \int q(t) [\exp \int p(t) dt] dt + C \right\} \exp \left\{ - \int p(t) dt \right\}$$

Произведя интегрирование с учетом $x(0) = \sin \beta(0) = 0$, найдем выражение для β

$$(3.3) \quad \sin \beta = u_2 [E^2(t) - 1] [2u_1 E(t)]^{-1}, \quad 0 \leq \beta \leq \beta^*$$

Для заданных u_1, u_2 следует ограничивать временной интервал интегрирования $0 \leq t \leq t_0$, исходя из неравенства

$$\sin \beta^* > u_2 [E^2(t_0) - 1] [2u_1 E(t_0)]^{-1}$$

Из (3.1) и (3.3) найдем связь между u_1, u_2 и α_f, β_f

$$(3.4) \quad \sin \beta_f = u_2 (2u_1)^{-1} [\operatorname{tg}(\alpha_f/2 + \pi/4) - \operatorname{ctg}(\alpha_f/2 - \pi/4)]$$

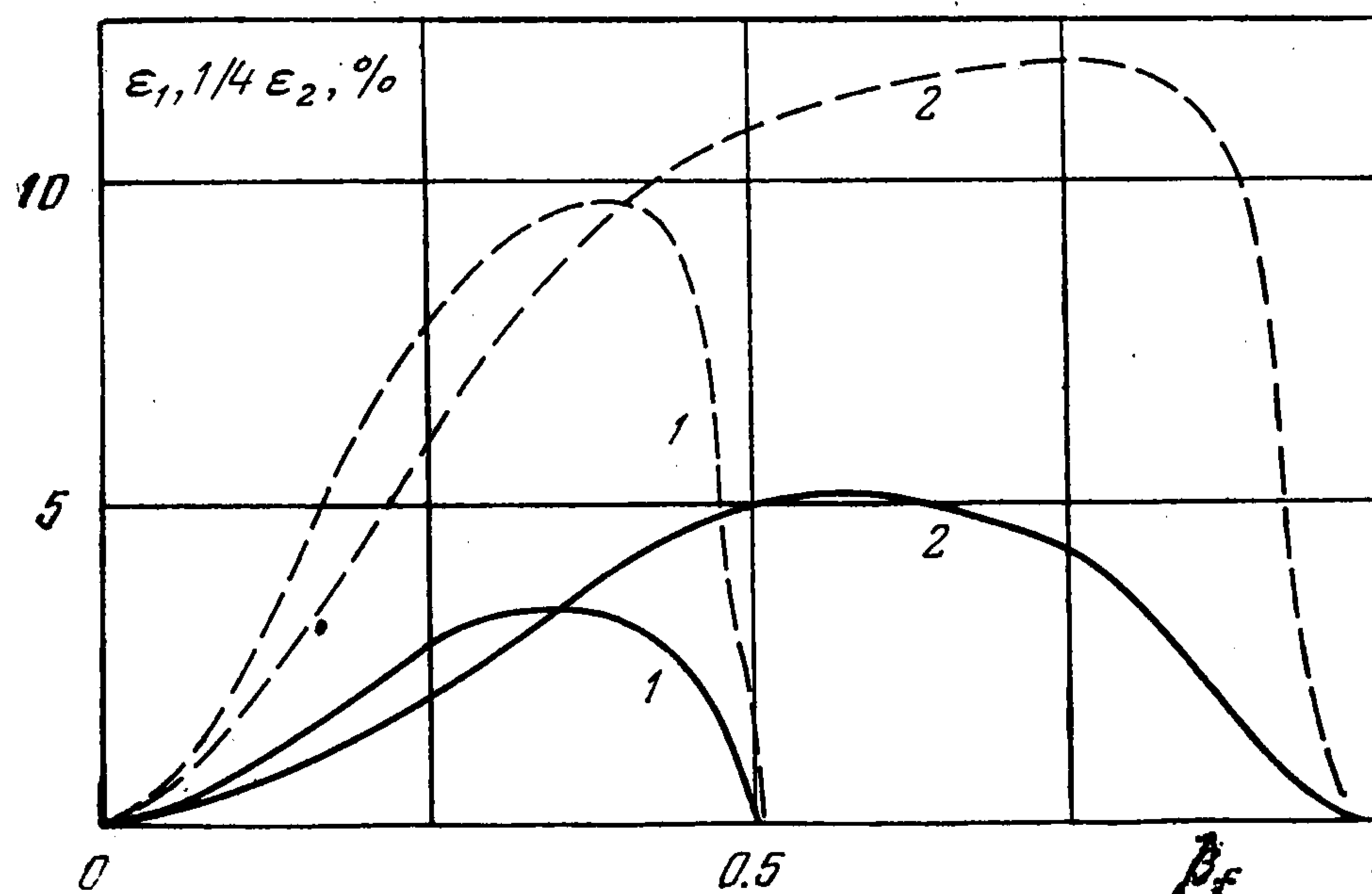
Пользуясь (3.4), по заданным координатам конечной точки α_f, β_f можно найти u_1, u_2 (имея в виду, что $u_1^2 + u_2^2 = U^2$). Можно проверить, что для линейного приближения $\alpha_f \rightarrow 0, \beta_f \rightarrow 0$ из (3.4) следует соотношение $u_2 u_1^{-1} = \beta_f \alpha_f^{-1}$, т. е. для малых углов предлагаемое управление становится оптимальным по быстродействию.

Оценим величину проигрыша во времени при использовании предлагаемого квазиоптимального закона управления. Для этого воспользуемся (3.1), чтобы выразить время перевода из точки в точку при квазиоптимальном движении (из выражения (3.1))

$$t_{f0} = u_1^{-1} \ln \operatorname{tg}(\alpha_f/2 + \pi/4)$$

Будем проводить сравнение с оптимальным по быстродействию движением, беря точки α_f, β_f , принадлежащие изохронам. На фиг. 4 сплошными линиями 1 и 2 изображены графики относительных потерь в быстродействии в процентах: $\varepsilon_1 = (t_{f0} - t_f) t_f^{-1} \times 100\%$ в зависимости от β_f для двух изохрон: $t_f = 0.25$ и $t_f = 0.4$ соответственно.

Для сравнения с предлагаемым квазиоптимальным управлением рассмотрим способ управления, заключающийся в том, что вначале система переводится по оси β из



Фиг. 4

нуля в точку β_f с $u_2 = U$ за время t_1 и затем система переводится из точки $(0, \beta_f)$ в точку (α_f, β_f) за время t_2 с $u_1 = U$. Нетрудно подсчитать, что

$$t_1 = U^{-1} \sin \beta_f, t_2 = U^{-1} \ln \operatorname{tg} (\alpha_f / 2 + \pi / 4), t_{f1} = t_1 + t_2$$

На фиг. 4 штриховыми линиями показаны зависимости относительной ошибки $\varepsilon_2 = (t_{f1} - t_f)t_f^{-1} \times 100\%$ для тех же изохрон. Сравнивая графики относительных ошибок, можно заключить, что предложенный квазиоптимальный способ управления по быстродействию отличается от оптимального не более чем на 5%. Второй способ управления, являющийся достаточно простым в реализации, допускает проигрыш в быстродействии до 45%.

Анализируя оптимальное по быстродействию управление и предлагаемые управления, отличные от оптимального, видно из (1.3) и кривых $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ (фиг. 4), что все рассмотренные управления по времени перевода эквивалентны, если конечные точки имеют координаты: $(\alpha_f, \beta_f \approx 0)$, $(\alpha_f \approx 0, \beta_f)$.

Поступила 28 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Доу Р. Б. Основы теории современных снарядов. М., «Наука», 1964.
2. Ройтенберг Я. Н. Об ускоренном приведении гироскопического комплекса в меридиан. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
3. Frik M. Zeitoptimale Steuerung des Einstellvorganges bei Kreiselkompassen. Ingr.-Arch., 1966, Bd 35, H4.
4. Ривкин С. С. Теория гироскопических устройств, ч. 1. Л., Судпромгиз, 1962.
5. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.

УДК 62—50

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ СЛАБОУПРАВЛЯЕМЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

А. А. Любушин

(Москва)

Дается обоснование метода малого параметра [1] для приближенного решения одного класса задач оптимального управления. Оценивается скорость сходимости метода.

1. Постановка задачи. Пусть имеется слабоуправляемая система

$$(1.1) \quad \dot{x} = f^0(x, t) + \varepsilon f^1(x, t, u), \quad \varepsilon \in [0, \delta], u \in U$$