Теорема 2. Если выполнены условия:

1) функция $V^\circ(q_1, q_2)$ удовлетворяет условиям леммы, 2) функция $V(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ не имеет строгого локального минимума в положении равновесия, то положение равновесия гамильтоновой системы

$$q_j^{\cdot} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad p_j^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

неустойчиво.

Автор благодарит В. В. Румянцева и участников руководимого им семинара за обсуждение статьи.

Поступила 21 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Изд. 2. М.— Л., ОНТИ, 1935.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М., Изд-во АН СССР, 1962.
3. *Koiter W. T.* On the instability of equilibrium in the absence of a minimum of potential energy. Proc. Koninkl. nederl. acad. wet. B, C, 1965, vol. 68.
4. *Hagedorn P.* Die Umkehrung der Stabilitäts-sätze von Zagrange-Dirichlet und Routh.-Orch. Rational Mech. and Analys., 1971, vol. 42, No 4.
5. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений М. — Л. Гостехиздат, 1947.
6. *Еругин Н. П.* Неявные функции. Изд-во ЛГУ, 1956.

УДК 531.381

О ПЕРЕВОДЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА В РЕЖИМ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ВРАЩЕНИЯ С ЗАДАННОЙ ОРИЕНТАЦИЕЙ ОСИ ВРАЩЕНИЯ

Д. В. Лебедев

(Киев)

Исследуется задача приведения твердого тела в режим установившегося вращения с заданной ориентацией оси вращения в инерциальном пространстве в условиях, когда информация о вращательном движении объекта поступает от одного жестко связанного с ним датчика угловой скорости. Отыскивается управляющий момент, обеспечивающий асимптотическую устойчивость рассматриваемого режима движения.

1. Постановка задачи. Введем жестко связанный с твердым телом трехгранник xyz. Обозначим через ξ и η неподвижные орты в базисе xyz и абсолютном пространстве XYZ соответственно.

Описывая вращательное движение твердого тела динамическими уравнениями Эйлера

$$I\omega^{\cdot} + \omega \times I\omega = M, \quad \omega = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}, \quad I = \operatorname{diag}\{I_x, I_y, I_z\} \tag{1.1}$$

будем для определенности считать $I_x < I_y < I_z$. Если в качестве оси установившегося вращения объекта принять ось z, то вектор $\xi = \{0, 0, 1\}$. Движение орта η в связанной с телом системе координат подчиняется уравнению

$$\eta^{\cdot} + \omega \times \eta = 0 \tag{1.2}$$

Предполагается, что измерению доступны вектор η и проекция вектора ω угловой скорости объекта на ось чувствительности датчика угловой скорости

$$\vartheta = n \cdot \omega, \quad n = \{\alpha, \beta, \gamma\} \tag{1.3}$$

где n — орт, жестко связанный с телом.

Ставится следующая задача. По информации о векторе η и угловой скорости ω в форме (1.3) сформировать управляющий момент $M = \{M_x, M_y, M_z\}$, обеспечивающий асимптотическую устойчивость режима установившегося вращения тела относительно оси с наибольшим моментом инерции при заданной ориентации оси z в инерциальном пространстве

$$\xi = \eta, \quad \omega = \omega_*, \quad \omega_* = \{0, 0, \Omega\}, \quad \Omega = \text{const} \tag{1.4}$$

2. Синтез управляющего момента. Представим уравнение (1.1) в виде

$$x^{\cdot} = Ax + I^{-1}(Ix \times x + M), \quad A = \begin{Vmatrix} 0 & a_1\Omega & 0 \\ a_2\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{2.1}$$

$$\omega = x + \omega_*, \quad a_1 = (I_y - I_z) I_x^{-1}, \quad a_2 = (I_z - I_x) I_y^{-1}$$

В новых переменных сформулированная задача сводится к обеспечению асимптотической устойчивости положения равновесия

$$\xi = \eta, \quad x = 0.$$

Будем считать выходом системы (2.1) скаляр $y = Cx$, $C = n'$.

Для оценки вектора x по доступной наблюдению информации используем введенную в [1] систему оценки состояния

$$z^{\cdot} = Az + l(y - Cz) + I^{-1}(Iz \times z + M) \tag{2.2}$$

В системе уравнений (1.2), (2.1) и (2.2) перейдем от переменных η, x и z к переменным η, x, $e = x - z$

$$\eta^{\cdot} = -(x + \omega_*) \times \eta, \quad x^{\cdot} = Ax + I^{-1}(Ix \times x + M), \qquad t \geqslant t_0 \tag{2.3}$$

$$e^{\cdot} = (A - lC)e + \Psi(x, e), \quad \Psi(x, e) = I^{-1}(Ix \times e + Ie \times x - Ie \times e)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$2V = \mu(\eta - \xi)^2 + x'Ix + \nu \int_{t_0}^{\infty} \|\Phi(t_0, \tau) e\|^2 d\tau, \quad \mu > 0, \quad \nu > 0 \tag{2.4}$$

в которой $\Phi(t_0, t) = \exp[(A - lC)(t - t_0)]$ — нормированная фундаментальная матрица системы $\psi^{\cdot} = (A - lC)\psi$.

Поскольку при

$$a_1 a_2 \Omega^3 \gamma (a_2\beta^2 - a_1\alpha^2) \neq 0$$

собственные числа λ_i ($i = 1, 2, 3$) матрицы $A - lC$ могут быть наперед заданными [1] потребуем, чтобы λ_i имели отрицательные вещественные части

$$\operatorname{Re} \lambda_i (A - lC) < 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2.5}$$

При выполнении условий (2.5)

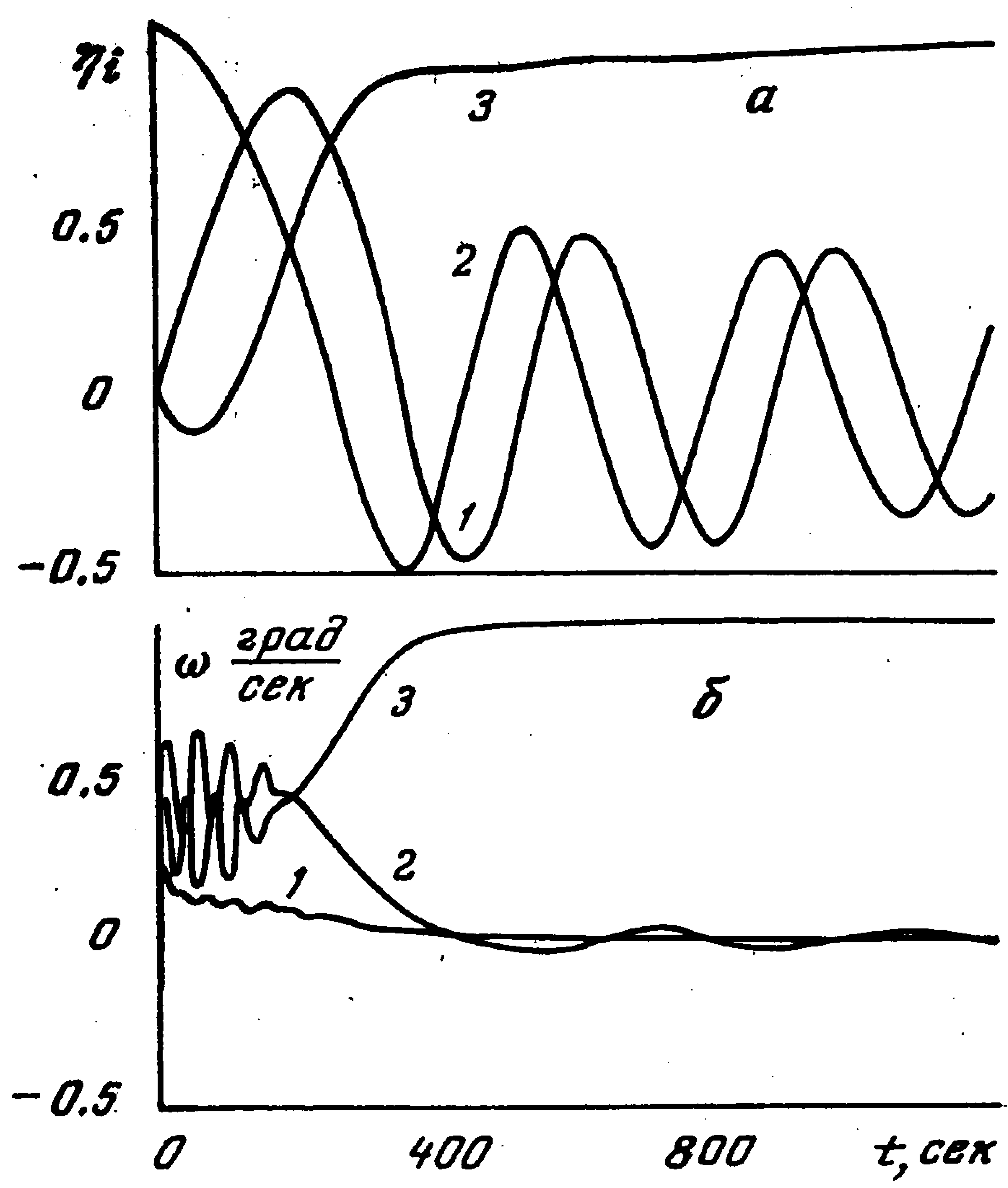
$$\int_{t_0}^{\infty} \|\Phi(t_0, \tau) e\|^2 d\tau$$

— положительно-определенная функция относительно вектора e [2], поэтому положительно-определенной будет и квадратичная форма (2.4).

Производная по времени от функции (2.4) в силу уравнений (2.3) имеет вид

$$V^{\cdot} = x'(-\mu\xi \times \eta + IAx + M) - \nu e'e + R(x, e) \tag{2.6}$$

$$R(x, e) = \nu e' S \Psi(x, e), \quad S = \int_{t_0}^{\infty} \Phi'(t_0, \tau) \Phi(t_0, \tau) d\tau$$



Выбирая управляющий момент M в виде

$$M = \mu\xi \times \eta + Kz, \quad K = \operatorname{diag}\{k_1, k_2, k_3\} \tag{2.7}$$

выражение (2.6) представим в форме (E — единичная матрица третьего порядка)

$$V^{\cdot} = s'Qs + R(x, e), \quad Q = {}^1/_2(P + P') \tag{2.8}$$

$$P = \begin{Vmatrix} IA + K & -K \\ 0 & -\nu E \end{Vmatrix}, \quad S = \begin{Vmatrix} x \\ e \end{Vmatrix}$$

Знакоопределенность аналитических функций определяется совокупностью членов наинизшего порядка в разложениях этих функций [3], поэтому правая часть соотношения (2.8) как функция векторов x и e будет отрицательно-определенной, если этим свойством обладает квадратичная форма $s'Qs$.

Для того чтобы функция $s'Qs$ была отрицательно-определенной, необходимо и достаточно выполнения системы неравенств

$$k_i < 0, \quad 1 + {}^1/_4\nu^{-1}k_i > 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2.9}$$

$$k_1k_2(1 + {}^1/_4\nu^{-1}k_1)(1 + {}^1/_4\nu^{-1}k_2) - {}^1/_4\Omega^2(I_y - I_x)^2 > 0$$

При выполнении условий (2.9) правая часть выражения (2.8) как функция вектора $r = \{\eta', x', e'\}$ знакопостоянно отрицательна, так как принимает нулевое значение не только при $\xi = \eta$, $x = e = 0$, но и на множестве

$$N = \{r\colon \xi \neq \eta,\ x = 0,\ e = 0\} \tag{2.10}$$

Представим множество (2.10) в виде

$$N = N_1 \cup N_2, \quad N_1 = \{r\colon \xi = -\eta,\ x = 0,\ e = 0\}, \quad N_2 = \{r\colon \xi \neq \pm\eta,\ x = 0,\ e = 0\}$$

Анализ уравнений первого приближения, составленных относительно точки N_1, свидетельствует о том, что N_1 — неустойчивое положение равновесия системы (2.3). Множество же N_2 не содержит целых траекторий исследуемой системы. Следовательно, положение равновесия $\xi = \eta$, $x = 0$, $e = 0$ асимптотически устойчиво [4].

Таким образом, при выполнении условий (2.5) и (2.9) управление (2.7), в котором вектор z определяется из уравнения (2.2), обеспечивает решение поставленной задачи в некоторой окрестности G положения равновесия.

Отметим, что при решении сформулированной в п. 1 задачи, как и в задаче ориентации во вращающейся системе координат [5], возникает возможность выполнения ориентации при неполной информации от датчиков углового положения тела. В самом деле, из анализа выражения (2.7) следует, что для управления ориентацией оси вращения в инерциальном пространстве достаточно информации о двух компонентах вектора η (в данном случае — η_x и η_y).

3. Пример. Рассмотрим процесс приведения твердого тела с параметрами эллипсоида инерции [6]

$$I_x = 1.25\cdot 10^6\ кг\cdot м^2, \quad I_y = 6{,}9\cdot 10^6\ кг\cdot м^2, \quad I_z = 7.1\cdot 10^6\ кг\cdot м^2$$

в режим установившегося вращения $\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = \Omega = 1$ *град/сек* при заданной одноосной ориентации в инерциальном пространстве.

Ось чувствительности датчика угловой скорости составляет с осями базиса xyz равные углы $n = \| 1 / \sqrt{3} 1 / \sqrt{3} \, 1 / \sqrt{3} \|'$. Вектор l в системе оценки состояния (2.2) и матрица K в законе управления (2.7) принимаются соответственно равными [1]

$$l = \| -3.62 \quad -37.80 \quad 41.91 \|'$$
$$K = \operatorname{diag} \{-1.25 \cdot 10^5, \quad -6.9 \cdot 10^5, \quad -7.1 \cdot 10^5\}$$

а весовые коэффициенты μ и ν в квадратичной форме (2.4)—$\mu = 1.25 \cdot 10^2$ *н·м*, $\nu = 6.9 \cdot 10^6$ *н·м·сек*$^{-1}$.

Вопрос о выборе начального условия в системе оценки состояния решается аналогично работе [1].

В момент начала управляемого движения тела рассогласование между осью z (вектор ξ) и требуемым направлением (вектор η) составляет 90°. Начальные значения остальных параметров ориентации даны на фигуре (*а*). Кривыми *1*, *2*, *3* на фигуре показан характер изменения направляющих косинусов η_x (xyz) в процессе управления (*а*) и изменения во времени угловых скоростей ω_x, ω_y и ω_z объекта (*б*).

Из анализа характера изменения параметров ориентации оси вращения и вектора угловой скорости ω следует, что в процессе управляемого движения тело асимптотически стремится к требуемому режиму движения.

Поступила 25 III 77

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лебедев Д. В.* К управлению вращательным движением твердого тела при неполной информации о векторе угловой скорости. ПММ, 1977, т. 41, вып. 2.
2. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Наука», 1965.
3. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения, М., «Наука», 1966.
4. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. М., «Наука», 1970.
5. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М., «Наука», 1973.
6. *Seltzer S. M., Schweitzer G., Asner B., Jr.* Attitude control of a spinning skylab. J. Spacecraft and Rockets, 1973, vol. 10, No. 3.

УДК 531

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ КОРРЕКЦИИ ГИРОСКОПА

В. Г. Гетманов

(Москва)

Рассматривается электромагнитная коррекция гироскопа (см. [1], стр. 409). Предполагается, что намагниченный ротор вращается в соленоиде. Управление перемещениями оси ротора осуществляется регулированием амплитуды и фазы тока в обмотке соленоида. Исследуется оптимальное по быстродействию управление угловыми перемещениями оси ротора. Статья по содержанию примыкает к работам [2, 3].

1. Для способа коррекции, описанного в [1], механический момент М, действующий на ротор, вычисляется как векторное произведение: $\mathbf{M} = \mathbf{N} \times \mathbf{K}$, где N — вектор магнитного момента ротора, вращающийся в экваториальной плоскости, K — вектор напряженности магнитного поля соленоида. На фиг. 1 изображены оси подвижной и неподвижной систем координат: ось OX' совпадает с осью ротора, $OY'Z'$ — экваториальная плоскость, OX — продольная ось соленоида. Проекции вектора магнитного момента на подвижные и неподвижные оси запишутся следующим образом:

$$N_x' = 0, \quad N_y' = N_0 \cos \Omega t, \quad N_z' = N_0 \sin \Omega t$$
$$N_x = N_z' \sin \alpha - N_y' \sin \beta \cos \alpha, \quad N_y = N_y' \cos \beta,$$
$$N_z = N_z' \cos \alpha + N_y' \sin \alpha \sin \beta$$