ЛИТЕРАТУРА

1. *Кузьмин П. А.* Квадратичные интегралы линейных механических систем. ПММ, 1960, т. 24, вып. 3.
2. *Збойчик Н. А.* О квадратичных интегралах линейных систем дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения, 1970, т. 6, № 2.
3. *Рубановский В. Н.* О бифуркации и устойчивости стационарных движений систем с известными первыми интегралами. В сб.: Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения, вып. 1. М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1975.
4. *Четаев Н. Г.* О некоторых задачах об устойчивости движения в механике. ПММ, 1956, т. 20, вып. 3.
5. *Румянцев В. В.* К задаче о движении тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой. Докл. АН СССР, 1957, т. 116, № 2.
6. *Румянцев В. В.* К устойчивости перманентных вращений твердого тела около неподвижной точки. ПММ, 1957, т. 21, вып. 3.
7. *Лахаданов В. М.* О стабилизации потенциальных систем. ПММ, 1975, т. 39, вып. 1.

УДК 531.36

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ

М. А. Балитинов

(Махачкала)

Рассмотрим систему уравнений Гамильтона

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T + V = \frac{1}{2}\sum_{i, j=1}^{n} b_{ij}(\mathbf{q})\, p_i p_j + V(\mathbf{q})$$

Предположим, что T — определенно-положительная квадратичная форма в окрестности точки $\mathbf{q} = 0$, а начало координат — изолированное состояние равновесия системы (1).

Ниже получены достаточные условия неустойчивости положения равновесия системы (1), обобщающие некоторые известные результаты (см. [1–4] и др.).

В дальнейшем будем считать, что

$$\sum_{i, j=1}^{n} b_{ij}(0)\, p_i p_j = \sum_{j=1}^{n} p_j^2$$

В противном случае этого можно добиться линейным каноническим преобразованием $\mathbf{q} = D'\mathbf{x}$, $\mathbf{y} = D\mathbf{p}$, где $B = \{b_{ij}(0)\} = DD'$ с производящей функцией $W(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = x'D\mathbf{p}$.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия.

1°. Потенциальная энергия представима в виде суммы: $V(\mathbf{q}) = V_\mu(\mathbf{q}) + \Phi(\mathbf{q})$, $V_\mu(\mathbf{q})$ — однородная функция измерения $\mu \geqslant 2$.

2°. $V_\mu(\mathbf{q}) \in c^{(2)}$, $\Phi(\mathbf{q}) \in c^{(2)}$, $b_{ij}(\mathbf{q}) \in c^{(1)}$, $\min_{|\mathbf{q}|=1} V_\mu(q) = V_\mu(c) = -\lambda < 0$.

3°. При достаточно малых τ и $\mathbf{z}$ (δ— сколь угодно малая величина) $|F_i(\tau, 0)| \leqslant N|\tau|$,

$$|F_i(\tau, \mathbf{z}_{**}) - F_i(\tau, \mathbf{z}_*)| \leqslant \delta\, |\mathbf{z}_{**} - \mathbf{z}_*|,$$

где

$$F_i(\tau, \mathbf{z}) = \tau^{1-\mu} \left.\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}\right|_{q_j = \tau(c_j + z_{j-1})}$$

Тогда нулевое решение системы (1) неустойчиво.

Доказательство. Достаточно показать, что система (1) обладает решением $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{q}(t)$ со следующим свойством $\mathbf{p}(t) \to 0$, $\mathbf{q}(t) \to 0$ при $t \to -\infty$ либо при $t \to +\infty$ (очевидно, что система (1) наряду с решением $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{q}(t)$ обладает и решением $-\mathbf{p}(-t)$, $\mathbf{q}(-t)$). Для этого осуществим замену переменных

(2)
$$q_1 = c_1\tau, \quad q_i = \tau(c_i + z_{i-1}), \quad i = 2, 3, \ldots, n$$
$$p_i = (2\lambda)^{1/2}\tau^{1/2\mu}(c_i + z_{n-1+i}), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Считаем, что $c_1 \neq 0$, в противном случае можно было бы перенумеровать q_i. Из равенств (2) получим

$$\tau\frac{dz_{i-1}}{d\tau} = \frac{dq_i}{d\tau} - c_i - z_{i-1} = c_1\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^{-1}\frac{dq_i}{dt} - c_i - z_{i-1} =$$
$$= c_1\left[\sum_{j=1}^{n} b_{1j}(\mathbf{q})\,p_j\right]^{-1}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\mathbf{q})\,p_j - c_i - z_{i-1} = -z_{i-1} - c_1^{-1}c_i z_n +$$
$$+ z_{n-1+i} + \ldots, \quad i = 2, 3, \ldots, n$$
$$\tau\frac{dz_{n-1+i}}{d\tau} = (2\lambda)^{-1/2}\tau^{1-1/2\mu}\frac{dp_i}{d\tau} - \frac{1}{2}\mu(c_i + z_{n-1+i}) =$$
$$= \frac{1}{2}c_1(2\lambda)^{-1/2}\tau^{1-1/2\mu}\left[\sum_{j=1}^{n} b_{1j}(\mathbf{q})\,p_j\right]^{-1}\left[\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial b_{kj}}{\partial q_i}p_k p_j + \frac{\partial V}{\partial q_i}\right] -$$
$$-\frac{1}{2}\mu(c_i + z_{n-1+i}) = \sum_{j=1}^{2n-1} d_{ij}z_j + \ldots$$

где многоточием обозначены члены, содержащие τ или имеющие по z_j порядок выше первого. При этом использованы равенства, вытекающие из условий теоремы 1.

$$\sum_{j=1}^{n} b_{1j}(\mathbf{q})p_j = p_1 + \ldots = (2\lambda)^{1/2}\tau^{1/2\mu}(c_1 + z_n) + \ldots$$
$$\left.\frac{\partial V_\mu}{\partial q_j}\right|_{q_k=c_k} = -\lambda\mu c_j, \quad \left.\frac{\partial(V_\mu + \Phi)}{\partial q_j}\right|_{q_k=\tau(c_k+z_{k-1})} =$$
$$= \tau^{\mu-1}\left(\left.\frac{\partial V_\mu}{\partial q_j}\right|_{q_k=c_k} + \sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial^2 V_\mu}{\partial q_j\,\partial q_i}z_i\right|_{q_k=c_k} + \ldots\right) + \left.\frac{\partial\Phi}{\partial q_j}\right|_{q_k=\tau(c_k+z_{k-1})}.$$

Следовательно, имеем

(3)
$$\tau\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = A\mathbf{z} + f(\tau, \mathbf{z})$$

Здесь A — постоянная $(2n-1)\times(2n-1)$-матрица, а вектор-функция $f(\tau, \mathbf{z})$ в достаточно малой окрестности начала координат удовлетворяет следующим условиям (ε — сколь угодно малая величина):

$$|f(\tau, 0)| \leqslant N_*|\tau|, \quad |f(\tau, \mathbf{z}_{**}) - f(\tau, \mathbf{z}_*)| \leqslant \varepsilon|\mathbf{z}_{**} - \mathbf{z}_*|, \quad N_* = \mathrm{const}$$

Известно [6], что система (3) при выполнении указанных условий обладает по крайней мере одной траекторией, исходящей из начала координат. Пусть $z_j = \varphi_j(\tau)$ ($j = 1, 2, \ldots, 2n-1$) — решение системы (3), обладающее свойством $\varphi_j(\tau) \to 0$ при $\tau \to +0$. Тогда

$$q_1 = c_1\tau, \quad q_i = \tau(c_i + \varphi_{i-1}(\tau)), \quad i = 2, 3, \ldots, n$$
$$p_i = (2\lambda)^{1/2}\tau^{1/2\mu}(c_i + \varphi_{n-1+i}(\tau)), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

— фазовая траектория системы (1), примыкающая к положению равновесия. Следовательно, система (1) обладает фазовой траекторией, по которой решения входят в положение равновесия при $t \to -\infty$. Отсюда следует неустойчивость положения равновесия.

Дадим геометрическую интерпретацию условиям теоремы 1. Рассмотрим системы дифференциальных уравнений соответственно с гамильтонианами

$$H_1 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + V_\mu(\mathbf{q}), \quad H_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(\mathbf{q})\, p_i p_j + V_\mu(\mathbf{q}) + \Phi(\mathbf{q})$$

Система, соответствующая гамильтониану H_1, обладает решением

$$q_j = c_j\tau, \quad p_j = c_j\tau, \ \tau = \begin{cases} \exp\left[(2\lambda)^{1/2} t\right], \ \mu = 2 \\ \left[1 + \dfrac{2-\mu}{2}(2\lambda)^{1/2} t\right]^{2/(2-\mu)}, \quad \mu > 2 \end{cases}$$

Вектор $\mathbf{c}' = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ и число λ определяются из условия

$$\min_{|q|=1} V_\mu(\mathbf{q}) = V_\mu(\mathbf{c}) = -\lambda, \quad \lambda > 0$$

Следовательно, выполнены соотношения $\partial V_\mu(c_1, c_2, \ldots, c_n) / \partial c_j + \lambda\, \mu c_j = 0$.

Найденное специальное решение показывает, что положение равновесия этой системы неустойчиво. Условия теоремы обеспечивают близость систем с гамильтонианами H_1 и H_2 вдоль кривой $q_j = c_j\tau$, $p_j = (2\lambda)^{1/2}\tau^{1/2}\mu c_j$, которая является фазовой кривой для невозмущенной системы.

При исследовании системы (1) в случае, когда функция $V_\mu(\mathbf{q})$ не отрицательна, а $V(\mathbf{q})$ в окрестности стационарной точки может принимать отрицательные значения, доказанная теорема неприменима. В этом случае полезной оказывается теорема Четаева (см. [2], стр. 243). Однако Четаевым не указано сколь-либо общих приемов построения вектор-функции $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$, фигурирующей в условиях теоремы.

Проиллюстрируем на нескольких примерах один метод построения указанной вектор-функции.

Пример 1. Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + V(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n} c_j q_j^2 + V_3 + V_4 + \ldots$$

Пусть $c_i > 0$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$, функция $V(\mathbf{q})$ в любой окрестности начала координат знакопеременна. Вектор-функцию $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ ищем как решение уравнения

$$F_1 V_{q_1} + F_2 V_{q_2} + \ldots + F_n V_{q_n} = V \tag{4}$$

в виде

$$F_1 = F_1(q_1), \quad F_2 = F_2(q_1, q_2), \ldots, \quad F_n = F_n(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

Пусть $q_j = \varphi_j(q_1)$, $j = 2, \ldots, n$ — решение системы $V_{q_2} = 0$, $V_{q_3} = 0, \ldots, V_{q_n} = 0$ (по известным теоремам данная система обладает единственным аналитическим решением).

Рассматривая уравнение (4) вдоль кривой $q_j = \varphi_j(q_1)$, получим

$$F_1(q_1) = V(V_{q_1})^{-1}|_{q_j=\varphi_j(q_1)} = f(q_1)[f'(q_1)]^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j q_1^j, \quad \alpha_1 = m^{-1}$$

($f(q_1) \not\equiv 0$, так как при фиксированном q_1 функция $V(q_1, \ldots, q_n)$ принимает наименьшее значение при $q_j = \varphi_j(q_1)$ и это значение по условию отрицательно). Для определения $F_2(q_1, q_2)$ рассмотрим уравнение (4) вдоль единственного аналитического решения $q_j = \psi_j(q_1, q_2)$ $(j = 3, 4, \ldots)$ системы $V_{q_3} = 0, \ldots, V_{q_n} = 0$. Получим

$$F_2(q_1, q_2) = [(V - F_1 V_{q_1}) V_{q_2}^{-1}]\,|_{q_j=\psi_j}$$

Воспользовавшись теоремой Вейерштрасса [6], можно показать, что $F_2(q_1, q_2)$ — аналитическая функция.

Очевидно, имеем $F_2(q_1, q_2) = {}^1/_2 q_2 + \ldots$.

Таким образом последовательно определяются $F_j = {}^1/_2 q_j + \ldots$. Для дальнейшего понадобится следующая

Лемма. Пусть $V(x, y) = V_m + V_{m+1} + \ldots$ и выполнены следующие условия.

1°. Уравнение $V_y = 0$ определяет функции $y = \theta_j(x) = \alpha_j x + \ldots$, вообще говоря, с комплексными коэффициентами и при этом $\alpha_i \neq \alpha_j$, если $i \neq j$, $\alpha_j \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$. 2°. $V(x, \theta_j(x)) = \gamma_j^{(0)} x^m + \gamma_j^{(1)} x^{m+1} + \ldots, \gamma_j^{(0)} \neq 0$.

Тогда существует аналитическая вектор-функция $F = (F_1, F_2)$, являющаяся решением уравнения

$$F_1 V_x + F_2 V_y = (x^2 + y^2)^l V \tag{5}$$

$$l = \begin{cases} {}^1/_2 m - 2, & \text{если } m \text{ четное} \\ {}^1/_2 (m+1) - 2, & \text{если } m \text{ нечетное} \end{cases}$$

Доказательство. Ищем решение уравнения (5) в виде

$$F_1(x, y) = \psi_0(x) + \psi_1(x) y + \ldots + \psi_{m-2}(x) y^{m-2}, \qquad F_2 = F_2(x, y)$$

Рассматривая уравнение (5) при $y = \theta_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$, получим систему уравнений для определения $\psi_j(x)$

$$\begin{gathered} \psi_0 + \theta_1 \psi_1 + \ldots + \theta_1^{m-2} \psi_{m-2} = (x^2 + \theta_1^2)^l \varphi_1(x) \\ \psi_0 + \theta_2 \psi_1 + \ldots + \theta_2^{m-2} \psi_{m-2} = (x^2 + \theta_2^2)^l \varphi_2(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi_0 + \theta_{m-1} \psi_1 + \ldots + \theta_{m-1}^{m-2} \psi_{m-2} = (x^2 + \theta_{m-1}^2)^l \varphi_{m-1}(x) \end{gathered} \tag{6}$$

$$\varphi_j(x) = [V(V_x)^{-1}]\,|_{y=\theta_j(x)} = V(x, \theta_j(x)) \left(\frac{d}{dx} V(x, \theta_j(x)) \right)^{-1} = m^{-1} x + \ldots$$

Функции $\psi_j(x)$ определяются из системы (6) однозначно, и можно показать, что $\psi_j(x)$ — аналитические и вещественные функции. Далее, имеем

$$F_2 = [(x^2 + y^2)^l V(x, y) - F_1 V_x] V_y^{-1}$$

По упомянутой теореме Вейерштрасса $F_2(x, y)$ — аналитическая функция. Определив младшие члены аналитических функций F_1 и F_2, можно показать, что

$$F_1 = m^{-1} x (x^2 + y^2)^l + \ldots, \qquad F_2 = m^{-1} y (x^2 + y^2)^l + \ldots$$

Пример 2. Рассмотрим гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} p_j^2 + V(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \sum_{j=3}^{n} c_j q_j^2 + V_N + V_{N+1} + \ldots$$

$$c_j > 0, \quad j = 3, 4, \ldots, n, \quad N > 2$$

Пусть $q_j = \psi_j(q_1, q_2)$ $(j = 3, \ldots, n)$ — решение системы уравнений $V_{q_3} = 0$, $V_{q_4} = 0, \ldots, V_{q_n} = 0$. Предположим, что функция

$$V(q_1, q_2, \psi_3, \ldots, \psi_n) = V^\circ(q_1, q_2) = V_m^\circ + V_{m+1}^\circ + \ldots$$

удовлетворяет условиям леммы. Ищем вектор-функцию $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ как решение уравнения

$$F_1 V_{q_1} + F_2 V_{q_2} + \ldots + F_n V_{q_n} = (q_1^2 + q_2^2)^l V \tag{7}$$

в виде

$$\begin{gathered} F_1 = F_1(q_1, q_2), \quad F_2 = F_2(q_1, q_2), \quad F_3 = F_3(q_1, q_2, q_3), \ldots, \\ F_n = F_n(q_1, q_2, \ldots, q_n) \end{gathered}$$

Рассматривая равенство (7) на многообразии, определяемом равенствами $q_j = \psi_j(q_1, q_2)$ $(j = 3, \ldots, n)$, получим (l определяется так же, как и в лемме)

$$F_1 V_{q_1}^{\circ} + F_2 V_{q_2}^{\circ} = (q_1^2 + q_2^2)^l V^{\circ} \tag{8}$$

Из уравнения (8) определяем F_1 и F_2. Далее, если определены $F_1, F_2, \ldots, F_k$, то F_{k+1} определим, рассматривая уравнение (7) на многообразии, определяемом равенствами $V_{q_{k+2}} = 0, \ldots, V_{q_n} = 0$. Очевидно, что F_j — аналитические функции и их младшие члены имеют вид

$$F_1 = m^{-1} q_1 (q_1^2 + q_2^2)^l + \ldots, \quad F_2 = m^{-1} q_2 (q_1^2 + q_2^2)^l + \ldots$$

$$F_3 = {}^1/_2 q_3 (q_1^2 + q_2^2)^l + \ldots, \quad F_n = {}^1/_2 q_n (q_1^2 + q_2^2)^l + \ldots$$

Квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} p_i p_j, \quad g_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_i}{\partial q_j} + \frac{\partial F_j}{\partial q_i}\right)$$

определенно-положительна на множестве (h — достаточно малая величина)

$$Q = Q_1 \cap Q_2; \quad Q_1 = \{V(\mathbf{q}) < 0\}, \quad Q_2 = \left\{\sum_{j=1}^{n} q_j^2 < h\right\}$$

В самом деле, на множестве Q имеем $q_3^2 + q_4^2 + \ldots + q_n^2 < \delta\,(q_1^2 + q_2^2)$, где $\delta\,(h)$ — сколь угодно малая величина при малом h. Если соответствующую матрицу представить в виде $G = G_0 + G_1 + \ldots$, где G_0 — матрица из младших членов, то

$$G_0 = r^{l-1} G_* = r^{l-1} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} m^{-1}[(2l+1)q_1^2 + q_2^2] & 2lm^{-1}q_1q_2 & {}^1/_2 l q_1 q_3 \ldots {}^1/_2 l q_1 q_{n-1} & {}^1/_2 l q_1 q_n \\ 2lm^{-1}q_2q_1 & m^{-1}[q_1^2 + (2l+1)q_2^2] & {}^1/_2 l q_2 q_3 \ldots {}^1/_2 l q_2 q_{n-1} & {}^1/_2 l q_2 q_n \\ {}^1/_2 l q_3 q_1 & {}^1/_2 l q_3 q_2 & r \quad \ldots \quad 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \ldots \quad \vdots & \vdots \\ {}^1/_2 l q_{n-1} q_1 & {}^1/_2 l q_{n-1} q_2 & 0 \quad \ldots \quad r & 0 \\ {}^1/_2 l q_n q_1 & {}^1/_2 l q_n q_2 & 0 \quad \ldots \quad 0 & r \end{Vmatrix}$$

$$(r = q_1^2 + q_2^2)$$

Определители Сильвестра, начинающиеся с правого нижнего угла матрицы G_*, имеют вид

$$\Delta_1 = r, \ \Delta_2 = r^2, \ldots, \Delta_{n-2} = r^{n-2}$$

$$\Delta_{n-1} = r^{n-2}\left\{m^{-1}[q_1^2 + (2l+1)q_2^2] - \frac{l^2 q_2^2}{4r}\rho\right\}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} m^{-1}[(2l+1)q_1^2 + q_2^2] - \dfrac{l^2 q_1^2}{4r}\rho & 2lm^{-1}q_1q_2 - \dfrac{l^2 q_1 q_2}{4r}\rho \\ 2lm^{-1}q_1q_2 - \dfrac{l^2 q_1 q_2}{4r}\rho & m^{-1}[q_1^2 + (2l+1)q_2^2] - \dfrac{l^2 q_2^2}{4r}\rho \end{vmatrix}$$

$$(\rho = q_3^2 + q_4^2 + \ldots + q_n^2)$$

При вычислении Δ_{n-1} и Δ_n использовано следующее очевидное предложение: если Δ, c, b, k — матрицы размерами $m \times m$, $m \times n$, $n \times m$, $n \times n$ соответственно и $|k| \neq 0$, то

$$\begin{vmatrix} \Delta & c \\ b & k \end{vmatrix} = |k|\,|\Delta - ck^{-1}b|$$

На множестве Q имеем $\Delta_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$ при $q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_n^2 \neq 0$. Следовательно, построенная вектор-функция удовлетворяет условиям теоремы Четаева. Таким образом, доказана

Теорема 2. Если выполнены условия:

1) функция $V^\circ(q_1, q_2)$ удовлетворяет условиям леммы, 2) функция $V(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ не имеет строгого локального минимума в положении равновесия, то положение равновесия гамильтоновой системы

$$q_j^{\cdot} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad p_j^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

неустойчиво.

Автор благодарит В. В. Румянцева и участников руководимого им семинара за обсуждение статьи.

Поступила 21 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Изд. 2. М.— Л., ОНТИ, 1935.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, М., Изд-во АН СССР, 1962.
3. *Koiter W. T.* On the instability of equilibrium in the absence of a minimum of potential energy. Proc. Koninkl. nederl. acad. wet. B, C, 1965, vol. 68.
4. *Hagedorn P.* Die Umkehrung der Stabilitäts-sätze von Zagrange-Dirichlet und Routh.-Orch. Rational Mech. and Analys., 1971, vol. 42, No 4.
5. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений М. — Л. Гостехиздат, 1947.
6. *Еругин Н. П.* Неявные функции. Изд-во ЛГУ, 1956.

УДК 531.381

О ПЕРЕВОДЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА В РЕЖИМ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ВРАЩЕНИЯ С ЗАДАННОЙ ОРИЕНТАЦИЕЙ ОСИ ВРАЩЕНИЯ

Д. В. Лебедев

(Киев)

Исследуется задача приведения твердого тела в режим установившегося вращения с заданной ориентацией оси вращения в инерциальном пространстве в условиях, когда информация о вращательном движении объекта поступает от одного жестко связанного с ним датчика угловой скорости. Отыскивается управляющий момент, обеспечивающий асимптотическую устойчивость рассматриваемого режима движения.

1. Постановка задачи. Введем жестко связанный с твердым телом трехгранник xyz. Обозначим через ξ и η неподвижные орты в базисе xyz и абсолютном пространстве XYZ соответственно.

Описывая вращательное движение твердого тела динамическими уравнениями Эйлера

$$I\omega^{\cdot} + \omega \times I\omega = M, \quad \omega = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}, \quad I = \operatorname{diag}\{I_x, I_y, I_z\} \tag{1.1}$$

будем для определенности считать $I_x < I_y < I_z$. Если в качестве оси установившегося вращения объекта принять ось z, то вектор $\xi = \{0, 0, 1\}$. Движение орта η в связанной с телом системе координат подчиняется уравнению

$$\eta^{\cdot} + \omega \times \eta = 0 \tag{1.2}$$

Предполагается, что измерению доступны вектор η и проекция вектора ω угловой скорости объекта на ось чувствительности датчика угловой скорости

$$\vartheta = n\cdot\omega, \quad n = \{\alpha, \beta, \gamma\} \tag{1.3}$$

где n — орт, жестко связанный с телом.