УДК 531.011

О КВАДРАТИЧНЫХ ИНТЕГРАЛАХ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

В. М. Лахаданов

(Минск)

Квадратичные интегралы систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами изучались в работах [1–3]. Ниже дается способ построения по одному известному квадратичному интегралу других квадратичных интегралов таких систем. Рассмотрим систему

(1) $$x^{\cdot} = Ax$$

где A — произвольная постоянная $n \times n$-матрица. Предположим, что для системы (1) найден квадратичный интеграл

(2) $$V = x'Bx, \quad B = B', \quad A'B + BA = 0$$

Возникает вопрос: можно ли, зная интеграл (2), найти еще хотя бы один независимый квадратичный интеграл системы (1).

Теорема 1. Если система (1) имеет квадратичный интеграл (2), то она имеет также следующие квадратичные интегралы:

(3) $$W = x'Cx, \quad C = C' = L'BM + M'BL$$

где L, M — произвольные постоянные $n \times n$-матрицы, коммутирующие с матрицей A. Если при этом определитель $|B| \neq 0$, то все квадратичные интегралы системы (1) содержатся в формуле (3).

Доказательство. Непосредственное вычисление полной производной по времени квадратичной формы W в силу системы (1) показывает, что эта форма есть интеграл системы (1). Докажем, что в случае $|B| \neq 0$ любой другой квадратичный интеграл

(4) $$U = x'Dx, \quad D = D'$$

системы (1) можно представить в виде (3). Действительно, если в (3) положить $L = {}^1/_2 E$ (E — единичная матрица), $M = B^{-1}D$, то получим

$$W = x' [{}^1/_2 E'BB^{-1}D + {}^1/_2 D' (B^{-1})'BE]x = x'Dx = U$$

Матрица E коммутирует с A, а коммутативность матриц $B^{-1}D$ и A доказывается следующим образом. Из (2) следует, что $A' = -BAB^{-1}$. Подставляя это в равенство $A'D + DA = 0$, получаем $-BAB^{-1}D + DA = 0$ или $AB^{-1}D = B^{-1}DA$, что и требовалось доказать. Следовательно, в случае $|B| \neq 0$ все квадратичные интегралы системы (1) содержатся в формуле (3). Теорема доказана.

Следствие 1. Если система (1) имеет квадратичный интеграл (2), то она имеет также следующие квадратичные интегралы:

(5) $$Q = x' [(P')^k BP^l + (P')^l BP^k] x, \qquad k, l = 1, \ldots, n-1$$

где P — произвольная постоянная $n \times n$-матрица, коммутирующая с матрицей A (например $P = A$).

Замечание 1. Если в формуле (5) $k, l \geqslant n$, то получающиеся интегралы будут линейно зависеть от интегралов (5).

Рассмотрим вопрос о независимости квадратичных интегралов линейных автономных систем. Если воспользоваться известной теоремой о независимости функций, то в применении к исследуемому случаю она принимает следующий вид.

Теорема 2. Квадратичные интегралы системы (1)

$$V_i = x'B_ix, \; B_i = B_i', \quad i = 1, \ldots, m$$

независимы тогда и только тогда, когда при некотором $x = x_0$

(6) $$\operatorname{rank}(B_1x_0, B_2x_0, \ldots, B_mx_0) = m$$

Следствие 2. Если система (1) имеет квадратичный интеграл (2), то этот интеграл и интегралы, получаемые из него по формуле (3)

$$V_i = x'B_ix, \quad B_i = L_i'BM_i + M_i'BL_i, \quad i = 1, \ldots, m-1$$

будут независимы тогда и только тогда, когда выполнено условие (6), где $B_m = B$.

В случае $m = 2$ теорема 2 допускает следующую формулировку.

Теорема 3. Два квадратичных интеграла системы (1) независимы тогда и только тогда, когда они линейно-независимы.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что зависимость квадратичных интегралов (2), (4) влечет линейную зависимость матриц B и D. Условие зависимости двух интегралов в применении к интегралам (2), (4) имеет вид $\operatorname{rank}(Bx, Dx) < 2$.

Можно показать, что последнее имеет место тогда и только тогда, когда $B = \lambda D$, где $\lambda = \text{const}$. Теорема доказана.

Следствие 3. Если матрицы L и M из теоремы 1 удовлетворяют условию $L'BM + M'BL \neq \lambda B$, то интегралы (2), (3) независимы.

Таким образом, чтобы установить независимость двух квадратичных интегралов системы (1), достаточно проверить их линейную независимость. Если же имеется более двух квадратичных интегралов системы (1), то их линейной независимости, вообще говоря, недостаточно для того, чтобы они были независимыми. Действительно, рассмотрим систему (1), которая имеет квадратичные интегралы $V_1 = x_1^2$, $V_2 = x_2^2$, $V_3 = x_1x_2$. Очевидно, эти интегралы линейно-независимы. Однако они связаны соотношением $V_3^2 = V_1V_2$, т. е. зависимы.

Пример. Известно, что система

(7) $$y^{\cdot\cdot} + Gy^{\cdot} + Fy = 0$$

где $G = -G'$, $F = F'$ — постоянные $n \times n$-матрицы, имеет квадратичный интеграл (интеграл энергии)

(8) $$H = {}^1/_2\,(y^{\cdot\prime}Ey^{\cdot} + y'Fy)$$

Еще один квадратичный интеграл для систем вида (7) при $n = 2$

$$y_1^{\cdot\cdot} - py_2^{\cdot} - ay_1 = 0, \quad y_2^{\cdot\cdot} + py_1^{\cdot} - by_2 = 0$$

указан в работах [4-6]

$$H_1 = 2\,(by_1^{\cdot}y_2 - ay_1y_2^{\cdot}) - p\,(ay_1^2 + by_2^2) + \frac{b-a}{2p}\,(y_2^{\cdot 2} - y_1^{\cdot 2} + ay_1^2 - by_2^2)$$

Запишем систему (7) в виде (1), а интеграл (8) в виде (2), полагая $x' = (y', y^{\cdot\prime})$. Получим

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ -F & -G \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} {}^1/_2 F & 0 \\ 0 & {}^1/_2 E \end{Vmatrix}$$

Формула (3) в некоторых случаях дает новые квадратичные интегралы системы (7). Например, в работе [7] для системы (7) указан квадратичный интеграл

(9) $$H_2 = (Gy^{\cdot} + Fy)'\,(Gy^{\cdot} + Fy) + y^{\cdot\prime}Fy^{\cdot}$$

который получен из интеграла (8) с помощью формулы (5) при $P = A$, $k = l = 1$. Если определитель $|F| \neq 0$, то все квадратичные интегралы системы (8) согласно теореме 1 даются формулой (3).

Замечание 2. Можно проверить, что интеграл H_1 линейно выражается через интегралы (8), (9) ($n = 2$)

$$H_1 = -\frac{a+b-2p^2}{p}\,H - \frac{1}{p}\,H_2$$

Автор благодарит В. В. Румянцева за советы и замечания по этой работе.

Поступила 23 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кузьмин П. А.* Квадратичные интегралы линейных механических систем. ПММ, 1960, т. 24, вып. 3.
2. *Збойчик Н. А.* О квадратичных интегралах линейных систем дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения, 1970, т. 6, № 2.
3. *Рубановский В. Н.* О бифуркации и устойчивости стационарных движений систем с известными первыми интегралами. В сб.: Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения, вып. 1. М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1975.
4. *Четаев Н. Г.* О некоторых задачах об устойчивости движения в механике. ПММ, 1956, т. 20, вып. 3.
5. *Румянцев В. В.* К задаче о движении тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой. Докл. АН СССР, 1957, т. 116, № 2.
6. *Румянцев В. В.* К устойчивости перманентных вращений твердого тела около неподвижной точки. ПММ, 1957, т. 21, вып. 3.
7. *Лахаданов В. М.* О стабилизации потенциальных систем. ПММ, 1975, т. 39, вып. 1.

УДК 531.36

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ

М. А. Балитинов

(Махачкала)

Рассмотрим систему уравнений Гамильтона

$$q_j^{\cdot} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad p_j^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T + V = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{n} b_{ij}(\mathbf{q})\, p_i p_j + V(\mathbf{q})$$

Предположим, что T — определенно-положительная квадратичная форма в окрестности точки $\mathbf{q} = 0$, а начало координат — изолированное состояние равновесия системы (1).

Ниже получены достаточные условия неустойчивости положения равновесия системы (1), обобщающие некоторые известные результаты (см. [1–4] и др.).

В дальнейшем будем считать, что

$$\sum_{i, j=1}^{n} b_{ij}(0)\, p_i p_j = \sum_{j=1}^{n} p_j^2$$

В противном случае этого можно добиться линейным каноническим преобразованием $\mathbf{q} = D'\mathbf{x}$, $\mathbf{y} = D\mathbf{p}$, где $B = \{b_{ij}(0)\} = DD'$ с производящей функцией $W(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = x'D\mathbf{p}$.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия.

1°. Потенциальная энергия представима в виде суммы: $V(\mathbf{q}) = V_\mu(\mathbf{q}) + \Phi(\mathbf{q})$, $V_\mu(\mathbf{q})$ — однородная функция измерения $\mu \geqslant 2$.

2°. $V_\mu(\mathbf{q}) \in c^{(2)}$, $\Phi(\mathbf{q}) \in c^{(2)}$, $b_{ij}(\mathbf{q}) \in c^{(1)}$, $\min_{|\mathbf{q}|=1} V_\mu(q) = V_\mu(c) = -\lambda < 0$.

3°. При достаточно малых τ и $\mathbf{z}$ (δ— сколь угодно малая величина) $|F_i(\tau, 0)| \leqslant N|\tau|$,

$$|F_i(\tau, \mathbf{z}_{**}) - F_i(\tau, \mathbf{z}_*)| \leqslant \delta\, |\mathbf{z}_{**} - \mathbf{z}_*|,$$

где

$$F_i(\tau, \mathbf{z}) = \tau^{1-\mu} \left.\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}\right|_{q_j = \tau(c_j + z_{j-1})}$$

Тогда нулевое решение системы (1) неустойчиво.