Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.4

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕОДНОРОДНЫХ ТВЕРДЫХ СРЕД. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ МАТЕРИАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

А. Г. Фокин

(Москва)

Исследуются статистические свойства многокомпонентных неоднородных сред. Дается общее определение концентрационной и координатной функциональной структуры центральных моментных функций материальных характеристик. Установлено, что эта функциональная структура весьма чувствительна к различиям в статистических свойствах компонентов. Рассмотрен класс симметричных сред, для которых центральные моментные функции существенно упрощаются.

1. Под материальными характеристиками здесь понимаются величины типа тензоров модулей упругости, диэлектрических проницаемостей, а также скаляры: плотность, теплоемкость и т. п. Для простоты изложения почти всюду опущены тензорные индексы материальных характеристик.

Пусть имеется случайное тензорное поле $\lambda(\mathbf{r})$ (например модулей упругости). Обобщая на случай произвольного числа компонентов характеристические функции, введенные в [1,2] применительно к двухкомпонентным средам, запишем

$$f_i(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in U_i, \quad i \neq 1 \\ 0, & \mathbf{r} \notin U_i, \quad \sum\limits_{i=1}^{N} U_i = U \end{cases} \tag{1.1}$$

где U_i — область, занимаемая i-м компонентом, а N — число компонентов. Характеристическая функция f_1 для первого компонента определяется очевидным равенством

$$\sum_{i=1}^{N} f_i(\mathbf{r}) = 1 \tag{1.2}$$

Выделенность первого компонента не мотивируется здесь какими-либо конкретными соображениями. Однако всегда будем иметь в виду в качестве простейшего примера такой среды матричную, где особую роль играет, по крайней мере, один компонент-матрица.

Используя (1.1), запишем случайное поле $\lambda(\mathbf{r})$ в виде

$$\lambda(\mathbf{r}) = \lambda_1 + \sum_{i=2}^{N} \Delta\lambda_i f_i(\mathbf{r}) \equiv \lambda_1 + \Delta\lambda_i f_i(\mathbf{r}), \quad \Delta\lambda_i \equiv \lambda_i - \lambda_1 \tag{1.3}$$

где λ_i — значение величины λ для i-го компонента.

Флуктуация λ'' поля λ равна

$$\lambda''(\mathbf{r}) = \Delta\lambda_i f_i''(\mathbf{r}), \quad x''(\mathbf{r}) \equiv x(\mathbf{r}) - \langle x(\mathbf{r})\rangle \tag{1.4}$$

Здесь угловые скобки обозначают статистическое усреднение.

Случайное поле $\lambda(\mathbf{r})$ может быть определено путем задания либо моментных, либо центральных моментных функций различных порядков. По определению [3,4] моментная функция порядка ω поля λ имеет вид

$$M_\omega(\mathbf{R}_n) = \langle [\lambda(\mathbf{r}_1)\otimes]^{\omega_1}\cdots[\lambda(\mathbf{r}_n)\otimes]^{\omega_n}\rangle, \quad \mathbf{R}_n \equiv (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n) \tag{1.5}$$

Соответственно для центральной моментной функции порядка ω запишем

$$\mu_\omega(\mathbf{R}_n) = \langle [\lambda''(\mathbf{r}_1)\otimes]^{\omega_1}\cdots[\lambda''(\mathbf{r}_n)\otimes]^{\omega_n}\rangle, \quad \omega = \sum_{a=1}^{n} \omega_a \tag{1.6}$$

В (1.5) и (1.6) через $\otimes$ обозначено прямое произведение тензоров.

Легко видеть [5], что использование характеристических функций f_i позволяет свести расчет M_ω к нахождению функции

$$P^n_{ij\ldots k}(\mathbf{R}_n^{ij\ldots k}) = \langle f_i(\mathbf{r}_1^i) f_j(\mathbf{r}_2^j)\ldots f_k(\mathbf{r}_n^k)\rangle, \quad \mathbf{R}_n^{ij\ldots k} \equiv (\mathbf{r}_1^i, \mathbf{r}_2^j, \ldots, \mathbf{r}_n^k) \tag{1.7}$$

имеющей смысл вероятности того, что точки $\mathbf{r}_1^i$, $\mathbf{r}^j_2$, ..., $\mathbf{r}_n^k$ принадлежат соответственно областям $U_i, U_j, \ldots, U_k$, где $i, j, \ldots, k \neq 1$. Дополнительный верхний индекс у радиус-вектора указывает на область, которой принадлежит соответствующая точка. В случае двухкомпонентной среды аналогичным образом введенная функция была исследована в работе [2].

Вероятность $P^n_{ij\ldots k}$ инвариантна относительно одновременной перестановки координат точек и индексов. Кроме того, функции $P^n_{ij\ldots k}$ обладают следующими свойствами:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{N} P^n_{ij\ldots k}(\mathbf{R}_n^{ij\ldots k}) = P^{n-1}_{j\ldots k}(\mathbf{R}_{n-1}^{j\ldots k}) \\ P^n_{ij\ldots l\, l\ldots l}(\mathbf{R}_q^{ij\ldots l}, \mathbf{r}, \ldots, \mathbf{r}) = P^q_{ij\ldots l}(\mathbf{R}_q^{ij\ldots l}), \quad \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_q^{\,l} \\ P^n_{ij\ldots l\, m\ldots k}(\mathbf{R}_q^{ij\ldots l} \,|\, \overline{\mathbf{R}}_{n-q}^{m\ldots k}) = P^q_{ij\ldots l}(\mathbf{R}_q^{ij\ldots l})\, P^{n-q}_{m\ldots k}(\overline{\mathbf{R}}_{n-q}^{m\ldots k}) \\ \overline{\mathbf{R}}_{n-q}^{m\ldots k} \equiv (\mathbf{r}_{q+1}^m, \ldots, \mathbf{r}_n^k)\end{gathered} \tag{1.8}$$

Здесь вертикальная черта разделяет группы точек $\mathbf{R}_q^{ij\ldots l}$ и $\overline{\mathbf{R}}_{n-q}^{m\ldots k}$, удаленные одна от другой на бесконечно большое расстояние; общее число индексов $ij\ldots l$ равно q, число индексов $l\ldots l$ и $m\ldots k$, а также число переменных $\mathbf{r}, \ldots, \mathbf{r}$ равно $(n-q)$.

Ниже будем считать поле $f_i(\mathbf{r})$ статистически однородным и изотропным, вследствие чего функции $P^n_{ij\ldots k}$ инвариантны относительно трансляций и вращений. В силу этого

$$P_i^1(\mathbf{r}_1^i) = v_i, \quad v_i = V_i/V, \quad V = \sum_{i=1}^{N} V_i \tag{1.9}$$

где v_i — объемная концентрация i-го компонента.

Аналогичным образом, используя (1.8), представим P_{ij}^2 в виде

$$(1.10)\qquad P_{ij}^2(\mathbf{r}_1^i, \mathbf{r}_2^j) = v_i\delta_{ij}\varphi_0^2(\mathbf{r}_1^i, \mathbf{r}_2^j) + v_iv_j\varphi_1^2(\mathbf{r}_1^i, \mathbf{r}_2^j), \quad i, j \neq 1$$

причем по дважды встречающимся индексам, как и в (1.8), суммирование не проводится, а функции φ_q^2 удовлетворяют условиям

$$(1.11)\qquad \varphi_0^2(\mathbf{r}_1^i, \mathbf{r}_1^i) = \varphi_1^2(\mathbf{r}_1^i \mid \mathbf{r}_2^j) = 1, \quad \varphi_0^2(\mathbf{r}_1^i \mid \mathbf{r}_2^j) = \varphi_1^2(\mathbf{r}_1^i, \mathbf{r}_1^i) = 0$$

Если поле $f_i(\mathbf{r})$ удовлетворяет некоторым ограничениям, то функции φ_q^2 могут быть получены в явном виде [5].

Обобщая (1.10) на случай произвольного n, в обозначениях (1.8) запишем

$$(1.12)\qquad P^n_{ij\ldots k}(\mathbf{R}_n^{ij\ldots k}) = \sum_{\sigma_n}\sum_{q=0}^{n-1} v^q_{ij\ldots k}\varphi_q^n(\mathbf{R}_q^{ij\ldots l}; \overline{\mathbf{R}}_{n-q}^{m\ldots k})$$

$$P^\circ = 1, \quad i, j\ldots, k \neq 1$$

$$v^q_{ij\ldots k} = v_iv_j\ldots v_l\sum_{p=2}^{N} v_p\delta_{mp}\ldots\delta_{kp}, \qquad \mathbf{R}_n^{ij\ldots k} = (R_q^{ij\ldots l}, \overline{\mathbf{R}}_{n-q}^{m\ldots k})$$

где функции φ_q^n имеют q выделенных точек, а суммирование проводится по всем нетождественным перестановкам σ_n — первых n (т. е. в данном случае — всех) точек с одновременной перестановкой соответствующих индексов. Асимптотические соотношения для них вытекают из (1.8) и имеют вид, аналогичный (1.11).

Отметим, что функции φ^n_{n-1} не содержат выделенной точки.

В противном случае, учитывая полную симметричность $v^n_{ij\ldots k} = v_iv_j\ldots v_k$, они симметризуются за счет действия σ_n.

В качестве примера приведем выражение для трехточечной вероятности

$$(1.13)\qquad P^3_{ijk}(\mathbf{r}_1^i, \mathbf{r}_2^j, \mathbf{r}_3^k) = \varphi_0^3(\mathbf{r}_1^i, \mathbf{r}_2^j, \mathbf{r}_3^k)\sum_{p=2}^{N} v_p\delta_{ip}\delta_{jp}\delta_{kp} +$$
$$+ \varphi_1^3(\mathbf{r}_1^i; \mathbf{r}_2^j, \mathbf{r}_3^k)v_i\sum_{p=2}^{N} v_p\delta_{jp}\delta_{kp} +$$
$$+ \varphi_1^3(\mathbf{r}_2^j; \mathbf{r}_3^k, \mathbf{r}_1^i)v_j\sum_{p=2}^{N} v_p\delta_{ip}\delta_{pp} +$$
$$+ \varphi_1^3(\mathbf{r}_3^k; \mathbf{r}_1^i, \mathbf{r}_2^j)v_k\sum_{p=2}^{N} v_p\delta_{ip}\delta_{jp} + v_iv_jv_k\varphi_2^3(\mathbf{r}_1^i, \mathbf{r}_2^j, \mathbf{r}_3^k)$$

Функции φ_q^n, введенные в (1.12), могут быть связаны с различными вероятностями. Так, например, вероятность того, что точка $\mathbf{r}_1^i$ принадлежит области U_2, а точки $\mathbf{r}_2^j$ и $\mathbf{r}_3^k$ — области U_3, равно согласно (1.13)

$$(1.14)\qquad P^3_{233}(\mathbf{R}_3) = v_2v_3\varphi_1^3(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) + v_2v_3v_3\varphi_2^3(\mathbf{R}_3)$$

в то время как функция φ_2^3 определяет вероятность того, что все три точки принадлежат различным областям

$$(1.15)\qquad P^3_{234}(\mathbf{R}_3) = v_2v_3v_4\varphi_2^3(\mathbf{R}_3)$$

Наряду с вероятностью $P^n_{ij\ldots k}$, имеющей смысл момента n-го порядка поля f_i, целесообразно ввести в рассмотрение его центральный момент

$$T^n_{ij\ldots k}(\mathbf{R}_n^{ij\ldots k}) = \langle f_i''(r_1^i) f_j''(\mathbf{r}_2^j) \ldots f_k''(\mathbf{r}_n^k)\rangle \tag{1.16}$$

связанный с $P^n_{ij\ldots k}$ соотношением

$$T^n_{ij\ldots k}(\mathbf{R}_n^{ij\ldots k}) = \sum_{\sigma_n}\sum_{q=0}^{n}(-1)^q v_i v_j \ldots v_l P^{n-q}_{m\ldots k}(\overline{\mathbf{R}}_{n-q}^{m\ldots k}) \tag{1.17}$$

Суммирование в (1.17) по перестановкам n точек приводит к появлению $N_k = n!\ /\ [k!\,(n-k)!]$ членов вида $v_i v_j \ldots v_l P^{n-q}_{m\ldots k}$, координатная зависимость каждого из которых определяется соответствующим набором $(n-q)$ точек из полного набора n точек.

Расчет центральных моментов μ_ω сводится к нахождению функций $T^n_{ij\ldots k}$.

2. Преобразуем функции $P^n_{ij\ldots k}$ и $T^n_{ij\ldots k}$ таким образом, чтобы они явно выражались через дисперсии $D^n_{ij\ldots k}$ характеристической функции f_i. Под дисперсией $D^n_{ij\ldots k}$ понимаем значение функции $T^n_{ij\ldots k}$ при $\mathbf{r}_1^i = \mathbf{r}_2^j = \ldots = \mathbf{r}_n^k$, т. е. при $\mathbf{R}_n^{ij\ldots k} = 0$.

Учитывая, что согласно (1.7) или (1.12)

$$P^n_{ij\ldots k}(0) = \sum_{p=2}^{N} v_p \delta_{ip}\delta_{jp}\ldots\delta_{kp} \tag{2.1}$$

из (1.17) с учетом определения (1.12) получим

$$D^n_{ij\ldots k} \equiv T^n_{ij\ldots k}(0) = \sum_{\sigma_n}\sum_{q=0}^{n}(-1)^q v^q_{ij\ldots k} \tag{2.2}$$

Для дальнейшего понадобятся функции

$$\begin{gathered}\pi_q^n(\mathbf{R}_q; \overline{\mathbf{R}}_{n-q}) = \sum_{\sigma_q}\sum_{t=0}^{q}\varphi_t^n(\mathbf{R}_t; \overline{\mathbf{R}}_{n-t})\\ \pi_0^\circ = \pi_1^1 = 1, \quad \pi^n_{n-1} = 0\\ \tau_q^n(\mathbf{R}_q; \overline{\mathbf{R}}_{n-q}) = \sum_{\sigma_q}\sum_{t=0}^{q}(-1)^t \pi_t^{n-q+t}(\mathbf{r}_{q-t+1}, \ldots, \mathbf{r}_q; \overline{\mathbf{R}}_{n-q})\\ \tau_0^\circ = \tau_1^1 = \tau^n_{n-1} = 0\end{gathered} \tag{2.3}$$

где во избежание громоздкости формул опущены верхние индексы у радиус-векторов. Функции (2.3) удовлетворяют определенным предельным соотношениям в духе (1.11), вытекающим из (1.8).

Отсюда, например, при $n = 2$ получим

$$\begin{gathered}\pi_0^2(\mathbf{R}_2) = \tau_0^2(\mathbf{R}_2) = \varphi_0^2(\mathbf{R}_2), \quad \pi_2^2(\mathbf{R}_2) = \varphi_0^2(\mathbf{R}_2) + \varphi_1^2(\mathbf{R}_2)\\ \tau_2^2(\mathbf{R}_2) = \pi_0^\circ - \pi_1^1(\mathbf{r}_1) - \pi_1^1(\mathbf{r}_2) + \pi_2^2(\mathbf{R}_2) = \pi_2^2(\mathbf{R}_2) - 1\end{gathered} \tag{2.4}$$

С помощью (2.3) функции (1.12) и (1.17) могут быть преобразованы к виду

$$\begin{gathered}P^n_{ij\ldots k}(\mathbf{R}_n^{ij\ldots k}) = \sum_{\sigma_n}\sum_{q=0}^{n} v_i v_j \ldots v_l D^{n-q}_{m\ldots k}\pi_q^n(\mathbf{R}_q^{ij\ldots l}; \overline{R}_{n-q}^{m\ldots k})\\ T^n_{ij\ldots k}(\mathbf{R}_n^{ij\ldots k}) = \sum_{\sigma_n}\sum_{q=0}^{n}(-1)^q v_i v_j \ldots v_l D^{n-q}_{m\ldots k}\tau_q^n(\mathbf{R}_q^{ij\ldots l}; \overline{\mathbf{R}}_{n-q}^{m\ldots k})\end{gathered} \tag{2.5}$$

Преимущество представления (2.5) по сравнению с (1.12) и (1.17) состоит в том, что здесь явным образом фигурируют дисперсии характеристической функции. Это особенно удобно при расчете μ_ω. Ниже будем рассматривать центральные моменты μ_ω для случая, когда все $\omega_a = 1$.

Используя определения (1.4), (1.6) и (1.16), запишем

$$\mu_{11\ldots1}(\mathbf{R}_n) \equiv \mu_n(\mathbf{R}_n) = T^n_{ij\ldots k}(\mathbf{R}_n^{ij\ldots k})\,\Delta\lambda_i \otimes \Delta\lambda_j \otimes \ldots \otimes \Delta\lambda_k \tag{2.6}$$

причем по индексам $i, j, \ldots, k$, обозначающим номер компонента, предполагается суммирование от двух до N. Подставим сюда $T^n_{ij\ldots k}$ из (2.5). Это дает

$$\mu_n(\mathbf{R}_n) = \sum_{\sigma_n}\sum_{q=0}^{n} (-1)^q v_i v_j \ldots v_l \times \tag{2.7}$$
$$\times D^{n-q}_{m\ldots k}\Delta\lambda_i \otimes \Delta\lambda_j \otimes \ldots \otimes \Delta\lambda_k \tau_q{}^n(\mathbf{R}_q^{ij\ldots l}; \overline{\mathbf{R}}_{n-q}^{m\ldots k})$$

Выпишем с помощью (2.7) центральный момент второго порядка тензорного поля λ_α, где под α будем понимать всю совокупность тензорных индексов поля λ. Из (2.7) находим

$$\mu_{\alpha\beta}(\mathbf{R}_2) = [v_i v_j \tau_2{}^2(\mathbf{R}_2{}^{ij}) + D_{ij}{}^2\tau_0{}^2(\mathbf{R}_2{}^{ij})]\,\Delta\lambda_{i\alpha}\Delta\lambda_{j\beta} \tag{2.8}$$

Ввиду того, что в формулах (2.7) и (2.8) проводится суммирование по компонентам, координатная и тензорная зависимости центральных моментов поля λ в общем случае не разделяются. Следует также отметить, что функции $\tau_q{}^n$, как и функции $\varphi_q{}^n$, зависят не только от координат точек, определяющих координатную зависимость μ_n, но и от того, каким компонентам принадлежат точки, входящие в $\tau_q{}^n$. Так, например, в общем случае $\tau_2{}^2(\mathbf{r}_1{}^i, \mathbf{r}_2{}^j) \neq \mathbf{r}_2{}^2(\mathbf{r}_1{}^j, \mathbf{r}_2{}^i)$, если $i \neq j$.

Зависимость $\tau_q{}^n$ от индексов компонентов может быть обусловлена их различиями, связанными с пространственным распределением и формой областей, занимаемых компонентами. Кроме того, она может иметь место вследствие неполного учета концентрационной зависимости множителями $v_i v_j \ldots v_l D^{n-q}_{m\ldots k}$ в (2.5).

Пусть рассматриваемая среда такова, что функции $\tau_q{}^n$ обладают симметрией относительно перестановок индексов компонентов при фиксированном положении точек $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$. Тогда функции $\tau_q{}^n$ удовлетворяют условию

$$\tau_q{}^n(\mathbf{R}_q^{ij\ldots l}; \overline{\mathbf{R}}_{n-q}^{m\ldots k}) = \tau_q{}^n(\mathbf{R}_q; \overline{\mathbf{R}}_{n-q}) \tag{2.9}$$

которое будем называть условием симметрии. Оно приводит к тому, что различия в статистических свойствах всех компонентов, за исключением первого, сводятся согласно (2.5) лишь к концентрационным. Аналогичное условие можно записать и для функций $\pi_q{}^n$.

Условие (2.9) значительно упрощает форму центрального момента μ_n. Подставляя (2.9) в (2.7), получим

$$\mu_n^{(1)}(\mathbf{R}_n) = \sum_{\sigma_n}\sum_{q=0}^{n} [\lambda_1{}'' \otimes]^q D^{(\lambda)}_{n-q}\tau_q{}^n(\mathbf{R}_q; \overline{\mathbf{R}}_{n-q}) \tag{2.10}$$
$$(\lambda_1{}'' = -v_i\Delta\lambda_i,\quad D_n^{(\lambda)} \equiv \mu_n(0))$$

где первое из равенств в скобках вытекает из (1.4). Верхний индекс у μ_n поставлен для того, чтобы подчеркнуть особую роль первого компонента. Среда, удовлетворяющая условиям (2.9), (2.10), ниже называется почти симметричной.

Расчет функции μ_n, проведенный здесь с помощью характеристической функции (1.1), может быть также выполнен и с использованием функции вида

$$(2.11)\qquad f_i^{(p)}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, \ \mathbf{r} \in U_i, & i \neq p \\ 0, \ \mathbf{r} \notin U_i, & \sum_{i=1}^{N} U_i = U \end{cases}$$

Функция (2.11) описывает ту же среду, что и функция (1.1), поэтому и результат расчета μ_n, очевидно, должен быть тем же. Однако, чтобы представить μ_n в форме (2.7), необходимо иметь в виду, что функции $\tau_q{}^n$ будут, вообще говоря, другими, $\Delta\lambda_i = \lambda_i - \lambda_p$, и суммирование по индексам $i, j, \ldots, k$ исключает p-й компонент.

В случае почти симметричной среды расчет μ_n при помощи (1.1) приводит к (2.10), а при помощи (2.11) — к выражению, имеющему форму (2.7). Поэтому при наличии в среде одного компонента с отличными от других статистическими свойствами важно правильно выбрать характеристическую функцию. А именно, таким образом, чтобы роль выделенного играл компонент, обладающий отмеченной выше особенностью.

Пусть теперь среда такова, что условие (2.9) выполняется для функций $\tau_q{}^n$, рассчитанных при помощи как (1.1), так и (2.11). Тогда вместо (2.9) будем иметь

$$(2.12)\qquad \mu_n^{(i)}(\mathbf{R}_n) = \sum_{\sigma_n} \sum_{q=0}^{n} [\lambda_i{}'' \otimes]^q D_{n-q}^{(\lambda)} \tau_q{}^n (\mathbf{R}_q; \overline{\mathbf{R}}_{n-q}), \quad i = 1 \div N$$

Среда, для которой центральный момент может быть представлен в виде (2.12), называется симметричной. Для симметричной среды использование верхнего индекса теряет какой-либо смысл.

Учитывая, что в качестве μ_n можно взять любое из $\mu_n^{(i)}$, запишем

$$\mu_n(\mathbf{R}_n) = \sum_{i=1}^{N} v_i \mu_n^{(i)}(\mathbf{R}_n) = \langle \mu_n(\mathbf{R}_n) \rangle$$

Подставляя сюда (2.12), получим

$$(2.13)\qquad \mu_n(\mathbf{R}_n) = \sum_{\sigma_n} \sum_{q=0}^{n} D_q^{(\lambda)} D_{n-q}^{(\lambda)} \tau_q{}^n (\mathbf{R}_q; \overline{\mathbf{R}}_{n-q})$$

$$D_q^{(\lambda)} \equiv \sum_{i=1}^{N} v_i [\lambda_i{}'' \otimes]^q$$

Функции $T^n_{ij\ldots k}$, соответствующие (2.13), имеют вид

$$(2.14)\qquad T^n_{ij\ldots k}(\mathbf{R}_n) = \sum_{\sigma_n} \sum_{q=0}^{n} D^q_{ij\ldots l} D^{n-q}_{m\ldots k} \tau_q{}^n (\mathbf{R}_q; \overline{\mathbf{R}}_{n-q}), \ \tau_2{}^2 = 0$$

Равенство $\tau_2{}^2$ нулю можно показать, используя вытекающее из (2.13) условие, налагаемое на $\tau_q{}^n$ и аналогичное (2.9).

Для тензорного поля λ_α из (2.13) имеем при $n = 2, 3, 4$

$$\mu_{\alpha\beta}(\mathbf{R}_2) = D_{\alpha\beta}^{(\lambda)}\tau_0^2(\mathbf{R}_2), \quad \mu_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{R}_3) = D_{\alpha\beta\gamma}^{(\lambda)}\tau_{0s}^3(\mathbf{R}_3)$$

$$\tau_{0s}^n \equiv \tau_0^n + \tau_n^n$$

$$\mu_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{R}_4) = D_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(\lambda)}\tau_{0s}^4(\mathbf{R}_4) + D_{\alpha\beta}^{(\lambda)}D_{\gamma\delta}^{(\lambda)}\tau_{2s}^4(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) + $$
$$+ D_{\alpha\gamma}^{(\lambda)}D_{\beta\delta}^{(\lambda)}\tau_{2s}^4(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3; \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4) + D_{\alpha\delta}^{(\lambda)}D_{\beta\gamma}^{(\lambda)}\tau_{2s}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4; \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$$

$$\tau_{2s}^4(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_l) \equiv \tau_2^4(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_l) + \tau_2^4(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_l; \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$$

В работе [5] при рассмотрении случайного тензорного поля марковского типа был найден явный вид функций τ_{0s}^n. Резюмируя полученный результат, следует подчеркнуть, что инвариантность (частичная или полная) среды относительно инверсии (всех или части) компонентов, приводящая к (2.13) или (2.12), существенно упрощает вид центральных моментов, их концентрационную и координатную зависимости. (Инверсия компонентов i и j, обозначаемая посредством $i \leftrightarrow j$, предполагает, во-первых, их перестановку в пространстве, а во-вторых, замену $v_i \leftrightarrow v_j$.)

3. Рассмотрим частный случай двухкомпонентной среды. Результаты п. 1 и 2 упрощаются, так как всюду, где в качестве выделенного фигурирует первый компонент, нужно использовать подстановку $i = j = \ldots = k = 2$, а это, в свою очередь, позволяет и вовсе отбросить эти индексы. Так, например, из (1.7) получим

$$P_{22\ldots2}^n(\mathbf{R}_n^{22\ldots2}) = \langle f_2(\mathbf{r}_1^2) f_2(\mathbf{r}_2^2) \ldots f_2(\mathbf{r}_n^2)\rangle = \langle f(\mathbf{r}_1) f(\mathbf{r}_2) \ldots f(\mathbf{r}_n)\rangle \equiv P_n(\mathbf{R}_n) \tag{3.1}$$

где P_n имеет смысл вероятности того, что все n точек принадлежат области U_2, занимаемой вторым компонентом. Формулы (2.5) принимают вид

$$P_n(\mathbf{R}_n) = \sum_{\sigma_n}\sum_{q=0}^{n} v_2^q D_{n-q}\pi_q^n(\mathbf{R}_q; \overline{\mathbf{R}}_{n-q}) \tag{3.2}$$

$$T_n(\mathbf{R}_n) = \sum_{\sigma_n}\sum_{q=0} (-v_2)^q D_{n-q}\tau_q^n(\mathbf{R}_q; \overline{\mathbf{R}}_{n-q})$$

$$D_n = v_2(1 - v_2)^n + (1 - v_2)(-v_2)^n$$

Отсюда следует, что в случае двухкомпонентной среды результат соответствует почти симметричной N-компонентной среде. Однако расчет при помощи (3.2) центральных моментов приводит к существенному отличию от (2.10).

Действительно, используя (2.6), запишем

$$\mu_n^{(1)}(\mathbf{R}_n) = T_n^{(1)}(\mathbf{R}_n)[\Delta\lambda \otimes]^n, \quad \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \tag{3.3}$$

где, как прежде, верхний индекс указывает, что роль выделенного играет первый компонент. Особенность (3.3) состоит в том, что здесь тензорная и координатная зависимости разделены. Первая из них определяется тензором $[\Delta\lambda\otimes]^n$, а вторая — функцией $T_n^{(1)}(\mathbf{R}_n)$. Таким образом, форму центральных моментов (3.3) с разделяющейся тензорной и координатной зависимостями следует считать спецификой двухкомпонентных сред, в работе, где рассматривалась смесь двух изотропных компонентов, был получен результат, аналогичный (3.3)[1].

Рассмотрим более детально симметричную среду. Переход от (1.1) к (2.11) в случае двухкомпонентной среды осуществляется заменой

$$(3.4)\qquad f_1^{(2)}(\mathbf{r}) = 1 - f_2(\mathbf{r}),\quad f_1^{(2)''}(\mathbf{r}) = -f_2''(\mathbf{r})$$

которая позволяет следующим образом выразить функции $P_n^{(2)}$ и $T_n^{(2)}$, рассчитанные с помощью $f_1^{(2)}$ соответственно через $P_q^{(1)}$ и $T_n^{(1)}$

$$(3.5)\qquad P_n^{(2)}(\mathbf{R}_n) = \sum_{\sigma_n}\sum_{q=0}^{n}(-1)^q P_q^{(1)}(\mathbf{R}_n),\quad T_n^{(2)}(\mathbf{R}_n) = (-1)^n T_n^{(1)}$$

Функции $P_q^{(1)}$ и $T_n^{(1)}$, стоящие в правых частях (3.5), выражаются согласно (3.2) через концентрацию второго компонента v_2 и функции $\pi_q{}^n$ и $\tau_q{}^n$, свойства которых определяются случайным полем $f_2(r)$. Функции $P_n^{(2)}$ и $T_n^{(2)}$ можно записать в форме (3.2). При этом в случае симметричной среды функции $\pi_q{}^n$ и $\tau_q{}^n$ в силу (2.9) останутся прежними, т. е. различия в свойствах компонентов будут связаны лишь с их концентрациями, а функции $P_n^{(2)}$ и $T_n^{(2)}$ будут определяться формулами (3.2), если в них произвести замену v_2 на $v_1 = 1 - v_2$. Обозначим функции $P_n^{(1)}$ и $T_n^{(1)}$, в которых произведена инверсия компонентов $2 \leftrightarrow 1$, посредством $\bar{P}_n^{(1)}$ и $\bar{T}_n^{(1)}$. Тогда имеем

$$(3.6)\qquad P_n^{(2)} = \bar{P}_n^{(1)},\quad T_n^{(2)} = \bar{T}_n^{(1)}$$

что вместе с (3.5) дает

$$(3.7)\qquad \bar{P}_n^{(1)} = \sum_{\sigma_n}\sum_{q=0}^{n}(-1)^q P_q^{(1)},\quad \bar{T}_n^{(1)} = (-1)^n T_n^{(1)}$$

Соотношения (3.7), полученные как следствие условий симметрии, позволяют упростить функции P_n и T_n, что приводит в конечном итоге к функциям T_n в форме (2.14).

Покажем при помощи (3.7), что $\tau_2{}^2 = 0$. При $n = 2$ для функций T_n имеем

$$(3.8)\qquad \bar{T}_2^{(1)} = D_2\tau_0{}^2 + v_1{}^2\tau_2{}^2 = D_2\tau_0{}^2 + v_2{}^2\tau_2{}^2 = T_2^{(1)}$$

откуда ввиду $v_1 \neq v_2$ вытекает искомый результат.

Из (3.8) видно, что уже при расчете функций T_2 обнаруживается различие между симметричной и произвольной неоднородными средами. В первом случае свойства среды инвариантны относительно инверсии компонентов $1 \leftrightarrow 2$, что приводит к $\tau_2{}^2 = 0$. Во втором случае $\tau_2{}^2 \neq 0$. Пусть вторая среда — матричная. Обозначая функцию T_2 в первом и во втором случаях через $T_2{}^s$ и $T_2{}^m$ соответственно, запишем

$$T_2{}^m(\mathbf{R}_2) - T_2{}^s(\mathbf{R}_2) = v_2{}^2\tau_2{}^2(\mathbf{R}_2)$$

Поскольку согласно (1.11) и (2.4) функция $\tau_2{}^2$ обращается в нуль при $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ и $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \to \infty$, обнаруженное различие может проявляться

[1] *Москаленко В. Н., Масленников С. А.* Свойства корреляционных функций локальных характеристик микронеоднородных материалов. В сб.: Проблемы надежности в строительной механике. Тезисы докл. 3-й Всес. конференции. Вильнюс, 1971.

лишь в промежуточной области. Для сред марковского типа [5] функция τ_2^2 равна нулю всюду.

В работе [2] была исследована двухкомпонентная среда, удовлетворяющая свойству

$$P_n^{(2)} = P_n^{(1)}, \quad T_n^{(2)} = T_n^{(1)} \tag{3.9}$$

Такая среда была названа симметричной. Видно, что концентрации обоих компонентов при этом равны $^1/_2$. Кроме того, в силу (3.5) и (3.9) функции P_{2m+1} сводятся к линейным комбинациям функций P_n, где $n \leqslant 2m$, а T_{2m+1} обращаются в нуль. Условия (3.9) являются предельным случаем условий (3.6). Действительно, при $v_1 = v_2 = {}^1/_2$ и выполнении условий симметричности соотношения (3.6) переходят в (3.9).

Требование идентичности статистических свойств компонентов (3.9) весьма существенно ограничивает класс рассматриваемых сред. Условия же (3.6) представляют собой обобщение введенного в [2] понятия симметрии на более широкий класс двухкомпонентных сред, а условия (2.9), кроме этого, распространяют его на среды с произвольным числом компонентов.

Поступила 11 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Picinbono M. B.* Calcul des probabilités — modèle statistique suggère par la distribution des grains, d'argent dans les films photographiques. Compt. rend. Acad. sci., 1955, vol. 240, No. 23.
2. *Frisch H. L.* Statistics of random media. Trans. Soc. Rheol., 1965, vol. 9, No. 1, p. 293.
3. *Болотин В. В.* Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М., Стройиздат, 1971.
4. *Ломакин В. А.* Статистическое описание напряженного состояния деформируемого тела. Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 6.
5. *Фокин А. Г., Шермергор Т. Д.* К вычислению упругих модулей гетерогенных сред. ПМТФ, 1968, № 3.