Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.4

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ НА ГРАНИЦЕ МИКРОНЕОДНОРОДНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В. В. Подалков, В. А. Романов

(Москва)

При помощи метода возмущений решается задача о напряженном состоянии случайно-неоднородного полупространства, находящегося в условиях макрооднородного напряженного состояния. Получены конечные формулы для статистических характеристик напряжений на границе полупространства. Задачи о напряженном состоянии случайно-неоднородных сред для плоскости, полуплоскости и пространства рассмотрены в [1–5].

В работе [6] решена аналогичная задача в перемещениях, причем отсутствует доказательство независимости деформаций и напряжений от значений, принимаемых упругими модулями, вне области, занятой телом, равновесие которого рассматривается.

1. Пусть в неоднородном полупространстве ($x_3 \geqslant 0$) реализуется макрооднородное напряженно-деформированное состояние

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \langle \sigma_{ij} \rangle, \quad e_{ij}^{(0)} = \langle e_{ij} \rangle \tag{1.1}$$

Здесь и далее угловыми скобками обозначена операция математического ожидания.

Представим напряжения и деформации в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)}, \quad e_{ij} = e_{ij}^{(0)} + e_{ij}^{(1)} \tag{1.2}$$

где $\sigma_{ij}^{(1)}$ и $e_{ij}^{(1)}$ — флуктуации напряжений и деформаций.

Закон Гука и уравнения совместности деформаций запишем так:

$$e_{ij} = S_1 \sigma_{ij} - S_2 \sigma_{kk} \delta_{ij}; \quad S_1 = \frac{1}{2G}, \quad S_2 = \frac{1}{2G} \frac{\nu}{1+\nu} \tag{1.3}$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} e_{kn, jm} = 0 \tag{1.4}$$

Здесь S_l — модули податливости, связанные с модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона ν, ε_{ijk} — единичный антисимметричный псевдотензор Леви-Чивита.

Положим ($S_k^{(1)}$ — флуктуации модулей податливости)

$$S_k^{(1)} = S_k - S_k^{(0)}, \quad S_k^{(0)} = \langle S_k \rangle \tag{1.5}$$

Подставляя (1.2), (1.3) в (1.4) и используя (1.5), получим

$$\sigma_{ij, kk}^{(1)} + \frac{1}{1+\nu_0} (\sigma_{kk, ij}^{(1)} - \sigma_{kk, ll} \delta_{ij}) = \frac{1}{S_1^{(0)}} \eta_{ij} \tag{1.6}$$

$$\eta_{ij} = \sigma_{nn}^{(0)} (S_{1, ij}^{(1)} - S_{1, ll} \delta_{ij}) + \sigma_{ij}^{(0)} S_{1, kk}^{(1)} - \sigma_{jk}^{(0)} S_{1, ki} - \sigma_{ki}^{(0)} S_{1, jk}^{(1)} +$$
$$+ \sigma_{kl}^{(0)} S_{1, kl} \delta_{ij} + \sigma_{nn}^{(0)} (S_{2, ll}^{(1)} \delta_{ij} - S_{2, ij}^{(1)})$$

(η_{ij} — тензор несовместности). Кроме того, напряжения $\sigma_{ij}^{(1)}$ должны удовлетворять уравнениям равновесия и граничным условиям

$$\sigma^{(1)}_{ij,j}=0,\quad \sigma_{i3}\big|_{x_3=0}=0\ (i=1,2,3) \tag{1.7}$$

Представим $S_k^{(1)}$ в виде интегралов Фурье

$$S_k^{(1)}=\iiint_{-\infty}^{\infty} f_k(\omega)\exp(i\omega\mathrm{x})\,d\omega\quad (k=1,2) \tag{1.8}$$

$$\mathrm{x}=\{x_1,x_2,x_3\},\quad \omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$$

($f_k(\omega)$ — обобщенная случайная функция). Решение системы (1.6), (1.7) ищем в виде

$$\sigma^{(1)}_{ij}=\tau^{(1)}_{ij}+\tau^{(2)}_{ij}$$

где $\tau_{ij}^{(1)}$ — частное решение (1.6), $\tau_{ij}^{(2)}$ — общее решение однородной системы, соответствующей (1.6).

Используя граничные условия в (1.7), получим граничные условия для решения однородной системы

$$\tau^{(2)}_{3k}\big|_{x_3=0}=-\tau^{(1)}_{3k}\big|_{x_3=0} \tag{1.9}$$

Возьмем $\tau_{ij}^{(1)}$ в виде

$$\tau^{(1)}_{ij}=\iiint_{-\infty}^{\infty}\alpha^{(k)}_{ij}(\omega)f_k(\omega)\exp(i\omega\mathrm{x})\,d\omega\quad (k=1,2) \tag{1.10}$$

Подставляя (1.10) в (1.6) и используя (1.8), получим

$$\alpha^{(k)}_{ij}=\frac{1}{\varkappa S^{(0)}_1}\frac{1}{\omega^4}\left[\varkappa\omega^2\eta^{(k)}_{ij}+(\omega_i\omega_j-\omega^2\delta_{ij})\eta^{(k)}_{ll}\right]\quad (k=1,2)$$

$$\eta_{ij}=\eta^{(1)}_{ij}+\eta^{(2)}_{ij},\quad \eta^{(2)}_{ij}=\sigma^{(0)}_{nn}(S^{(1)}_{2,ll}\delta_{ij}-S^{(1)}_{2,ij}),\quad \varkappa=1-\nu_0$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что (1.10) удовлетворяют уравнениям (1.7).

Решение однородной системы (1.6), тождественно удовлетворяющее уравнениям (1.7), ищем в форме Ю. А. Круткова [7]

$$\tau^{(2)}_{ij}=-\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}\psi_{ln,km}\quad \left(\psi_{ij}=\frac{1}{1+\varkappa}\gamma\delta_{ij}+\varphi_{ij}\right) \tag{1.11}$$

Здесь φ_{ij} — произвольные гармонические функции, а γ — частное решение уравнения

$$\frac{\varkappa}{1+\varkappa}\nabla^2\gamma=\varphi_{ij,ij} \tag{1.12}$$

Полагая в соотношении в скобках в (1.11) $\varphi_{11}\equiv\varphi_{22}\equiv\varphi_{33}\equiv\varphi_3$, $\varphi_{23}\equiv\varphi_2$, $\varphi_{13}\equiv\varphi_1$, $\varphi_{12}\equiv 0$, найдем из (1.12)

$$\gamma=\frac{1+\varkappa}{\varkappa}x_3\varphi_{i,i}\quad (i=1,2) \tag{1.13}$$

Гармонические функции φ_k ($k = 1, 2, 3$) принимая во внимание условие затухания напряжений $\tau_{ij}{}^{(2)}$ на бесконечности, возьмем в виде

$$\varphi_k = \iint_{-\infty}^{\infty} a_k^{(n)}(\omega) f_n(\omega) \exp(i\omega_* \mathbf{x}_* - \omega_* x_3)\, d\omega_* \quad (n = 1, 2) \tag{1.14}$$

$$\mathbf{x}_* = \{x_1, x_2\}, \quad \omega_* = \{\omega_1, \omega_2\}$$

Используя (1.10), (1.14), (1.13) и (1.11), получим окончательные выражения для возмущений напряжений

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \iiint_{-\infty}^{\infty} [\alpha_{ij}^{(k)} f_k \exp(i\omega_3 x_3) + \Omega_{ij}^{(k)} f_k \exp(-\omega_* x_3)] \exp(i\omega_* x_*)\, d\omega \tag{1.15}$$

$$\Omega_{ij}^k = i\left[\frac{1}{\varkappa}(\omega_i\omega_j x_3 - 2\delta_{ij}\omega_*)\,\omega_m a_m^{(k)} + \omega_*(2\delta_{ij}\omega_m a_m^{(k)} - \right.$$

$$\left. - \omega_i a_j^{(k)} - \omega_j a_i^{(k)}) - i\omega_i\omega_j a_3^{(k)}\right]$$

$$\Omega_{l3}^{(k)} = \frac{1}{\varkappa}\omega_l(1 - \omega_* x_3)\,\omega_m a_m^{(k)} + \omega_*{}^2 a_l^{(k)} - \omega_l\omega_m a_m^{(k)} + i\omega_l\omega_* a_3^{(k)}$$

$$\Omega_{33}^{(k)} = i\left[-\frac{1}{\varkappa}\omega_*{}^2 x_3\omega_m a_m^{(k)} + i\omega_*{}^2 a_3^{(k)}\right]$$

$$(i, j = 1, 2, 3; \quad k, l, m = 1, 2)$$

Здесь $a_m{}^{(k)}$ ($k = 1, 2$; $m = 1, 2, 3$) получены из граничных условий (1.9)

$$a_1^{(k)} = (1 - \varkappa)\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_*{}^4}\alpha_{23}^{(k)} + b_1, \quad a_2^{(k)} = (1 - \varkappa)\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_*{}^4}\alpha_{13}^{(k)} + b_2 \tag{1.16}$$

$$\alpha_3^{(k)} = \frac{1}{\omega_*{}^2}\alpha_{33}^{(k)}$$

$$b_n = i(1 - \varkappa)\frac{\omega_n(\omega_*{}^2 - \omega_n{}^2)}{\omega_*{}^5}\alpha_{33}^{(k)} - \frac{\omega_*{}^2 - (1 - \varkappa)\,\omega_n{}^2}{\omega_*{}^5}(\omega_*\alpha_{n3}^{(k)} + i\omega_n\alpha_{33}^{(k)})$$

В формулы (1.15) входят преобразования Фурье f_k функций $S_k{}^{(1)}$ ($k = 1, 2$), что, на первый взгляд, обязывает для определения напряжений в полупространстве задавать эти функции во всем пространстве.

Покажем, что это не так, т. е. что $S_k{}^{(1)}$ при $x_3 < 0$ не влияют на значения напряжений при $x_3 \geqslant 0$.

Для функций f_k имеем

$$f_k(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_k(\omega_1, \omega_2, u_3)\exp(-i\omega_3 u_3)\, du_3 \quad (k = 1, 2) \tag{1.17}$$

$$F_k(\omega_1, \omega_2, u_3) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty} S_k^{(1)}(u)\exp(-i\omega_* u_*)\, du_*$$

Используя (1.17), преобразование Фурье по x_1, x_2 напряжений $\sigma_{lm}{}^{(1)}(x_1, x_2, x_3)$ (1.15) можно привести к виду

$$P_{lm}(\omega_1, \omega_2, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{lm}(\omega_1, \omega_2, x_3, u_3)\, du_3 \tag{1.18}$$

$$G_{lm}(\omega_1, \omega_2, x_3, u_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F_k(\omega_1, \omega_2, u_3) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \{\alpha_{lm}^{(k)} \exp(i\omega_3 \varkappa_3) +$$

$$+ A_{lm}^{(k)} \exp(-i\omega_* x_3)\} \exp(-i\omega_3 u_3)\, d\omega_3$$

$$A_{lm}^{(k)} = i\frac{1}{\varkappa}(\omega_l\omega_m x_3 - 2\omega_*\delta_{lm})\,\omega_p a_p^{(k)} + i\,(2\delta_{lm}\omega_p a_p^{(k)} - \omega_l a_m^{(k)} -$$

$$- \omega_m a_l^{(k)})\,\omega_* + \omega_l\omega_m a_3^{(k)} \qquad (l,\ m,\ p,\ k = 1,\ 2)$$

Непосредственное вычисление интеграла (1.18) показывает, что $G_{lm}(\omega_1, \omega_2, x_3, u_3) = 0$ при $u_3 < 0$, а это и означает независимость $P_{lm}(\omega_1, \omega_2, x_3)$ от $S_k^{(1)}(\mathbf{u})$ при $u_3 < 0$. Для оставшихся трех напряжений вычисления аналогичны.

2. Полагая, что случайные поля $S_k^{(1)}$ $(k = 1, 2)$ статистически однородны и изотропны и статистически однородно и изотропно связаны между собой и, кроме того, имеют известные корреляционные функции

$$K_{lm}(\boldsymbol{\xi}) = \langle \overline{S_l^{(1)}(\mathbf{x})}\, S_m^{(1)}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi})\rangle$$

запишем компоненты корреляционного тензора напряжений

$$K_{pqst}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle \overline{\sigma_{pq}(\mathbf{x})}\, \sigma_{st}(\mathbf{x}')\rangle$$

в следующем виде (чертой обозначены комплексно-сопряженные величины):

$$K_{pqst}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \{\alpha_{pq}^{(m)}\alpha_{st}^{(n)}\,\Phi_{mn}(\boldsymbol{\omega}) \exp[i\omega_3(x_3' - x_3)] - \tag{2.1}$$

$$- A_{pq}^{(k)}\alpha_{st}^{(l)}\Phi_{kl}(\boldsymbol{\omega}) \exp(i\omega_3 x_3' - \omega_* x_3) + B_{st}^{(r)}\alpha_{pq}^{(j)}\Phi_{rj}(\boldsymbol{\omega}) \exp \times$$

$$\times (-\omega_* x_3' - i\omega_3 x_3) + A_{pq}^{(\nu)} B_{st}^{(\mu)}\Phi_{\nu\mu}(\boldsymbol{\omega}) \exp[-\omega_*(x_3' + x_3)]\} \times$$

$$\times \exp[i\omega_*(\mathbf{x}_*' - \mathbf{x}_*)]\, d\boldsymbol{\omega}$$

$$\Phi_{lm}(\boldsymbol{\omega}) = \Phi_{lm}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_0^{\infty} K_{lm}(\xi)\, J_{1/2}(\omega\xi)(\omega\xi)^{-1/2}\xi^2\, d\xi$$

$$\omega^2 = \omega_k\omega_k, \quad \xi^2 = \xi_k\xi_k, \quad p,\ q,\ s,\ t = 1,\ 2$$

см. [8]). $B_{st}^{(l)}$ получаются из $A_{pq}^{(k)}$ (см. (1.18)), заменой p, q, k на s, t, l; x_3 на x_3'; $a_3^{(k)}$ на минус $a_3^{(l)}$.

Остальные компоненты корреляционного тензора получаются аналогично.

Из формулы (2.1) видно, что поле напряжений стационарно вдоль осей x_1 и x_2 и нестационарно в направлении x_3, т. е.

$$K_{pqst}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = K_{pqst}(\mathbf{x}_*' - \mathbf{x}_*, x_3', x_3)$$

Перейдем к исследованию напряжений $\sigma_{ij}^{(1)}$ $(i, j = 1, 2)$ на границе полупространства $x_3 = 0$. В формулах, связывающих S_k $(k = 1, 2)$ с коэффициентом Пуассона ν и модулем сдвига G, положим $\nu = \nu_0 = \mathrm{const}$, тогда $S_2(\mathbf{x}) = \nu_0(1 + \nu_0)^{-1} S_1(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x})$. Ограничимся также случаем, когда $\sigma_{11}^{(0)} = \sigma_{22}^{(0)} = p$, $\sigma_{12}^{(0)} = \sigma_{13}^{(0)} = \sigma_{23}^{(0)} = \sigma_{33}^{(0)} = 0$.

Выражения для корреляционных функций (2.1) на границе полупространства будут иметь следующий вид:

$$K_{pppp}(\xi) = \frac{\mu^2}{\varkappa^2}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega^4\omega_*^2}\{4\varkappa^2(\omega_*^2-\omega_p^2)[(\varkappa-1)\omega_*^2-\omega_p^2]\times \tag{2.2}$$
$$\times(\varkappa\omega^2-\omega_*^2)+\omega_*^2[\varkappa(\omega^2+\omega_*^2-\omega_p^2)-\omega_*^2]^2\}\Phi(\omega)\exp(i\omega_*\xi_*)d\omega$$

$$K_{1122}(\xi) = \frac{\mu^2}{\varkappa^2}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega^4\omega_*^2}\{2\varkappa^2(\varkappa\omega^2-\omega_*^2)(2\varkappa\omega_1^2\omega_2^2-\omega_*^4)+$$
$$+2i\varkappa^2\omega_*\omega_3(\varkappa\omega^2-\omega_*^2)(\omega_1^2-\omega_2^2)+\omega_*^2[\varkappa(\omega^2+\omega_1^2)-\omega_*^2]\times$$
$$\times[\varkappa(\omega^2+\omega_2^2)-\omega_*^2]\}\Phi(\omega)\exp(i\omega_*\xi_*)d\omega$$

$$K_{1212}(\xi) = \frac{\mu^2}{\varkappa^2}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\varkappa^2\frac{\omega_1^2\omega_2^2}{\omega^4\omega_*^2}[4\varkappa^2\omega^2-(4\varkappa-1)\omega_*^2]\Phi(\omega)\exp(i\omega_*\xi_*)d\omega$$

$$p=1,\ 2,\quad \mu^2=\frac{p^2}{S_0^2};\quad S_0=\langle S(x)\rangle$$

Переходя в (2.2) к сферическим координатам и интегрируя по углам, получим, например, для K_{1212} и K_{1211}

$$K_{1212}(\xi_*) = 2\mu^2\pi^2\frac{\partial^3}{\partial\xi_1\partial\xi_2^2}\int\limits_0^{\infty}\Big[(1-4\varkappa)\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial}{\partial\xi_1}J_{-1/2}(\Omega)J_{1/2}(\Omega)-$$
$$-4\varkappa^2\frac{1}{\omega}\frac{\xi_1}{\xi_*}J_{1/2}^2(\Omega)\Big]\Phi(\omega)d\omega$$

$$K_{1211}(\xi_*) = \mu^2\pi^2\frac{\partial^2}{\partial\xi_1\partial\xi_2}\int\limits_0^{\infty}\Big\{\Big[2(4\varkappa-1)\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2}\frac{1}{\omega^2}+5-4\varkappa-$$
$$-\frac{3}{2}\frac{1}{\varkappa}\Big]J_{-1/2}(\Omega)J_{1/2}(\Omega)+\Big(1-\frac{1}{2}\frac{1}{\varkappa}\Big)J_{-3/2}(\Omega)J_{3/2}(\Omega)+$$
$$+8\varkappa^2\frac{\partial}{\partial\xi_2}\frac{1}{\omega}\frac{\xi_2}{\xi_*}J_{1/2}^2(\Omega)\Big\}\Phi(\omega)d\omega,\qquad \Omega=\frac{\omega\xi_*}{2}$$

Остальные компоненты корреляционного тензора имеют аналогичный вид и не приводятся ввиду их громоздкости.

Полагая $\xi_*=0$, получим следующие формулы для дисперсий:

$$D_{1111}=\frac{\mu^2}{\varkappa^2}\frac{4\pi}{15}(15\varkappa^4-32\varkappa^3+44\varkappa^2-28\varkappa+8)D \tag{2.3}$$
$$D_{1122}=\frac{\mu^2}{\varkappa^2}\frac{4\pi}{15}(5\varkappa^4-24\varkappa^3+42\varkappa^2-28\varkappa+8)D$$
$$D_{2222}=D_{1111},\quad D_{1211}=D_{1222}=0$$
$$D_{1212}=\frac{\mu^2}{\varkappa^2}\frac{4\pi}{15}(5\varkappa^4-4\varkappa^3+\varkappa^2)D$$
$$D=\int\limits_0^{\infty}\omega^2\Phi(\omega)d\omega,\quad \omega^2=\omega_m\omega_m$$

Представим (2.3) в виде
$D_{ijkl}=\mu^2Dv^2$ $(i,\ j,\ k,\ l=1,2)$, где v — так называемый коэффициент изменчивости. Вычисление v для случая $\nu_0=0.25$ дает следующие результаты:

$i=j=k=l=1$ и $i=j=k=l=2$, $v^2=2.76$

$i=j=1$; $k=l=2$, $v^2=2.96$

$i=k=1$; $j=l=2$, $v^2=0.675$

Соответствующие значения коэффициента изменчивости для пространства равны [1] 2.51, 1.69, 0.322.

Из приведенных расчетов следует, что возрастание дисперсии (особенно D_{1122} и D_{1212}) за счет границы существенно и, несомненно, требует учета при практических вычислениях.

Поступила 4 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ломакин В. А.* О деформировании микронеоднородных упругих тел. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
2. *Ломакин В. А.* Плоская задача теории упругости микронеоднородных тел. Инж. ж. МТТ, 1966, № 3.
3. *Ломакин В. А., Шейнин В. И.* Статистические характеристики полей напряжений в случайно-неоднородной упругой плоскости. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 4.
4. *Ломакин В. А., Шейнин В. И.* Концентрация напряжений на границе случайно-неоднородного упругого тела. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 2.
5. *Подалков В. В., Романов В. А.* Некоторые статистические характеристики поля деформаций микронеоднородных сред. Тр. Моск. энерг. ин-та, 1975, № 260.
6. *Наумов В. Н.* Напряженное состояние случайно-неоднородного упругого полупространства. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 2.
7. *Крутков Ю. А.* Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1949.
8. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.

[1] *Подалков В. В., Романов В. А.* Статистические характеристики микронеоднородного пространства. Тезисы докладов IV Всес. конференции по проблемам надежности в строительной механике. Вильнюс, 1975.