Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ УПРУГОГО ТЕЛА С РАЗРЕЗОМ

Я. В. Шляпоберский

(Ленинград)

Предлагается метод сведения задачи о неплоском разрезе к хорошо изученной задаче о плоском разрезе. Метод основан на представлении решения в виде второго потенциала теории упругости с последующим сведением задачи к псевдодифференциальному уравнению на неплоском компакте S с краем ∂S, лежащем в плоскости. Полученное уравнение асимптотической заменой сводится к псевдодифференциальному уравнению на плоской поверхности, которая является проекцией S на плоскость, содержащую ∂S. Последнее уравнение стандартным способом приводится к цепочке псевдодифференциальных уравнений, каждое из которых можно решить известными методами (например, используя преобразование Фурье). Если поверхность мало отличается от плоской, то уже первый член ряда дает приближенное решение задачи.

Решения пространственных задач о равновесии упругого тела с разрезом известны в случаях, когда поверхность разреза S лежит в плоскости [1, 2] или когда задача осесимметрична. В последнем случае возможно сведение ее к задаче сопряжения. Таким методом решена задача о разрезе по сферической шапке [3], однако решение громоздко, и получить из него картину напряженного состояния трудно.

1. Рассмотрим бесконечное изотропное упругое пространство, содержащее разрез по поверхности S, которую будем считать ляпуновским многообразием непрерывной кривизны с краем ∂S. На берегах разреза действуют распределенные нагрузки $\mathbf{q}$. Пусть $\mathbf{n}$ — орт нормали к S в точке x. Точки берегов разреза будем помечать индексами плюс или минус в зависимости от того, совпадает нормаль к границе упругого тела с нормалью $\mathbf{n}$ к поверхности S или противоположна ей.

Будем считать, что поле $\mathbf{q}$ на берегах разреза удовлетворяет условию

$$\mathbf{q}(x^+) = -\mathbf{q}(x^-) \tag{1.1}$$

В этом случае состояние упругой среды с нагруженным разрезом определяется заданием пары $\{S, \mathbf{q}\}$, где $\mathbf{q}(x) = \mathbf{q}(x^+)$ — поле на S.

В дальнейшем $\mathbf{u}$ и T_σ — поля перемещений и напряжений соответственно, $\sigma_n = \mathbf{n}\cdot\mathrm{T}_\sigma$. Точка между тензорами различной валентности обозначает такие операторы свертки в алгебре тензоров, которые на полиадах определяются следующим образом: $\mathbf{abcde} \to (\mathbf{ab})\cdot(\mathbf{cde}) = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{ade}$; $\mathbf{abcde}$, $\mathbf{ab}$ и т. д. — полиадное (тензорное) произведение векторов, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ — скалярное произведение векторов.

Тензор влияния неограниченной упругой среды задается соотношением [4]

$$\Gamma(y-z)=\lambda_1\frac{1}{R}\mathbf{I}+\mu_1\frac{1}{R^3}\mathbf{RR} \tag{1.2}$$

$$\mathbf{R}=\mathbf{y}-\mathbf{z},\quad R=|\mathbf{R}|,\quad \lambda_1=\frac{3-4\nu}{16\pi\mu(1-\nu)},\quad \mu_1=\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}$$

$\mathbf{I}$ — единичный двухвалентный тензор.

Выведем представление поля $\mathbf{u}$ через поле $\mathbf{b}$ разрывов перемещений на S.

$$\mathbf{b}(x)=\lim_{z\to x^-}\mathbf{u}(z)-\lim_{z\to x^+}\mathbf{u}(z) \tag{1.3}$$

Для этого [5] рассмотрим два состояния упругой среды.

1°. На берегах разреза действуют симметричные усилия $\mathbf{q}$.

2°. В точке $z\notin S$ действует сосредоточенная сила $\mathbf{P}$, а к берегам $S\pm$ разреза приложены усилия $\pm\,\sigma_n(y)$, удерживающие берега от взаимного смещения при действии силы $\mathbf{P}$, $\mathbf{n}=\mathbf{n}(y)$ — нормаль к поверхности в точке $y\in S$.

Как известно [4]

$$\sigma_n(y)=\Phi_n(y,z)\cdot\mathbf{P} \tag{1.4}$$

$$\Phi_n(y,z)=\frac{1}{8\pi(1-\nu)R^3}\left[(1-2\nu)(\mathbf{nR}-\mathbf{Rn}-\mathbf{n}\cdot\mathbf{RI})-3\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{R}}{R^2}\mathbf{RR}\right] \tag{1.5}$$

Применяя теорему взаимности работ для этих двух состояний и учитывая, что силы первого состояния на перемещениях, соответствующих второму состоянию, работ не совершают, имеем

$$\mathbf{u}(z)\cdot\mathbf{P}+\int_S[\mathbf{u}(y^+)\cdot\sigma_n(y)+\mathbf{u}(y^-)\cdot(-\sigma_n(y))]\,dS_y=0 \tag{1.6}$$

Отсюда, учитывая (1.3), (1.4) и произвольность силы $\mathbf{P}$, получаем

$$\mathbf{u}(\mathbf{b})(z)=\int_S\mathbf{b}(y)\cdot\Phi_n(y,z)\,dS_y \tag{1.7}$$

Таким образом, решение задачи можно искать в виде (1.7).

2. В дальнейшем необходимо знать некоторые свойства поля (1.7) [6,7]. Если $\mathbf{b}\in L_p(S)$, $p>1$, то для почти всех $x\in S$ существуют угловые граничные значения поля (1.7)

$$\lim\mathbf{u}(z)=\mathbf{u}^\pm(x),\quad z\in K(x,\alpha),\quad z\to x^\pm$$

($K(x,\alpha)$ — конус с центром в точке $x\in S$, углом при вершине $\alpha\in(0,\pi)$ и осью $\mathbf{n}(x)$). При этом имеет место равенство

$$\mathbf{u}^\pm(x)=\mp\frac{1}{2}\mathbf{b}(x)+\text{v.p.}\int_S\mathbf{b}(y)\cdot\Phi_n(y,x)\,dS_y \tag{2.1}$$

Главное значение сингулярного интеграла

$$\text{v.p.}\int_S=\lim_{\delta\to0}\int_{S\setminus S(x,\delta)}$$

где $S(x,\delta)$ — часть поверхности S, лежащей внутри цилиндра $C(x,\mathbf{n}(x),\delta)$ с осью $\mathbf{n}(x)$, проходящей через точку x, радиуса δ.

Если, кроме того, $\mathbf{b} \in C^{0,\beta}(S_0)$, $S_0 \subset S$ и $S_0 \cap \partial S = \varnothing$, то поле $\mathbf{u}(\mathbf{b})(z)$ непрерывно продолжимо в каждой внутренней точке S_0, и граничные значения вычисляются по формуле (2.1).

Введем тензор-оператор напряжений [6]

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}, \nabla) = \mu\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{I} + \mu(\mathbf{n}\nabla)^* + \lambda\mathbf{n}\nabla \tag{2.2}$$

Действие его на функции с тензорными значениями определяется обычными правилами тензорной алгебры, при этом ∇ есть векторно-дифференциальный оператор [4], $\mathbf{n}\nabla$ — диадное произведение единичного вектора $\mathbf{n}$ и вектор-оператора ∇; $(\mathbf{n}\nabla)^*$ — сопряженный диада-оператор, который действует по правилу $(\mathbf{n}\nabla)^*\mathbf{A} = (\mathbf{n}(\nabla\mathbf{A}))_2$, где линейный оператор $(\ )_2$ на полиадах определяется следующим образом: $(\mathbf{abcd})_2 = \mathbf{bacd}$, $(\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{I})\mathbf{A} = \mathbf{n}\cdot\nabla(\mathbf{I}\mathbf{A})$.

При свертке оператора напряжения с полем перемещений получаем вектор усилий на площадке с нормалью $\mathbf{n}$.

Вычислим

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}, \nabla)\cdot\mathbf{u}(\mathbf{b})(z) = \int_S \mathbf{T}_z\cdot[\mathbf{b}(y)\cdot\mathbf{\Phi}_\nu(y, z)]\,dS_y, \quad z \notin S$$

Так как $\mathbf{h}_n(\mathbf{b}) = \mathbf{T}_z\cdot[\mathbf{b}(y)\cdot\mathbf{\Phi}_\nu(y, z)]$ — линейное отображение $R^3 \to R^3$, то существует двухвалентный тензор

$$\mathbf{H}_{n\nu}(y, z): \mathbf{T}_z\cdot[\mathbf{b}(y)\cdot\mathbf{\Phi}_\nu(y, z)] = \mathbf{b}(y)\cdot\mathbf{H}_{n\nu}(y, z)$$

Здесь $\nu = \mathbf{n}(y)$, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор, входящий в оператор $\mathbf{T}_z = \mathbf{T}(\mathbf{n}, \nabla_z)$. Видно, что тензор $\mathbf{H}_{n\nu}(y, z) = |y - z|^{-3}\mathbf{K}_{n\nu}(y, z)$, $\mathbf{K}_{n\nu}(y, z)$ — ограниченная тензор-функция на $S \times S$.

Таким образом, вектор усилий на площадке с нормалью $\mathbf{n}$ в точке $z \notin S$ в среде с разрезом S, на котором поле перемещений терпит разрыв $\mathbf{b}$, представим в виде

$$\sigma_n(\mathbf{b})(z) = \int_S \mathbf{b}(y)\cdot\mathbf{H}_{n\nu}(y, z)\,dS_y \tag{2.3}$$

Для того чтобы найти $\mathbf{b}$ по заданию вектора усилий $\mathbf{q}$ на S, необходимо поставить (пока формально) условие

$$\lim_{z\to x\pm} \sigma_n(\mathbf{b})(z) = \mathbf{q}(x), \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}(x) \tag{2.4}$$

Известно [6], что $[\sigma_n(\mathbf{b})]^+ = [\sigma_n(\mathbf{b})]^-$, если $\mathbf{b} \in C^{1,\beta}(S)$. При этом $\sigma_n(\mathbf{b}) \in C^{0,\beta}(R^3 \setminus \partial S)$.

Ясно, что переходить к пределу $z \to x \in S$ непосредственно под знаком интеграла в (2.3) нельзя, так как из-за особенности R^{-3} в тензоре $\mathbf{H}_{n\nu}$ интеграл не существует даже в смысле главного значения. Поэтому под интегралом справа в (2.3) при $z \in S$ надо понимать подходящую регуляризацию. В данном случае наиболее удобна регуляризация при помощи преобразования интеграла по теореме Стокса [7]

$$\sigma_n(\mathbf{b})(z) = \int_S \sigma[\mathbf{n}, \mathbf{H}(y, z), \mathbf{M}(y), \mathbf{b}(y)]\,dS_y + \int_{\partial S} \mathbf{b}(y)\cdot\mathbf{L}(y, z)\,dl_y \tag{2.5}$$

В равенстве (2.5) введены следующие обозначения:

(2.6) $$\sigma[\mathbf{n}, \mathbf{H}, \mathbf{M}, \mathbf{b}] = \mu^2[\mathbf{n}\cdot\mathbf{Mb}\cdot\cdot\mathbf{H}_2 + \mathbf{Mb}\cdot\cdot\mathbf{H}_2\cdot\mathbf{n} - \mathbf{n}\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{b} - (\mathbf{H}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{n}] + \lambda^2\mathbf{nh}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{b} + \lambda\mu\mathbf{nMb}\cdot\cdot\cdot\mathbf{H}_2 + \mu(\lambda+\mu)[\mathbf{n}\cdot\mathbf{hM}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{h}(\mathbf{M}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{n}]$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(y, z) = \nabla_z\mathbf{\Gamma}(y - z), \quad \mathbf{h} = \mathbf{h}(y, z) = \nabla_z\cdot\mathbf{\Gamma}(y - z)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(y) = \mathbf{v}\mathbf{D}_y - (\mathbf{v}\mathbf{D}_y)^* = \mathbf{v}\nabla_y - (\mathbf{v}\nabla_y)^*, \quad \mathbf{v} = \mathbf{n}(y)$$

$\mathbf{D}_y = \nabla_y - \mathbf{vv}\cdot\nabla_y$ — оператор касательного дифференцирования $\mathbf{H}_2 = (\mathbf{H}(y, z))_2$ — определенный ранее изомер тензора $\mathbf{H}(y, z)$, $\mathbf{L}(y, z)$ — некоторый двухвалентный тензор, конкретный вид которого несуществен.

Используя свойство производных первого потенциала теории упругости [6,7], переходом в равенстве (2.5) к пределу при $z \to x \in S \setminus \partial S$ получим сумму сингулярных (в смысле главного значения) интегралов вида (свертка)

$$\mathbf{n}\int_S \mathbf{H}(\mathbf{Mb})\,dS_y$$

и интеграл по краю

$$\int_{\partial S} \mathbf{b}(y)\cdot\mathbf{L}(y, x)\,dl_y$$

Теперь условие (2.4) имеет смысл и определяет псевдодифференциальное уравнение на поверхности S с краем ∂S. Цель всех последующих действий — аккуратно произвести замену переменных в сингулярных интегралах так, чтобы получить уравнение на плоскости, и решить его, применяя асимптотические разложения.

3. Пусть поверхность S мало отличается от плоской, т. е. существует пространственная система ортогональных ортов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, в координатах которой ее уравнение представимо в виде

(3.1) $$x_3 = \varepsilon f(x_1, x_2), \quad \varepsilon \in [0, 1)$$

Дополнительно потребуем, чтобы край ∂S поверхности лежал в плоскости $\Pi : x_3 = 0$, т. е. $f(x_1, x_2) = 0$ при $(x_1, x_2) \in \partial S$.

Пусть $\pi(A)$ — проекция множества A вдоль $\mathbf{e}_3$ на Π. Уравнение поверхности (3.1) порождает отображение $\mathbf{F}$ цилиндра над $\Sigma = \pi(S)$ на себя. $\mathbf{F} : \Sigma \times R^1 \to \Sigma \times R^1$ действует по формуле

(3.2) $$\mathbf{x} = \mathbf{F}(\xi) = \xi + \varepsilon f(\pi\xi)\mathbf{e}_3$$

Отображение $\mathbf{F}$ — взаимно-однозначное. Пусть в окрестности поверхности S задано поле $\varkappa(\mathbf{x})$. Тогда $\mathbf{F}$ порождает поле $\varkappa_*$ в окрестности Σ

(3.3) $$\varkappa_*(\xi) = \varkappa(\mathbf{x}(\xi))$$

Можно показать, что (знак $\approx$ означает равенство с точностью до членов порядка ε^2)

(3.4) $$(\nabla\varkappa)_*(\xi) \approx \nabla_\xi\varkappa_*(\xi) - \varepsilon\mathbf{p}(\xi_0)\frac{\partial}{\partial\xi_3}\varkappa_*(\xi)$$

(3.5) $$\xi_0 = \pi(\xi), \quad \mathbf{p}(\xi_0) = \frac{\partial f}{\partial\xi_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial\xi_2}\mathbf{e}_2 \equiv p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2$$

Приведем далее ряд асимптотических равенств, используемых ниже

(3.6) $\mathbf{n}_*(\xi) \approx \mathbf{e}_3 + \varepsilon \mathbf{n}_1(\xi), \quad \mathbf{n}_1(\xi) = -\mathbf{p}(\xi_0)$

(3.7) $(\mathbf{D}_x)_* \approx \mathbf{D}_\xi + \varepsilon \left[p_1 (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} + p_2 (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right]$

(3.8) $(\mathbf{M}(x))_* \approx \mathbf{M}(\xi) + \varepsilon \mathbf{M}_1(\xi), \quad \mathbf{M}_* \mathbf{b}_* = (\mathbf{M}\mathbf{b})_*$

$$\mathbf{M}_1(\xi) = (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) \left[p_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} - p_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right]$$

Пусть $\xi \to \mathbf{x}$, $\eta \to \mathbf{y}$, $\mathbf{R} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$, $\mathbf{r} = \eta - \xi$, $\rho = \varkappa(\mathbf{R})$ — проекция $\mathbf{R}$ на Π, $\Delta(\eta, \xi) = f(\eta_0) - f(\xi_0)$, $\eta_0 = \pi(\eta)$. Из (3.2) следует, что

(3.9) $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \varepsilon \Delta \mathbf{e}_3$

$$R^\alpha \approx r^\alpha + \alpha \varepsilon \Delta r^{\alpha - 1} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{r}_1 = r^{-1}\mathbf{r}, \quad \alpha \in \mathbf{R}^1$$

Для тензора $\mathbf{H}(y, x) = \nabla_x \mathbf{\Gamma}(y - x)$ имеем (по немому индексу производится суммирование от 1 до 3)

$$\mathbf{H}(y, x) = \left\{ \lambda_1 \mathbf{R}\mathbf{I} - \mu_1 (\mathbf{I}\mathbf{R} + \mathbf{e}_j \mathbf{R} \mathbf{e}_j) + 3\mu_1 \frac{1}{R^2} \mathbf{R}\mathbf{R}\mathbf{R} \right\} \frac{1}{R^3}$$

Применяя равенства (3.9), получим

$$\mathbf{H}_*(\eta, \xi) \approx \mathbf{H}(\eta, \xi) + \varepsilon \mathbf{H}_1(\eta, \xi) + \varepsilon \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \mathbf{T}(\eta, \xi)$$

$$\mathbf{H}_1(\eta, \xi) = \Delta r^{-3} \{ \lambda_1 \mathbf{e}_3 \mathbf{I} - \mu_1 (\mathbf{I}\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_j) + 3\mu_1 r^{-2} (\mathbf{r}\mathbf{r}\mathbf{e}_3) \}$$

Здесь $\mathbf{T}(\eta, \xi)$ — поточечно ограниченная тензор-функция, $(\mathbf{r}\mathbf{r}\mathbf{e}_3) = \mathbf{r}\mathbf{r}\mathbf{e}_3 + \mathbf{r}\mathbf{e}_3\mathbf{r} + \mathbf{e}_3\mathbf{r}\mathbf{r}$.

При $x, y \in S$, $\xi, \eta \in \Sigma$ имеем $\mathbf{r} = \rho$, $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$, поэтому

(3.10) $\mathbf{H}_*(\eta, \xi) \approx \mathbf{H}(\eta, \xi) + \varepsilon \mathbf{H}_1(\eta, \xi)$

В подынтегральные выражения (2.5) входят поля $\mathbf{M}(\mathbf{n}(y), \nabla_y)\, \mathbf{b}(y)$ при $y \in S$. Для того чтобы можно было фактически вычислять эти поля, необходимо доопределить поле $\mathbf{b}$ в окрестности поверхности S. Сделаем это по следующему правилу (π_S — проекция вдоль $\mathbf{e}_3$ на S):

$$\mathbf{b}(z) = \mathbf{b}(\pi_S z), \quad \forall z \in \Sigma \times R^1$$

Согласно (3.3) возникает поле $\mathbf{b}_*(\xi)$ в окрестности Σ, причем очевидно, что $\mathbf{b}_* = \text{const}$ вдоль нормали $\mathbf{e}_3$ к поверхности Σ. Так как $\mathbf{M}(\mathbf{n}, \nabla) = \mathbf{M}(\mathbf{n}, \mathbf{D})$, то из теоремы Адамара — Гюгонио [8], которая утверждает, что $\mathbf{D} f_1 |_S = \mathbf{D} f_2 |_S$ для любых f_1 и $f_2 : f_1 |_S = f_2 |_S$, следует, что любое гладкое доопределение полей в окрестности поверхности корректно.

Рассмотрим теперь сингулярный интеграл в смысле главного значения

(3.11) $\text{v.p.} \int\limits_S K(x, y) \varphi(y)\, dS_y = \lim\limits_{\delta \to 0} \int\limits_{S \setminus S(x, \delta)} K(x, y) \varphi(y)\, dS_y$

Производя замену переменных (3.2) в интеграле под знаком предела в (3.11), который является обычным несингулярным интегралом, получим

(3.12) $\int\limits_{S \setminus S(x, \delta)} K(x, y) \varphi(y)\, dS_y = \int\limits_{\Sigma \setminus \pi S(x, \delta)} K_*(\xi, \eta) \varphi_*(\eta) I(\eta)\, d\eta$

Здесь $I(\eta)$ — первая квадратическая форма поверхности S. Переходя в (3.12) к пределу $\delta \to 0$, получим

$$\text{v.p.} \int_S K(x, y)\, \varphi(y)\, dS_y = \oint_\Sigma K_*(\xi, \eta)\, \varphi_*(\eta)\, I(\eta)\, d\eta$$

причем сингулярный интеграл в правой части не равен соответствующему интегралу в смысле главного значения, так как область $\pi S(x, \delta)$ — не круг. Однако [6,9]

$$\oint_\Sigma K_*(\xi, \eta)\, \varphi_*(\eta)\, I(\eta)\, d\eta = \text{v.p.} \int_\Sigma K_*(\xi, \eta)\, \varphi_*(\eta)\, I(\eta)\, d\eta -$$

$$- \varphi_*(\xi)\, I(\xi) \int_0^{2\pi} k_*(\xi, \vartheta) \ln \cos \alpha(\xi, \vartheta)\, d\vartheta$$

Здесь

$$k_*(\xi, \vartheta) = \lim_{|\eta - \xi| \to 0} |\eta - \xi|^2 K_*(\xi, \eta)$$

причем $\eta \to \xi$ так, что угол ϑ между векторами $\eta - \xi$ и ξ постоянен, $\alpha(\xi, \vartheta)$ — угол межу вектором $\mathbf{R} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ и его проекцией ρ на Σ.

Можно показать [6], что

$$\cos \alpha(\xi, \vartheta) = n_3(\xi)\, [n_3^2 + (n_1 \cos \vartheta + n_2 \sin \vartheta)^2]^{-1/2}$$

Разлагая $\cos \alpha(\xi, \vartheta)$ в ряд по степеням ε, с точностью до ε^2 получим $\cos \alpha(\xi, \vartheta) \approx 1$. Поэтому

$$\oint_\Sigma \approx \text{v.p.} \int_\Sigma$$

а так как $I(\eta) \approx 1$, то из равенства (3.12) имеем

$$\left(\text{v.p.} \int_S K(x, y)\, \varphi(y)\, dS_y\right)_* \approx \text{v.p.} \int_\Sigma K_*(\xi, \eta)\, \varphi_*(\eta)\, d\eta$$

Теперь можно выполнять замену переменных в равенстве (2.5).

Из (3.10) получаем

$$(\mathbf{H}_*(\eta, \xi))_2 \approx (\mathbf{H}(\eta, \xi))_2 + \varepsilon (\mathbf{H}_1(\eta, \xi))_2$$

$$(\nabla_x \cdot \mathbf{\Gamma}(x - y))_* \approx \mathbf{h}(\eta, \xi) + \varepsilon \mathbf{h}_1(\eta, \xi)$$

$$\mathbf{h}(\eta, \xi) = \nabla_\xi \cdot \mathbf{\Gamma}(\eta - \xi) = (\lambda_1 - \mu_1)\, r^{-3} \mathbf{r}$$

$$\mathbf{h}_1(\eta, \xi) = (\lambda_1 - \mu_1)\, r^{-3} \Delta \mathbf{e}_3$$

Подставляя эти выражения, а также (3.6) и (3.8) в (2.5), получим

$$(\boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{b}))_*(\xi) \approx \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{b}_*)(\xi) + \varepsilon \boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{b}_*)(\xi) + \mathbf{L}_*(\mathbf{b}_*)(\xi) \tag{3.13}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{b}_*)(\xi) = \int_\Sigma \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{e}_3, \mathbf{H}(\eta, \xi), \mathbf{M}(\eta), \mathbf{b}_*(\eta)]\, d\eta$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{b}_*)(\xi) = \int_\Sigma \{\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{n}_1, \mathbf{H}(\eta, \xi), \mathbf{M}(\eta), \mathbf{b}_*(\eta)] +$$

$$+ \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{e}_3, \mathbf{H}_1(\eta, \xi), \mathbf{M}(\eta), \mathbf{b}_*(\eta)] + \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{e}_3, \mathbf{H}(\eta, \xi), \mathbf{M}_1(\eta), \mathbf{b}_*(\eta)]\}\, d\eta$$

$$\mathbf{L}_*(\mathbf{b}_*)(\xi) = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{b}_*(\eta) \cdot \mathbf{L}_*(\eta, \xi)\, dl_\eta$$

Вектор $\sigma[\mathbf{n}, \mathbf{H}, \mathbf{M}, \mathbf{b}]$ определен равенством (2.6). Все входящие в (3.13) операторы, очевидно, линейные.

4. Будем искать решение псевдодифференциального (интегро-дифференциального) уравнения

$$(\sigma_n(\mathbf{b}))_* \equiv (\sigma_n)_*(\mathbf{b}_*) = \mathbf{q}_* \tag{4.1}$$

в виде формального ряда по ε

$$\mathbf{b}_*(\xi) = \mathbf{b}_0(\xi) + \varepsilon \mathbf{b}_1(\xi) + \ldots \tag{4.2}$$

Заметим, что уравнение (4.1) эквивалентно уравнению (2.5), так как отображение $\mathbf{F}$ взаимно-однозначно и гладко.

Разлагая нагрузку $\mathbf{q}_*(\xi) = \mathbf{q}_0(\xi) + \varepsilon\, \mathbf{q}_1(\xi) + \ldots$ в ряд по степеням ε, подставляя (4.2) в (3.13) и приравнивая выражения при одинаковых степенях ε, получим

$$\sigma_0(\mathbf{b}_0) + \mathbf{L}_*(\mathbf{b}_0) = \mathbf{q}_0 \quad (\text{задача } J_0)$$

$$\sigma_0(\mathbf{b}_1) + \mathbf{L}_*(\mathbf{b}_1) = \mathbf{q}_1 \quad (\text{задача } J_1)$$

Рассмотрим задачу J_0. Из определения σ_0 следует, что это задача о разрезе Σ с нагрузкой $\mathbf{q}_0$. Если решение $\mathbf{b}_0$ указанной задачи искать в классе полей с плотностью энергии, интегрируемой в окрестности $\partial\Sigma$, то придем к физически очевидному условию $\mathbf{b}_0|_{\partial\Sigma} = 0$. Следовательно, интеграл по $\partial\Sigma$ пропадает, т. е. $\mathbf{L}_*(\mathbf{b}_0) = 0$.

Определив решение $\mathbf{b}_0$ задачи о плоском разрезе и подставив его в задачу J_1, получим уравнение для определения $\mathbf{b}_1$. Задача J_1 есть таким образом задача о плоском разрезе Σ, нагруженном усилиями $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{q}_1 - \sigma_1(\mathbf{b}_0)$.

Если бы велось разложение по ε с точностью до ε^{n+1}, то, приравнивая выражения при одинаковых степенях ε, получили бы цепочку задач $J_0, J_1, \ldots, J_n$. Решение $\mathbf{b}_k$ любой задачи J_k можно получить, если известны решения $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{k-1}$ задач $J_0, J_1, \ldots, J_{k-1}$, при этом операторы задач J_k для любого k одни и те же, различны у них только правые части $\mathbf{Q}_k$ — фиктивные нагрузки. Можно, по-видимому, доказать, что

$$\mathbf{b}(x) - \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \mathbf{b}_k(\xi(x)) = O(\varepsilon^{n+1})$$

Поэтому если поверхность мало отличается от плоской, то $\mathbf{b}_0 + \varepsilon \mathbf{b}_1$ — приближенное решение задачи.

Заметим, что предложенный асимптотический метод решения псевдодифференциального уравнения на неплоских многообразиях с краем может быть с очевидными изменениями применен для решения задач о разрезах в условиях плоской деформации, причем ввиду простоты решения для прямолинейного разреза этот метод эффективен и в двумерных задачах.

Автор выражает глубокую признательность А. А. Вакуленко за постоянное внимание и помощь в работе.

Поступила 27 VIII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
2. *Си Г., Либовиц Г.* Математическая теория хрупкого разрушения. В сб.: Разрушение, т. 2. М., «Мир», 1975.
3. *Бойко Л. Т., Зювин В. А., Моссаковский В. И.* Сферический разрез в упругом пространстве. Докл. АН СССР, 1968, т. 181, № 6.
4. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
5. *Вакуленко А. А.* О связи микро- и макромоделей упругопластического тела. В сб.: Исследования по упругости и пластичности, вып. 10. Изд-во ЛГУ, 1974.
6. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М., «Наука», 1976.
7. *Доманьский З.* Свойства оператора напряжений потенциала двойного слоя статической теории упругости. Arch. Mech. stosowanej, 1968, vol. 20, No, 3, p. 347—354.
8. *Гюнтер Н. М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М., Гостехиздат, 1953.
9. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.