

ОПТИМИЗАЦИЯ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

В. Н. Солодовников

(Новосибирск)

Предлагается основанный на методе линеаризации [1] алгоритм численного решения задач оптимизации упругих оболочек вращения при статическом нагружении. Оболочки с фиксированными параметрами рассчитываются конечно-разностным методом. Дана процедура вычисления градиентов функционалов, определенных на решении уравнений равновесия оболочки, и градиента нагрузки потери устойчивости по варьируемым параметрам оболочки. Приведены примеры оптимизации формы оболочек вращения.

1. Уравнения равновесия и устойчивости оболочек вращения и метод их решения. Ниже приводятся уравнения равновесия и устойчивости упругих оболочек вращения под осесимметрической нагрузкой и описан алгоритм их решения, основанный на результатах работы [2]. Рассматриваются самосопряженные краевые задачи равновесия и устойчивости.

Соотношения между приращениями деформаций e_{ij} , кривизн k_{ij} , углов поворота элементов оболочки β_i ($i, j = 1, 2$) и приращениями смещений u, v, w при потере устойчивости принимаются в виде

$$(1.1) \quad \beta_1 = -\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{u}{R_1}, \quad \beta_2 = -\frac{\partial w}{a \partial \varphi} + \frac{v}{R_2}$$

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_1} + \lambda \psi \beta_1, \quad e_{22} = \frac{\partial v}{a \partial \varphi} + \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial s} u + \frac{w}{R_2}$$

$$2e_{12} = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial u}{a \partial \varphi} - \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial s} v + \lambda \psi \beta_2$$

$$k_{11} = \frac{\partial \beta_1}{\partial s}, \quad k_{22} = \frac{\partial \beta_2}{a \partial \varphi} + \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial s} \beta_1$$

$$2k_{12} = \frac{\partial \beta_2}{\partial s} + \frac{\partial \beta_1}{a \partial \varphi} - \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial s} \beta_2 + \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \left[\frac{\partial (av)}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right]$$

$$R_1 = \frac{\partial s}{\partial \theta}, \quad R_2 = \frac{a}{\sin \theta}, \quad \cos \theta = \frac{\partial a}{\partial s}, \quad 0 \leq s \leq S$$

Здесь s — длина дуги меридиана; φ — угол поворота меридиональной плоскости вокруг оси вращения, координата на параллели; a — расстояние от оси вращения до срединной поверхности оболочки; θ — угол между осью вращения и нормалью к срединной поверхности; R_1, R_2 — радиусы кривизны; u, v, w — приращения смещений вдоль меридиана, параллели и в направлении внешней нормали к срединной поверхности оболочки соответственно; λ — собственное значение, величина внешней нагрузки; ψ — угол поворота элемента оболочки вокруг параллели в докритическом

состоянии при $\lambda = 1$. Здесь и ниже индексами 1, 2 помечаются величины, определяемые на поперечных сечениях оболочки, ортогональных к меридиану и параллели соответственно, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина оболочки.

Приращения усилий и моментов при потере устойчивости удовлетворяют следующему вариационному уравнению:

$$(1.2) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^S \left[N_{11} \delta e_{11} + N_{22} \delta e_{22} + 2N_{12} \delta e_{12} + M_{11} \delta k_{11} + M_{22} \delta k_{22} + \right. \\ \left. + 2M_{12} \delta k_{12} + Q_1 \delta \left(\beta_1 + \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_1} \right) + Q_2 \delta \left(\beta_2 + \frac{\partial w}{a \partial \varphi} - \frac{v}{R_2} \right) + \right. \\ \left. + \lambda (\chi_1 \beta_1 \delta \beta_1 + \chi_2 \beta_2 \delta \beta_2) \right] ds d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[N_{11}^* \delta u + \left(N_{12} + \frac{1}{R_\nu} M_{12} \right)^* \delta v + \right. \\ \left. + \left(Q_1 + \frac{\partial M_{12}}{a \partial \varphi} \right)^* \delta w + M_{11}^* \delta \beta_1 \right]_{s=0}^{s=S} d\varphi \\ R_\nu^{-1} = \frac{3}{2} R_2^{-1} - \frac{1}{2} R_1^{-1}$$

Здесь δ — знак вариации; N_{ij} , M_{ij} , Q_i ($i, j = 1, 2$) — приращения усилий, моментов и перерезывающих сил соответственно, умноженные на расстояние a до оси вращения оболочки; χ_1 , χ_2 — усилия в докритическом состоянии при $\lambda = 1$, умноженные на a ; звездочками помечены значения соответствующих функций при $s = 0$ и при $s = S$ (либо заданные и равные нулю, либо искомые).

По закону Гука полагаем

$$(1.3) \quad e_{11} = A (N_{11} - \nu N_{22}), e_{22} = A (N_{22} - \nu N_{11}), e_{12} = A (1 + \nu) N_{12}, \\ A = (aEh)^{-1} \\ k_{11} = B (M_{11} - \nu M_{22}), k_{22} = B (M_{22} - \nu M_{11}), k_{12} = B (1 + \nu) M_{12}, \\ B = 12 (aEh^3)^{-1}$$

Сформулируем условия в замкнутой вершине оболочки вращения, где $s = a = 0$, при отсутствии в ней сосредоточенных сил. В этом случае в вариационном уравнении (1.2) справа следует убрать интеграл по φ при $s = 0$.

Выполняя разделение переменных, подставим в уравнения (1.1) — (1.3) разложения функций u , w , β_1 , e_{11} , e_{22} , k_{11} , k_{22} , N_{11} , N_{22} , M_{11} , M_{22} , Q_1 в ряды Фурье по $\cos m\varphi$ и разложения остальных функций v , β_2 , e_{12} , k_{12} , N_{12} , M_{12} , Q_2 в ряды Фурье по $\sin m\varphi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$).

Из (1.2) следует, что

$$(1.4) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{m=0}^{\infty} [N_{11,m} \delta u_m + (N_{12,m} + R_\nu^{-1} M_{12,m}) \delta v_m + (Q_{1,m} + \\ + m a^{-1} M_{12,m}) \delta w_m + M_{11,m} \delta \beta_{1,m}] = 0$$

где индексом m помечаются коэффициенты рядов Фурье соответствующих функций при $\cos m\varphi$, $\sin m\varphi$.

Вариации $\delta u_m, \delta v_m, \delta w_m, \delta \beta_{1,m}$ не независимы. В произвольной точке оболочки выполняются соотношения

$$(1.5) \quad \begin{aligned} u &= -\zeta \sin \theta + (\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi) \cos \theta, & v &= \eta \cos \varphi - \xi \sin \varphi \\ w &= \zeta \cos \theta + (\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi) \sin \theta \end{aligned}$$

Здесь ξ, η, ζ — приращения смещений срединной поверхности оболочки при потере устойчивости в направлениях $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$, лежащих в плоскости, ортогональной к оси вращения оболочки и по оси вращения соответственно. Переходя в (1.5) к пределу при $a \rightarrow 0, s \rightarrow 0$, получаем в силу непрерывности перемещений такие же соотношения в вершине оболочки при $s = 0$, где ξ, η, ζ не зависят от угла φ .

Далее, предположим, что угол между противоположными меридианами в вершине оболочки при деформации не изменяется, тогда угол поворота элемента оболочки вокруг параллели $\beta_1(s, \varphi)$ в пределе при $s \rightarrow 0$ удовлетворяет условию $\beta_1(0, \varphi) = -\beta_1(0, \varphi + \pi)$ и поэтому раскладывается в ряд Фурье только с нечетными слагаемыми

$$(1.6) \quad \beta_1(0, \varphi) = \sum_{m=1,3,5,\dots} (\beta_{1,m} \cos m\varphi + \beta'_{1,m} \sin m\varphi)$$

Из (1.4) — (1.6) в силу произвольности вариаций $\xi, \zeta, \beta_{1,m}$ ($m = 1, 3, 5, \dots$) при $s = 0$ получим соотношения

$$(1.7) \quad \begin{aligned} u_0 \cos \theta + w_0 \sin \theta &= 0, & Q_{1,0} \cos \theta - N_{11,0} \sin \theta &= 0, & \beta_{1,0} &= 0 \quad (m=0) \\ u_1 + v_1 \cos \theta &= 0, & N_{11,1} \cos \theta - N_{12,1} + Q_{1,1} \sin \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \times \\ & \times M_{12,1} &= 0 \\ w_1 + v_1 \sin \theta &= 0, & M_{11,1} &= 0 \quad (m=1) \\ u_m = v_m = w_m &= 0 \quad (m=2, 3, 4, 5, \dots) \\ \beta_{1,m} &= 0 \quad (m=2, 4, 6, \dots), & M_{11,m} &= 0 \quad (m=3, 5, 7, \dots) \end{aligned}$$

Эти соотношения являются краевыми условиями при $s = 0$ для уравнений устойчивости с разделенными переменными.

Отметим, что второе условие при $m = 1$ в (1.7) следует также из равенства нулю главного вектора сил, действующих на границе малой круговой окрестности вершины оболочки, в проекции на плоскость, ортогональную к оси вращения, а именно, из равенства

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\left(Q_1 + \frac{\partial M_{12}}{\partial \varphi} \right) \sin \theta + N_{11} \cos \theta \right] \cos \varphi - \left(N_{12} + \frac{1}{R_v} M_{12} \right) \sin \varphi \right\} d\varphi = \\ & = \pi \left[Q_{1,1} \sin \theta + N_{11,1} \cos \theta - N_{12,1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) M_{12,1} \right] = 0 \end{aligned}$$

В гладкой (не конической) вершине оболочки вращения $\theta = 0, R_1 = R_2$ при $s = 0$, и условия (1.7) принимают вид (при $m = 2, 3, 4, \dots$ вид условий сохраняется)

$$(1.8) \quad \begin{aligned} u_0 &= 0, & Q_{1,0} &= 0, & \beta_{1,0} &= 0 \quad (m=0) \\ u_1 + v_1 &= 0, & N_{11,1} - N_{12,1} &= 0, & w_1 &= 0, & M_{11,1} &= 0 \quad (m=1) \end{aligned}$$

Уравнения докритического состояния получаются из] уравнений (1.1) — (1.8), если в них [убрать слагаемые, содержащие собственное значение λ , под $u, v, w, \beta_i, e_{ij}, k_{ij}, N_{ij}, M_{ij}, Q_i$ ($i, j = 1, 2$) понимать не приращения соответствующих функций, а их значения в докритическом состоянии; к правой части вариационного уравнения (1.2) прибавить работу внешних сил на вариациях смещений

$$\int_0^{2\pi} \int_0^S (p_1 \delta u + p_2 \delta v + p_3 \delta w) a \, ds \, d\varphi$$

где p_1, p_2, p_3 — компоненты поверхностной нагрузки. В осесимметрическом состоянии $v = \beta_2 = e_{12} = k_{12} = N_{12} = M_{12} = Q_2 = p_2 = 0$.

Уравнения докритического состояния оболочки и уравнения устойчивости после разделения переменных аппроксимируются на неравномерной сетке узлов конечно-разностными уравнениями, данными в [2].

Критические (бифуркационные) нагрузки при разных числах $m = 0, 1, 2, \dots$ волн формы потери устойчивости на параллели определяются как наименьшие по абсолютной величине собственные значения λ конечно-разностных уравнений устойчивости при соответствующих числах m методом итераций [3].

Если имеются собственные значения разных знаков и вычисленное собственное значение соответствует нагрузке противоположного направления (противоположного знака) по отношению к рассматриваемому, для отыскания собственного значения нужного знака можно провести сдвиг спектра собственных значений [3]. В приведенных ниже численных примерах наименьшие по абсолютной величине собственные значения, определяемые методом итераций, соответствовали нагрузке заданного направления и сдвиг собственных значений не потребовался.

Уравнения докритического состояния и уравнения, из решения которых вычисляются собственные векторы в процессе итераций, различаются только коэффициентами уравнений, соответствующих крайним узлам конечно-разностной аппроксимации, значениями m и векторами правой части и поэтому решаются совместно по одной программе на ЭВМ. Они преобразуются к трехточечным конечно-разностным уравнениям (каждое уравнение содержит значения искомых функций только в трех соседних узлах) относительно четырех сеточных функций u, v, w, M_{11} с симметрическими матрицами коэффициентов и затем решаются методом матричной прогонки [4].

2. Вычисление градиентов интенсивности напряжений и нагрузки потери устойчивости, по варьируемым параметрам] оболочки. Интенсивность напряжений в произвольной точке оболочки имеет вид функционала $\Phi = \Phi(c, X)$ от конечномерного вектора варьируемых параметров оболочки $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ и решения X конечно-разностных уравнений докритического состояния, имеющих вид [2]

$$(2.1) \quad A_0 X = f$$

Здесь A_0 — симметрическая матрица коэффициентов; f — вектор нагрузки; X — вектор сеточных] функций смещений, усилий, моментов, определенных на сетке узлов конечно-разностной аппроксимации. Матрица A_0 , вектор f и, следовательно, вектор X зависят от варьируемых параметров оболочки c .

Градиент $\Phi(c, X)$ по c вычисляется так. Варьируя $\Phi(c, X)$, получаем

$$\delta\Phi = \Phi_c^T \delta c + \Phi_X^T \delta X$$

где Φ_c, Φ_X — векторы частных производных от Φ по компонентам векторов c, X соответственно; верхний индекс T обозначает транспонирование, переход от вектор-столбца к вектор-строке.

Решив систему уравнений

$$(2.2) \quad A_0 Y = \Phi_X$$

находим

$$\delta\Phi = \Phi_c^T \delta c + Y^T A_0 \delta X = \Phi_c^T \delta c + Y^T (\delta f - \delta A_0 X) = \delta c^T \nabla \Phi$$

Вариации $\delta f, \delta A_0$ выражаются в явном виде через δc и градиент $\nabla \Phi$ от функционала Φ по c определяется как вектор коэффициентов при компонентах вектора δc .

Отметим, что системы (2.1), (2.2) различаются только векторами правой части и поэтому решаются совместно по одной программе на ЭВМ.

Нагрузка потери устойчивости определяется как наименьшее собственное значение λ конечно-разностных уравнений устойчивости, имеющих вид [2].

$$(2.3) \quad AU = \lambda BU$$

Здесь A, B — симметрические матрицы коэффициентов, вычисляемые при числе m волн формы потери устойчивости на параллели, при котором λ минимально (матрица A_0 в (2.1) совпадает с A при $m = 0$); U — вектор коэффициентов рядов Фурье при $\cos m\varphi, \sin m\varphi$ приращений смещений, усилий, моментов в узлах конечно-разностной аппроксимации при потере устойчивости.

Определяем вариацию λ как вариацию собственного значения, которому соответствует единственный собственный вектор U , по формуле

$$(2.4) \quad \delta\lambda = U^T (\delta A - \lambda \delta B) U / (U^T B U)$$

При этом число m не варьируется, так как λ по m минимально.

Матрица B зависит от усилий χ_1, χ_2 и угла поворота оболочки ψ в докритическом состоянии, являющихся функциями параметров c_1, c_2, \dots, c_k . Вариации $\delta\chi_1, \delta\chi_2, \delta\psi$ входят в (2.4) в виде скалярного произведения $\Psi_X^T \delta X$, где Ψ_X — вектор частных производных отношения Релея $\Psi = U^T A U / (U^T B U)$ по компонентам вектора значений функций докритического состояния оболочки в узлах конечно-разностной аппроксимации X .

Решив систему уравнений

$$(2.5) \quad A_0 Z = \Psi_X$$

выполняем преобразование

$$\Psi_X^T \delta X = Z^T A_0 \delta X = Z^T (\delta f - \delta A_0 X)$$

В результате получим $\delta\lambda = \delta c^T \nabla \lambda$, откуда градиент нагрузки потери устойчивости $\nabla \lambda$ по параметрам c_1, c_2, \dots, c_k определяется как вектор коэффициентов при компонентах вектора δc .

Итак, для вычисления градиентов интенсивности напряжений и нагрузки потери устойчивости надо решить две задачи (2.2) и (2.5) для конечно-разностных уравнений докритического состояния оболочки.

3. Алгоритм оптимизации. Оптимизация оболочек ведется по методу линеаризации [1] путем последовательного варьирования параметров c_1, c_2, \dots, c_k , которыми могут задаваться форма срединной поверхности оболочки, ее толщина, коэффициенты упругости и т. п. Исходные значения c_1, c_2, \dots, c_k выбираются произвольно.

Опишем алгоритм отыскания оболочки, объем материала которой V минимален, бифуркационная нагрузка p_* , определяемая как наименьшее собственное значение конечно-разностных уравнений устойчивости, не ниже заданной величины p_B ($p_* \geq p_B$), а интенсивность напряжений в докритическом состоянии σ_1, σ_2 вдоль меридиана и параллели соответственно при нагрузке $p \leq p_B$ не выше максимальной допустимой величины σ_B , т. е. $\sigma_* \leq \sigma_B$, где $\sigma_* = \max \sigma, 0 \leq s \leq S$, σ — значение интенсивности напряжений $(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)^{1/2}$, максимальное по толщине оболочки при фиксированном s .

Направление вектора приращений параметров c_1, c_2, \dots, c_k на одном шаге процесса оптимизации определяем по вектору b из решения следующей задачи. Найти минимум $(b^T \nabla f_0(c) + 1/2 b^T b)$ при условии, что

$$(3.1) \quad \begin{aligned} f_i(c) + b^T \nabla f_i(c) &\leq 0, \text{ если } f_i(c) > \max(-\varepsilon, f_1(c) - \varepsilon, f_2(c) - \varepsilon) \\ (i = 1, 2) \\ \varepsilon > 0, \quad f_0(c) &= \frac{V(c)}{k_V}, \quad f_1(c) = 1 - \frac{p_*(c)}{p_B}, \quad f_2(c) = \frac{\sigma_*(c)}{\sigma_B} - 1 \end{aligned}$$

Здесь c — рассматриваемая точка значений c_1, c_2, \dots, c_k ; верхний индекс T означает транспонирование, переход от вектор-столбца к вектор-строке; $k_V = \text{const}$ — коэффициент перехода к безразмерным величинам; σ_* вычисляется при $p = p_B$.

Вектор приращений параметров c_1, c_2, \dots, c_k полагается равным $\Delta c = b / 2^i$, где i — первое из чисел $0, 1, 2, \dots$, при котором выполняется неравенство

$$\begin{aligned} f_0(c + \Delta c) + \Lambda F(c + \Delta c) &< f_0(c) + \Lambda F(c) - 2^{-i} (b^T b)^{1/2} \varepsilon' \\ F(c) &= \max(0, f_1(c), f_2(c)), \quad 0 < \varepsilon' < 1 \end{aligned}$$

где число $\Lambda > 0$ берется больше суммы множителей Лагранжа задачи (3.1). Числа $k_V, \varepsilon, \varepsilon'$ определяют допустимую длину вектора Δc . В данных численных примерах они выбраны такими, что вектор b может быть взят в качестве вектора Δc . Это существенно уменьшает объем вычислений. Из рассматриваемой точки c переходим в точку $c + \Delta c$ и берем ее в качестве начальной для следующего шага оптимизации.

Отметим, что σ_*, p_* не являются непрерывно дифференцируемыми функциями от c_1, c_2, \dots, c_k . Если максимальное значение σ достигается не в одной точке оболочки и варьирование параметров c в направлении, определенном по градиенту σ только в одной точке, ведет к недопустимому возрастанию значения σ в других точках оболочки, где оно было близко к σ_* , то в задаче (3.1) надо ставить ограничения на приращения σ и в этих точках. Аналогично в случае сгущения спектра собственных значе-

ний уравнений устойчивости оболочки у наименьшего собственного значения p_* может возникнуть надобность ставить ограничения также на приращения некоторых собственных значений, ближайших к p_* , и определять вариацию p_* , учитывая все соответствующие ему собственные векторы, если их больше одного. В рассмотренных численных примерах такое уточнение алгоритма не требуется.

В задаче оптимизации оболочки, нагруженной силами инерции равноускоренного движения (или, что эквивалентно, собственным весом), находим $\max \min (g_*, g_\sigma)$, где g_* — наименьшее ускорение движения, при котором происходит потеря устойчивости оболочки; g_σ — ускорение, при котором максимальное значение интенсивности напряжений σ_* равно заданной величине σ_B . В силу линейности уравнений докритического состояния σ_* изменяется пропорционально величине ускорения и поэтому $g_\sigma = g\sigma_B / \sigma_*$, где σ_* вычисляется при ускорении, равном g .

Применяя алгоритм нахождения минимакса [1], направление шага оптимизации определяем по вектору b , при котором величина $(\mu + \frac{1}{2}b^T b)$ минимальна по μ , b при условии, что

$$(3.2) \quad f_i(c) + b^T \nabla f_i(c) + \mu \geq 0, \text{ если } f_i(c) < F(c) + \varepsilon \quad (i = 1, 2); \varepsilon > 0$$

$$(f_1(c) = g_*(c) / k_g, f_2(c) = g_\sigma(c) / k_g, F(c) = \min(f_1(c), f_2(c)))$$

Здесь $k_g = \text{const}$ — коэффициент перехода к безразмерным величинам. Градиент g_* по параметрам c_1, c_2, \dots, c_k , как и градиент p_* в задаче (3.1), вычисляется как градиент простого (не кратного) собственного значения конечно-разностных уравнений устойчивости.

Вектор приращений параметров c_1, c_2, \dots, c_k полагается равным $\Delta c = b / 2^i$, где i — первое из чисел $0, 1, 2, \dots$, при котором выполняется неравенство

$$F(c + \Delta c) < F(c) - 2^{-i} (b^T b)^{1/2} \varepsilon', \quad 0 < \varepsilon' < 1$$

Из точки c переходим в точку $c + \Delta c$ и т. д.

В задачах (3.1), (3.2) вектор b находится перебором всех возможных решений по условию Куна — Таккера.

4. Результаты счета. В численных примерах оптимизируется форма упругих оболочек вращения постоянной толщины, образующие которых описываются функциями вида

$$\frac{z}{a_N} = \frac{\cos t\gamma - \cos \gamma}{\sin \gamma} + \sum_{i=0}^4 c_i (1 - t^{2i+2})$$

$$\frac{a}{a_N} = \frac{\sin t\gamma}{\sin \gamma} + \sum_{i=1}^4 c_{i+4} t (1 - t^{2i}), \quad 0 \leq t \leq 1$$

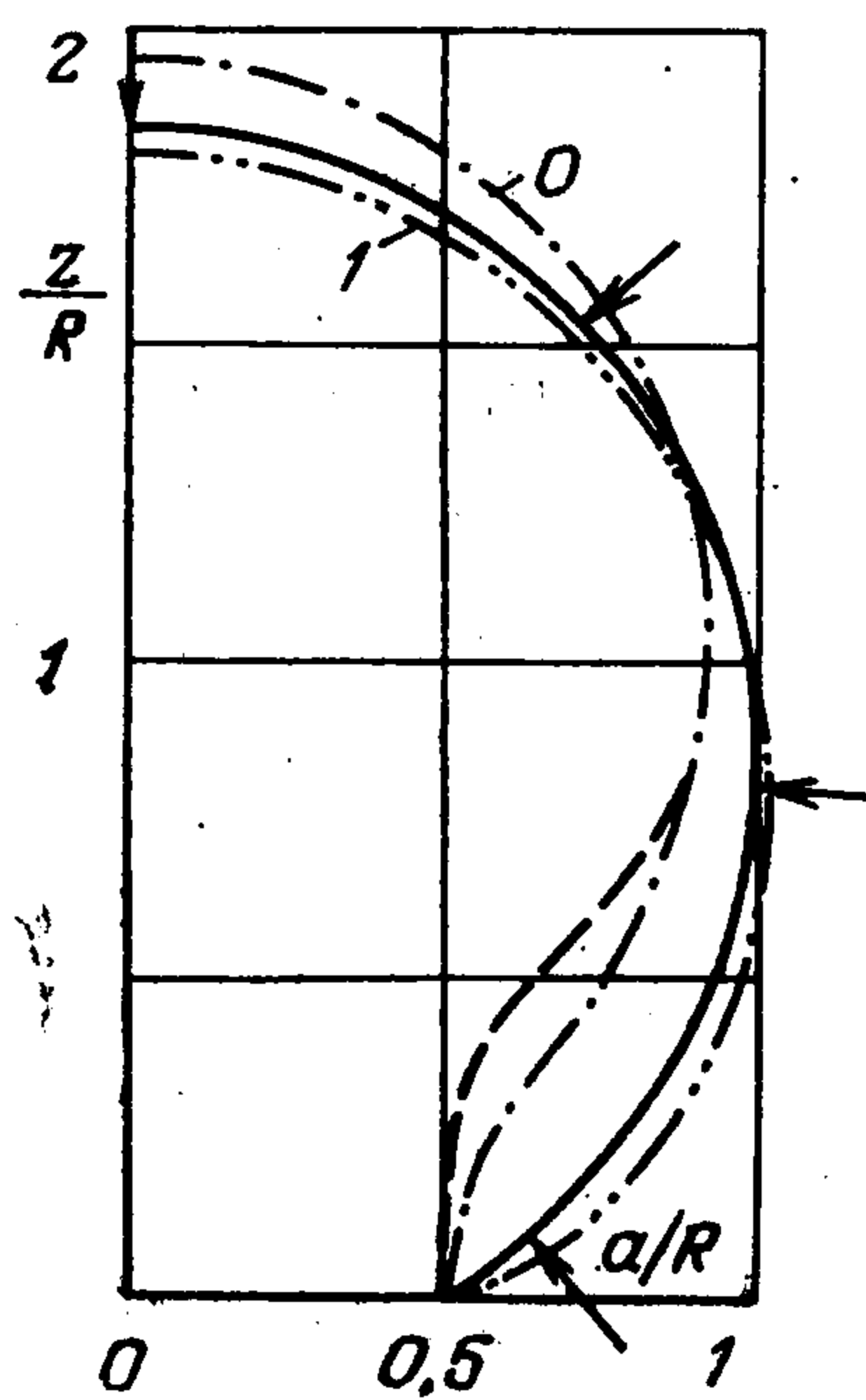
Здесь a — расстояние от оси вращения до срединной поверхности оболочки; z — расстояние, отсчитываемое по оси вращения; в вершине оболочки $t = 0, a = 0$; на краю $t = 1, z = 0, a = a_N$; коэффициенты $\gamma, c_0, c_1, \dots, c_8$ не зависят от t . При $c_0 = c_1 = \dots = c_8 = 0$ данные функции описывают сферическую оболочку. Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$.

При решении уравнений устойчивости оболочки процесс итераций заканчивался, когда собственные значения λ , смещения u, v, w и момент M_{11} в узлах s_n ($n = 0, 1, \dots$

..., 50) конечно-разностной аппроксимации на r - и $(r + 1)$ -х итерациях удовлетворяли неравенствам вида

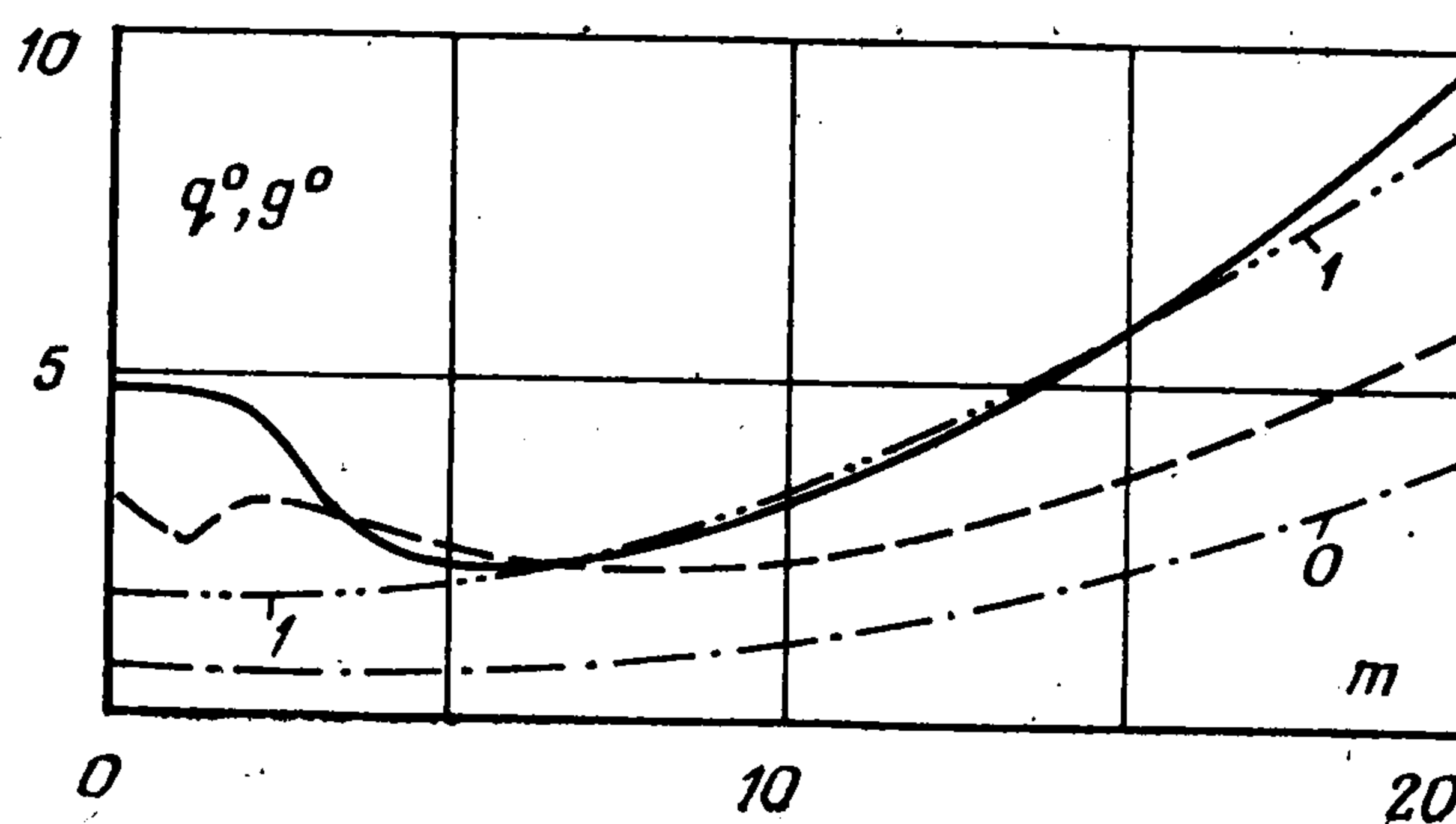
$$|\lambda^{(r+1)} - \lambda^{(r)}| < 10^{-4} |\lambda^{(r+1)}|, \quad \max_{0 \leq n \leq 50} |u_n^{(r+1)} - u_n^{(r)}| < 10^{-4} \sum_{n=0}^{50} |u_n^{(r)}|$$

где верхний индекс — номер итерации, нижний индекс — номер узла s_n . Взято 50 узлов конечно-разностной аппроксимации $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{50} = S$ с шагом $(s_{n+1} - s_n) / S = 0.025$, $0 \leq n \leq 29$; 0.015 , $30 \leq n \leq 39$; 0.010 , $40 \leq n \leq 49$.



Фиг. 1

В первом примере минимизируется объем материала оболочки, нагруженной неравномерным гидростатическим давлением интенсивности q ($1 - 0.1 z / a_N$) (множитель $q = \text{const}$), при условии, что $q_* \geq q_B$;



Фиг. 2

$\sigma_* \leq \sigma_B$ при $q = q_B$, где q_* — величина q , при которой [происходит потеря устойчивости оболочки, σ_* — максимальное значение интенсивности напряжений в докритическом состоянии, σ_B , q_B — заданные величины.

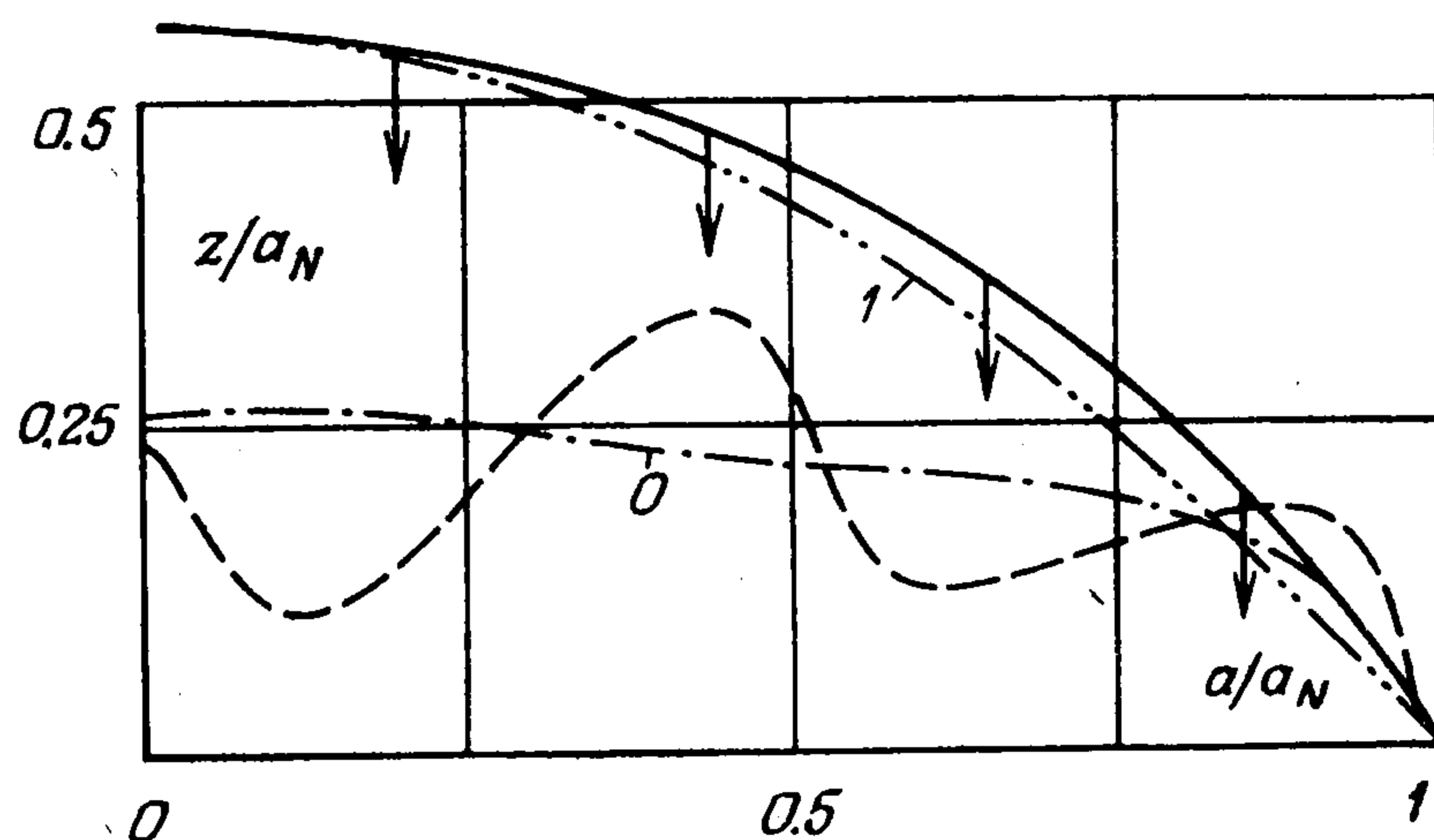
На краю оболочки выполняются условия шарнирного опирания: все компоненты смещения и изгибающий момент равны нулю.

Процесс оптимизации начат со сферической оболочки радиуса $R = 2a_N$, толщины $h = h_0 = a_N / 10$ при $\gamma = 150^\circ$, $c_0 = c_1 = \dots = c_8 = 0$. Для этой оболочки $q_* = q_B = 0.002225 E$, $\sigma_* = 14.94 q$, $\sigma_B = \sigma_* = 0.0333 E$ при $q = q_B$. На фиг. 1 показана образующая этой оболочки до деформации (сплошная кривая, окружность), в докритическом состоянии (штрихпунктирная кривая O) и при потере устойчивости при $m = 6$ в меридиональном сечении, где смещение в окружном направлении $v = 0$ и на оболочке образуется вмятина (штриховая кривая). Стрелками на фиг. 1 и фиг. 3 показаны векторы нагрузки.

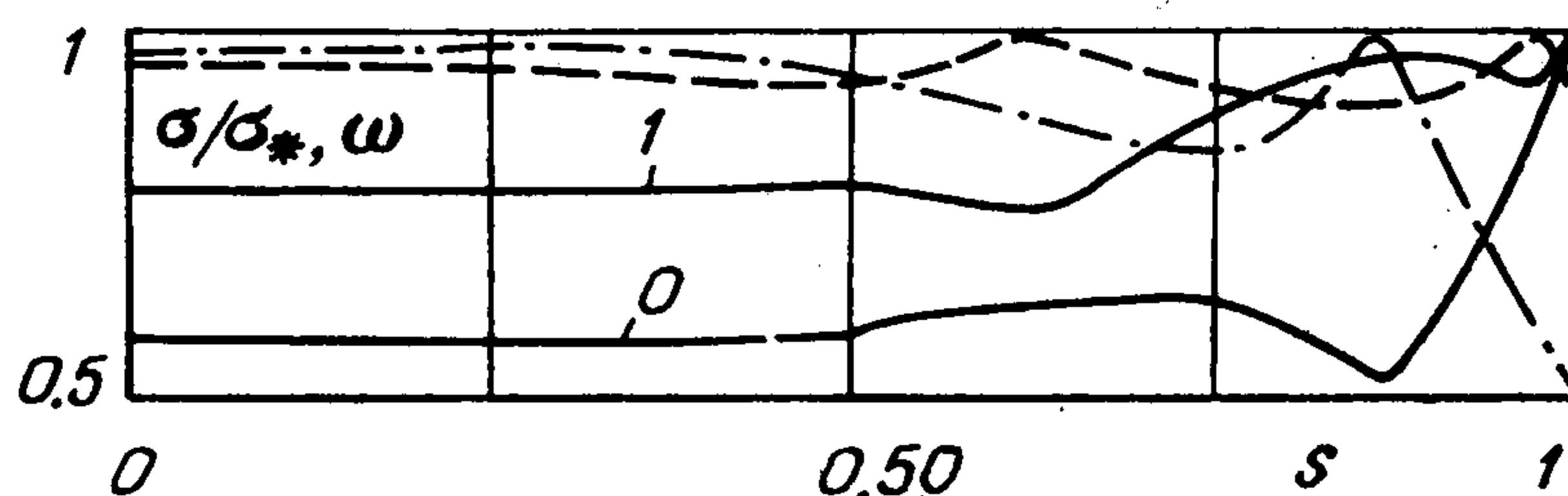
Варьируются толщина оболочки h и параметры c_0, c_1, \dots, c_8 . Объем под оболочкой, радиус a_N , угол γ фиксируются. В результате оптимизации при почти постоянных значениях σ_* , q_* объем материала оболочки уменьшен примерно на 15% при $h = 0.8481 h_0$, $c_0 = 0.09616$, $c_1 = -0.02188$, $c_2 = -0.04606$, $c_3 = -0.06885$, $c_4 = -0.08909$, $c_5 = -0.002743$, $c_6 = 0.001229$, $c_7 = 0.01123$, $c_8 = 0.02393$. Форма последней оболочки представлена на фиг. 1 штрихпунктирной кривой 1 . Спектр критических величин q по числу $m = 0, 1, 2, \dots$ волн формы потери устойчивости на параллели исходной сферической и последней оптимальной оболочек обведен на фиг. 2 сплошной и штриховой кривыми соответственно ($q^0 = 10^3 q / E$).

Во втором примере находится оптимальная форма оболочки вращения с заземленным краем ($u = v = w = \beta_1 = 0$ при $s = S$), нагруженной силами инерции равноускоренного движения вдоль оси вращения z . Толщина оболочки h , расстояние a_N фиксируются, причем $h / a_N = 0.02$. Объем под оболочкой в отличие от первого примера не фиксируется. Варьируются $\gamma, c_0, c_1, \dots, c_8$.

В качестве начальной взята сферическая оболочка, для которой $\gamma = 30^\circ$, $c_0 = c_1 = \dots = c_8 = 0$, $z(0) = (2 - \sqrt{3}) a_N \approx 0.268 a_N$, объем материала $V = 1.072 \pi h a_N^2$, максимальная величина интенсивности напряжений в докритическом состоянии $\sigma_* = 1.735 \rho a_N g$ (ρ — масса единицы объема материала, g — ускорение движения оболочки), наименьшая величина g , при которой происходит потеря устойчивости оболочки,



Фиг. 3



Фиг. 4

равна $g_* = 0.006141 E / (\rho a_N)$. Предполагается, что в этой оболочке максимальная допустимая величина интенсивности напряжений σ_B достигается при $g = g_\sigma = g_*$, значит, $\sigma_B = 1.735 \rho g_* a_N = 0.01065 E$.

По алгоритму оптимизации, изложенному в п. 3, найдена оболочка, образующая которой представлена на фиг. 3 сплошной кривой. Для этой оболочки $\gamma = 32.7^\circ$, $c_0 = 0.09529$, $c_1 = 0.03703$, $c_2 = 0.03479$, $c_3 = 0.04321$, $c_4 = 0.05348$, $c_5 = -0.03405$, $c_6 = -0.03204$, $c_7 = -0.02330$, $c_8 = -0.01369$. Объем её материала примерно на 20% больше объема материала исходной сферической оболочки. Максимальная величина интенсивности напряжений $\sigma_* = 0.7505 \rho g a_N$, наименьшее ускорение, при котором происходит потеря устойчивости, $g_* = 0.01685 E / (\rho a_N)$. Значение σ_* достигает максимально допустимой величины σ_B до потери устойчивости оболочки при ускорении $g_\sigma = 0.0142 E / (\rho a_N)$, которое более чем в два раза выше допустимого ускорения $g = 0.006141 E / (\rho a_N)$ для исходной сферической оболочки.

На фиг. 3 изображены формы образующей оптимальной оболочки в докритическом состоянии (штрихпунктирная кривая 0) и при потере устойчивости ($m = 1$, штриховая кривая). Спектр критических ускорений g , соответствующих потере устойчивости с числом $m = 0, 1, 2, \dots$ волн на параллели, обведен на фиг. 2 кривой 1 ($g^0 = 10^2 g \rho a_N / E$). Нижняя кривая 0 на фиг. 2 описывает спектр исходной сферической оболочки.

Графики максимальной по толщине оболочки интенсивности напряжений в докритическом состоянии σ как функции от s для исходной сферической и для оптимальной оболочек приведены на фиг. 4 кривыми 0, 1 соответственно. Очевидно, в результате оптимизации происходит выравнивание распределения σ по длине оболочки.

Напряженное состояние оптимальной оболочки близко к безмоментному. На фиг. 4 штрихпунктирной и штриховой кривыми даны графики отношения ω интенсивности напряжений в срединной поверхности оболочки к её максимальному по тол-

щине значению σ как функции от s в исходной сферической и оптимальной оболочках соответственно.

Отметим, что в данных примерах найденные оболочки чувствительны к отклонениям от своей формы. Так, в последнем примере для оболочки, полученной дополнительным варьированием параметров оптимальной оболочки и показанной на фиг. 3 штрихпунктирной кривой, 1, допустимое ускорение $g = g_{\sigma} = 0.00717 E / (\rho a_N)$ в два раза меньше, чем для оболочки, взятой в качестве оптимальной (сплошная кривая фиг. 3); потеря устойчивости происходит при ускорении $g_* = 0.0105 E / (\rho a_N)$. Следовательно, возможности реального уменьшения максимального значения интенсивности напряжений и повышения устойчивости рассмотренных оболочек за счет варьирования их форм незначительны.

Поступила 4 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. М., «Наука», 1975.
2. Солодовников В. Н. Решение задач устойчивости и равновесия оболочек вращения конечно-разностным методом. В сб.: Динамика сплошной среды, вып. 25. Новосибирск, 1976.
3. Ланс Дж. Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
4. Годунов С. К., Рябенский В. С. Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962.