Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА ВЕЛИЧИНУ ВЕРХНЕГО КРИТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ ПРИ ВЫПУЧИВАНИИ ПОЛОЙ СФЕРЫ

Г. И. Волокитин

(Ростов-на-Дону)

В рамках модели нелинейно-упругого тела Мурнагана рассматривается задача об устойчивости замкнутой сферы под действием гидростатического давления. Используется теория малых деформаций упругого тела, наложенных на конечную [1]. Начальное напряженно-деформированное состояние равновесия сферы предполагается центрально-симметричным, смежное равновесное состояние — осесимметричным.

Условия бифуркации равновесия приводят к задаче на собственные значения с нелинейным вхождением параметра. Решение этой задачи получено с помощью численных методов для сфер различной толщины с учетом разных констант в законе состояния. В работе сравниваются в зависимости от точности решения начальной задачи несколько вариантов уравнений нейтрального равновесия. Все это позволяет исследовать влияние физической и геометрической нелинейности на величину критического давления.

1. Рассмотрим три равновесных состояния упругого тела: начальное в объеме v, первое деформированное, получаемое начальным нагружением (V — объем, поверхность O) и второе напряженно-деформированное состояние (V^* — объем, O^* — поверхность), смежное с первым, причем

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{R}(\mathbf{r}) + \eta\mathbf{w}(\mathbf{r})$$

где $\mathbf{r}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^*$ — радиус-векторы точки среды в v-, V- и V^*-объемах соответственно; η — малый параметр, характеризующий малость добавочного перемещения $\eta\mathbf{w}$ (во всех последующих преобразованиях слагаемыми с η^2 пренебрегаем). Далее будем предполагать, что массовые силы отсутствуют. В этом случае уравнения равновесия для добавочных деформаций в объеме и на поверхности записываются в виде [2] ($\mathbf{f}$ — добавочная поверхностная сила)

$$\nabla'\cdot\Theta = 0, \quad \mathbf{N}\cdot\Theta = \mathbf{f}, \quad \nabla' = \nabla\mathbf{R}^{-1}\cdot\nabla \tag{1.1}$$

$$\Theta = \frac{1}{\eta}(T^* - T) + \vartheta T - \nabla'\mathbf{w}^T\cdot T$$

Здесь ∇' — набла-оператор в метрике V-объема, связанный с набла-оператором ∇ (отнесенным к недеформированному состоянию), $\mathbf{N}$ — вектор нормали, T и T^* — тензоры напряжений Коши в V- и V^*-объемах, ϑ — первый инвариант линейного тензора добавочной деформации.

Уравнение состояния в форме Фингера для материала Мурнагана имеет вид (E — единичный тензор)

$$T = \frac{1}{4\sqrt{I_3}}\{[-6\lambda - 4\mu + 9l + n + (2\lambda - 6l + 2m - n)I_1 + lI_1^2 - 2mI_2]M + (4\mu - 6m + n + 2mI_1)M^2 + nI_3E\} \tag{1.2}$$

Здесь $M = \nabla\mathbf{R}^T\cdot\nabla\mathbf{R}$ — мера деформации Фингера, I_1, I_2, I_3 — ее главные инварианты; λ, μ, l, m, n — модули упругости. Соотношение (1.2) можно получить, используя выражение удельной потенциальной энергии деформации в форме Мурнагана, а также равенства, связывающие инварианты меры с инвариантами тензора конечной деформации [2]. Обратившись к последним двум соотношениям (1.1) и (1.2), получим

$$\begin{aligned}\Theta = \frac{1}{\sqrt{I_3}}\Big\{\Big[&\frac{-6\lambda - 4\mu + 9l + n}{4} + \frac{2\lambda - 6l + 2m - n}{4}I_1 + \\ &+ \frac{l}{4}I_1^2 - \frac{m}{2}I_2\Big]\nabla\mathbf{R}^T\cdot\nabla\mathbf{w} + \Big[\frac{2\lambda - 6l + 2m - n}{2}M + \\ &+ (l - m)I_1M + mM^2\Big]\nabla\mathbf{R}^T\cdot\cdot\nabla\mathbf{w} + m\nabla\mathbf{R}^T\cdot\nabla\mathbf{R}\cdot\nabla\mathbf{R}^T\cdot\cdot\nabla\mathbf{w}M + \\ &+ \left(\frac{4\mu - 6m + n}{2} + \frac{m}{2}I_1\right)(M\cdot\nabla\mathbf{R}^T\cdot\nabla\mathbf{w} + M\cdot\nabla\mathbf{w}^T\cdot\nabla\mathbf{R} + \\ &+ \nabla\mathbf{R}^T\cdot\nabla\mathbf{w}\cdot M) + \frac{n}{4}I_3(2\nabla\mathbf{w}^T\cdot\cdot\nabla\mathbf{R}^{-T}E - \nabla\mathbf{w}^T\cdot\nabla\mathbf{R}^{-T})\Big\}\end{aligned} \tag{1.3}$$

2. Введем сферические координаты r, φ, λ и рассмотрим центрально-симметричную деформацию полой сферы, нагруженной по внешней поверхности равномерно распределенным «следящим» давлением p (на внутренней поверхности нагрузка отсутствует). Тогда первое деформированное состояние описывается равенствами

$$\begin{aligned}&\mathbf{R} = [r + u(r)]\mathbf{e}_r \\ &\nabla\mathbf{R} = \nabla\mathbf{R}^T = M^{1/2} = a\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + b(\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\lambda\mathbf{e}_\lambda) \\ &a = 1 + \frac{du}{dr}, \quad b = 1 + \frac{u}{r}, \quad \mathbf{f} = -p(\vartheta\mathbf{N} + \mathbf{N}\cdot\nabla'\mathbf{w}^T)\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $u(r)$ — радиальное перемещение, $\mathbf{f}$ — вектор добавочной поверхностной силы, $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\lambda$ — базисные векторы, совпадающие с единичными векторами сферической системы координат.

Из второго равенства (2.1) найдем главные инварианты меры деформации

$$I_1 = a^2 + 2b^2, \quad I_2 = 2a^2b^2 + b^4, \quad I_3 = a^2b^4 \tag{2.2}$$

Близкие к первому напряженно-деформированному состоянию равновесия смежные формы равновесия будем предполагать осесимметричными, т. е.

$$\mathbf{w} = v(r, \varphi)\mathbf{e}_r + w(r, \varphi)\mathbf{e}_\varphi$$

Используя второе равенство (2.1), (2.2) и (1.3), выражение тензора Θ можно привести к следующему виду:

$$\Theta = \left(A_1v + A_2\frac{\partial v}{\partial r} + A_3\frac{\partial w}{\partial\varphi} + A_4w\operatorname{ctg}\varphi\right)\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \tag{2.3}$$

$$+\left(B_1 v + B_2 \frac{\partial v}{\partial r} + B_3 \frac{\partial w}{\partial \varphi} + B_4 w \operatorname{ctg}\varphi\right)(\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\lambda \mathbf{e}_\lambda) +$$
$$+\left(C_1 w + C_2 \frac{\partial w}{\partial r} + C_3 \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_r + \left(D_1 w + D_2 \frac{\partial w}{\partial r} + D_3 \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\varphi$$

Коэффициенты при неизвестных определяются по формулам

$$rA_1 = \frac{a}{b}\left[\lambda + l(a^2 + 2b^2 - 3) + m(1 - b^2) + \frac{n}{2}(b^2 - 1)\right] \tag{2.4}$$

$$A_2 = \frac{1}{8b^2}[2\lambda(3a^2 + 2b^2 - 3) + 4\mu(3a^2 - 1) + l(5a^4 + 4b^4 +$$
$$+ 12a^2b^2 - 18a^2 - 12) + 2m(5a^4 + b^4 - 6a^2) + n(b^4 - 2b^2 + 1)]$$

$$rB_1 = \frac{1}{8ab}[2\lambda(a^2 + 6b^2 - 3) + 4\mu(3b^2 - 1) + l(a^4 + 20b^4 +$$
$$+ 12a^2b^2 - 6a^2 - 36b^2 + 9) + 2m(5b^4 - 3a^2b^2 - 3b^2 + a^2) +$$
$$+ n(1 - a^2 - 3b^2 + 3a^2b^2)]$$

$$B_2 = {}^1/_2[\lambda + l(a^2 + 2b^2 - 3) + (m - n)(1 - b^2)]$$

$$rB_3 = \frac{1}{8ab}[2\lambda(4b^2 + a^2 - 3) + 4\mu(3b^2 - 1) + l(9 - 6a^2 - 24b^2 +$$
$$+ 8a^2b^2 + 12b^4 + a^4) + 2m(a^2 - a^2b^2 - 5b^2 + 5b^4) +$$
$$+ n(1 - a^2 - b^2 + a^2b^2)]$$

$$rD_1 = -rD_3 = \frac{a}{8b}[-4\mu + 2m(3 - a^2 - 2b^2) + n(b^2 - 1)]$$

$$D_2 = \frac{1}{8b^2}[2\lambda(a^2 + 2b^2 - 3) + 4\mu(a^2 + b^2 - 1) + l(a^4 + 4b^4 +$$
$$+ 4a^2b^2 - 6a^2 - 12b^2 + 9) + 2m(a^4 + b^4 + a^2b^2 - 2a^2 - b^2) +$$
$$+ n(1 - b^2)], \quad A_3 = A_4 = {}^1/_2 A_1, \quad B_4 = B_1 - B_3$$

$$C_1 = -C_3 = -\frac{b}{ra}D_2, \quad C_2 = -\frac{b}{a}rD_1$$

Подстановка выражения (2.3) в первое условие равновесия (1.1) приводит к системе двух дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[A_1 v + A_2 \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{A_1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + w \operatorname{ctg}\varphi\right)\right] +$$
$$+ \left\{\frac{2}{r}\left[A_1 v + A_2 \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{A_1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + w \operatorname{ctg}\varphi\right)\right] - \frac{1}{r}\left[2B_1 v + \right.\right.$$
$$\left. + 2B_2 \frac{\partial v}{\partial r} + B_1\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + w \operatorname{ctg}\varphi\right)\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(C_1 w + C_2 \frac{\partial w}{\partial r} - \right.$$
$$\left.\left. - C_1 \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{r}\left(C_1 w + C_2 \frac{\partial w}{\partial r} - C_1 \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)\operatorname{ctg}\varphi\right\}\frac{a}{b} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(D_1 w + D_2 \frac{\partial w}{\partial r} - D_1 \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right) + \left[\frac{2}{r}\left(D_1 w + D_2 \frac{\partial w}{\partial r} - D_1 \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right) + \right.$$
$$+ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(B_1 v + B_2 \frac{\partial v}{\partial r} + B_3 \frac{\partial w}{\partial \varphi} + B_4 w \operatorname{ctg}\varphi\right) +$$
$$+ \frac{1}{r}(B_3 - B_4)\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} - w \operatorname{ctg}\varphi\right)\operatorname{ctg}\varphi + \frac{1}{r}\left(C_1 w + \right.$$
$$\left.\left. + C_2 \frac{\partial w}{\partial r} - C_1 \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)\right]\frac{a}{b} = 0$$

Решение этой системы ищем в виде

$$v = X_k(r) P_k(\cos\varphi), \quad w = Y_k(r)\frac{dP_k(\cos\varphi)}{d(\cos\varphi)}\sin\varphi \tag{2.5}$$

где $P_k(\cos\varphi)$ — полином Лежандра k-й степени. После подстановки (2.5) видим, что переменные разделяются. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (штрих означает производную по радиальной координате)

$$\begin{aligned}(2.6)\qquad &\frac{1}{r}\left\{\left[A_1\left(X_k+\frac{k^2+k}{2}Y_k\right)+A_2X_k'\right]r^2\right\}'-\frac{a}{b}\left[2B_1\left(X_k+\right.\right.\\ &\left.\left.+\frac{k^2+k}{2}Y_k\right)+2B_2X_k'-(k^2+k)C_1(X_k+Y_k)-(k^2+k)C_2Y_k'\right]=0\\ &\frac{1}{r}\{[D_1(X_k+Y_k)+D_2Y_k']r^2\}'+\frac{a}{b}\left[(C_1+2B_3-B_1)(X_k+Y_k)+\right.\\ &\left.+C_2Y_k'-2B_3\left(X_k+\frac{k^2+k}{2}Y_k\right)-B_2X_k'\right]=0\end{aligned}$$

Из второго условия равновесия (1.1) на внешней ($r=r_0$) и внутренней ($r=r_1$) границах сферы получим следующие четыре соотношения:

$$\begin{aligned}(2.7)\qquad &\left(\frac{rA_1}{2}+\frac{p}{2b}\right)\left[X_k'+\frac{2}{r}\left(X_k+\frac{k^2+k}{2}Y_k\right)\right]+\left(A_2-\frac{rA_1}{2}-\frac{p}{2b}\right)X_k'=0\\ &\left(rD_1+\frac{p}{b}\right)\left[Y_k'+\frac{1}{r}(X_k+Y_k)\right]+\\ &+\left(D_2-rD_1-\frac{p}{2b}\right)Y_k'=0\qquad (r=r_0)\\ &\frac{rA_1}{2}\left[X_k'+\frac{2}{r}\left(X_k+\frac{k^2+k}{2}Y_k\right)\right]+\left(A_2-\frac{rA_1}{2}\right)X_k'=0\\ &rD_1\left[Y_k'+\frac{1}{r}(X_k+Y_k)\right]+(D_2-rD_1)Y_k'=0\qquad (r=r_1)\end{aligned}$$

Из формул (2.4) для коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, C_1, C_2$ видно, что нагрузка p входит в уравнения нейтрального равновесия через функции a, b. Однородная система уравнений (2.6) с краевыми условиями (2.7) имеет тривиальное решение $\mathbf{w}=0$. Однако при некоторых значениях p, называемых бифуркационными, возможны и нетривиальные решения, соответствующие возмущенным равновесным формам V^*-объема. Критическое давление находим как наименьшее бифуркационное значение p, определяемое надлежащим выбором числа узлов формы бифуркации k. Отметим, что задача на собственные значения (2.6), (2.7) для определения бифуркационной нагрузки нелинейна, так как искомый параметр p входит нелинейно (оператор, определяемый системой и краевыми условиями,— линейный).

3. Задача о начальной деформации сферы в случае материала Мурнагана сводится к следующей нелинейной краевой задаче [2]:

$$\begin{aligned}(3.1)\qquad &\sigma_r'+\frac{2R'}{R}(\sigma_r-\sigma_\varphi)=0\\ &\sigma_r(r_0)=-p,\quad \sigma_r(r_1)=0,\end{aligned}$$

Напряжения определяются равенствами

$$\begin{aligned}\sigma_r=&\frac{a}{4b^2}[-6\lambda-4\mu+9l+n+(2\lambda+4\mu-6l-4m)a^2+\\ &+(4\lambda-12l+4m-2n)b^2+(l+2m)a^4+4la^2b^2+(4l-2m+n)b^4]\end{aligned}$$

$$\sigma_r - \sigma_\varphi = \left(\frac{a}{4b^2} - \frac{1}{4a}\right)[-6\lambda - 4\mu + 9l + n + (2\lambda + 4\mu - 6l - 4m)\times$$
$$\times (a^2 + 2b^2) + (l + 2m)a^4 + (4l + 4m)a^2b^2 + (4l + 6m)b^4 +$$
$$+ (6m - 4\mu - n)b^2 - 2m(a^2b^2 + 2b^4)]$$

Получить решение краевой задачи (3.1) в аналитической форме не удается. Перемещения u (r) (а следовательно, и функции a, b) находились приближенно. Этими величинами определяются коэффициенты задачи (2.6), (2.7), поэтому в зависимости от точности решения начальной задачи (3.1) уравнения нейтрального равновесия несколько отличаются от точных. Представляет интерес оценить влияние погрешности в решении начальной задачи на величину критического давления.

Были рассмотрены три варианта уравнений нейтрального равновесия.

В первом случае краевая задача (3.1) была линеаризована, начальное перемещение имеет вид

$$u = \frac{pr_1^3}{r_0^3 - r_1^3}\left(\frac{r}{3\lambda + 2\mu} + \frac{r_0^3}{4\mu r^2}\right) \equiv u_1 \tag{3.2}$$

Во втором случае краевая задача (3.1) решалась с учетом малых второго порядка [2]. В рамках теории второго порядка для перемещений получается следующее, более точное выражение:

$$u = u_1 + \alpha r + \beta\frac{1}{r^2} + \gamma\frac{1}{r^5}$$

Постоянные α, β находятся из системы линейных алгебраических уравнений, первое из которых

$$(3\lambda + 2\mu)\alpha - \frac{4\mu}{r_1^3}\beta = \frac{3\lambda + 10\mu}{r_1^6} - \left(\lambda + m - \frac{n}{2}\omega(r_1) + \right.$$
$$\left. + \left(\lambda - l + m - \frac{n}{2}\right)\vartheta_1^2(r_1) - (2\lambda - 2\mu + 2m - n)\vartheta_1(r_1)u_1'(r_1) - \right.$$
$$\left. - (5\mu + n)[u_1'(r_1)]^2 \right.$$

а второе получается заменой r_1 на r_0. Здесь приняты обозначения

$$\vartheta_1 = \nabla\cdot\mathbf{u}_1, \qquad \omega = E\cdot\cdot\left(\frac{\nabla\mathbf{u}_1 + \nabla\mathbf{u}_1^T}{2}\right)^2$$
$$\mathbf{u}_1 = u_1(r)\mathbf{e}_r, \quad \gamma = \frac{(\lambda + 3\mu + 2m)p^2r_0^6}{(\lambda + 2\mu)(r_1^3 - r_0^3)^2(3\lambda + 2\mu)^2}$$

В третьем случае интегрирование начальной задачи (3.1) осуществлялось конечно-разностным методом.

Были использованы равноотстоящие узлы, производные аппроксимировали центральными разностями второго порядка точности. Получающуюся систему нелинейных алгебраических уравнений решали обобщенным методом Стеффенсена [3], причем начальное приближение выбирали на основе решения линейной задачи с начальным перемещением (3.2). Число разбиений интервала (r_1, r_0) брали от 30 до 100 в зависимости от толщины сферы. Здесь и в дальнейших приближенных вычислениях для контроля точности использовали двойной пересчет.

Собственные значения однородной задачи (2.6), (2.7) определяли численно. Был использован дискретизационный метод решения нелинейных собственных задач, который может быть обоснован с помощью теоремы сходимости, приведенной в работе [4].

Система (2.6) может быть записана в более удобном для последующих вычислений нормальном виде, если перейти к новым переменным и ввести функции y_j согласно соотношениям

$$y_1 = X_k, \quad y_2 = X_k', \quad y_3 = Y_k, \quad y_4 = Y_k'$$

Тогда общее решение системы может быть представлено в виде

$$\mathbf{y}(r;\ p) = \sum_{i=1}^{4} C_i \mathbf{y}_i (r;\ p) \tag{3.3}$$

где C_i — произвольные постоянные, $\{\mathbf{y}_i\}$ — совокупность линейно-независимых решений. После вычислений коэффициентов системы (формулы для a и b в (2.1), формулы (2.4)) определяли значения вектор-функций $\mathbf{y}_i$ $(r;\ p)$ на правом конце интервала (r_1, r_0). Для этого систему интегрировали методом Кутта — Мерсона при следующих начальных векторах:

$$\mathbf{y}_1 (r_1;\ p) = \{0,\ k+1,\ 0,\ A_2/D_2\}$$
$$\mathbf{y}_2 (r_1;\ p) = \{0,\ -k,\ 0,\ A_2/D_2\}$$
$$\mathbf{y}_3 (r_1;\ p) = \{-k,\ -k^2 - k,\ 1,\ k - 1\}$$
$$\mathbf{y}_4 (r_1;\ p) = \{k+1,\ -k^2 + 3k - 2,\ 1,\ -k - 2\}$$

Эти начальные условия выбраны в соответствии с общим решением сходной с (2.6) однородной системы, возникающей в задаче о бифуркации равновесия сферы из полулинейного материала [5]. Подстановка общего решения (3.3) в граничные условия (2.7) приводит к линейной однородной системе алгебраических уравнений относительно C_i, $i = 1,2,3,4$. Для бифуркационных значений p определитель этой системы $\Delta(p)$ обращается в нуль, при переходе через бифуркационное значение происходит смена знака определителя. Учитывая это, критическую нагрузку определяли методом половинного деления. Численный процесс формирования уравнения $\Delta(p) = 0$ и его решения повторяли для нескольких значений k в достаточно широком диапазоне, после чего выбирали наименьшее бифуркационное значение p, которое соответствует критической нагрузке.

4. Алгоритм определения критических давлений был реализован на ЭВМ. Результаты получены с использованием безразмерных величин: относительной толщины сферы ε и критического значения параметра нагрузки p_* (E — модуль Юнга)

$$\varepsilon = 2\frac{r_0 - r_1}{r_0 + r_1}, \quad p = p_* E \varepsilon^2$$

В таблице представлены значения критического параметра p_* и соответствующее им число k узлов формы бифуркации равновесия сферы при разных ε для материалов, упругие свойства которых описываются следующими постоянными [6]: $l = -7 \cdot 10^{12}$ *дн / см*^{2}, $m = 0$, $n = -8.2 \cdot 10^{12}$ *дн / см*^{2}. Для коэффициента Пуассона и модуля Юнга приняты зна-

$\varepsilon \cdot 10^3$	1.41	12.2	100	333	$\varepsilon \cdot 10^3$	1.41	12.2	100	333
k	48	16	5	3	k	48	16	5	3
1)	1.200	1.193	1.12	0.753	3)	1.193	1.150	0.81	0.580
	1.200	1.192	1.11	0.758		1.199	1.190	1.08	—
	1.199	1.192	1.11	0.770		1.197	1.190	1.11	—
2)	1.192	1.159	0.89	0.550	4)	1.196	1.123	0.98	—
	1.200	1.209	1.16	—		1.198	1.178	1.07	—
	1.196	1.199	1.19	0.740		1.197	1.190	1.03	—

чения $\nu = 0.272$, $E = 2\cdot 10^{12}$ *дн / см²*. Вариантам 1) — 4) соответствуют следующие наборы постоянных l, m, n:

1) $l = m = n = 0$, 2) $l = -7\cdot 10^{12}$ *дн / см²*, $m = n = 0$; 3) $l = -7\cdot 10^{12}$ *дн / см²*, $m = 0$, $n = -8.2\cdot 10^{12}$ *дн / см²*; 4) $l = m = 0$, $n = -8.2\cdot 10^{12}$ *дн / см²*.

Верхнее число в каждой клетке таблицы — критическое значение параметра нагрузки p_*, найденное из соотношений (2.6), (2.7), в которых начальное перемещение учитывается по линейной теории; среднее число — значение p_*, соответствующее уравнениям, записанным в рамках теории упругости второго порядка; нижнее число — значение p_*, соответствующее более точному расчету начального напряженно-деформированного состояния сферы конечно-разностным методом. Прочерк означает отсутствие критического параметра в разумном интервале. Были рассмотрены также варианты 1) и 3) с ненулевой постоянной m, равной [6] $-8\cdot 10^{12}$ *дн / см²*. В обоих случаях, независимо от толщины сферы и точности уравнений нейтрального равновесия, значения безразмерного параметра критической нагрузки существенно превышали 1.2.

Анализ численных результатов дает возможность сделать некоторые выводы о влиянии нелинейности на величину верхнего критического давления.

1°. Для тонкостенных сфер критическая нагрузка p, найденная из «грубых», линеаризованных уравнений, почти не отличается от давлений, рассчитанных по более точным теориям независимо от учета постоянных l, n. С увеличением толщины стенки сферы расхождение возрастает.

2°. С ростом относительной толщины ε значения безразмерного критического параметра p_* убывают.

3°. Упругие постоянные Мурнагана, за исключением постоянной m, не оказывают существенного влияния на величину верхнего критического давления.

Автор благодарит Л. М. Зубова за внимание к работе.

Поступила 7 IX 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Бифуркация равновесия идеально упругого тела. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
2. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
3. Алгоритмы и алгоритмические языки, вып. 4. М., ВЦ АН СССР, 1969.
4. *Вайникко Г. М., Карма О. О.* О быстроте сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, т. 14, № 6.
5. *Лурье А. И.* Теория упругости для полулинейного материала. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
6. *Савин Г. Н. и др.* Распространение упругих волн в твердом теле в случае нелинейно-упругой модели сплошной среды. Прикл. механ., 1970, т. 6, вып. 2.