

УДК 539.3 : 534.231.1 + 539.4

РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ РАССЕЯНИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ И НА ПАЧКЕ НЕОДНОРОДНЫХ СЛОЕВ

А. Г. Аленицын, С. И. Челкак

(Ленинград)

Рассматривается задача о рассеянии плоской монохроматической волны при ее наклонном падении на неоднородный плоскопараллельный слой или на пачку одинаковых неоднородных слоев. Неоднородность среды описывается зависимостью показателя преломления n от координаты x , ортогональной границам слоя. Угол падения волны таков, что наблюдается явление полного внутреннего отражения. Изучается случай, когда соответствующее дифференциальное уравнение имеет две точки поворота. В области высоких частот вычислены коэффициенты прохождения и отражения и показано, что при некоторых свойствах симметрии функции $n(x)$ возможны резонансные прохождения, т. е. в целом слой «прозрачен» для некоторых углов падения, хотя эти углы и находятся за критическим углом.

1. Постановка задачи о рассеянии на слое. Выделим в трехмерном пространстве три области: слой $-1 < x < 1$, $-\infty < y, z < \infty$ и два полупространства $x < -1$ и $x > 1$. Будем считать, что оба полупространства заполнены однородной изотропной средой с коэффициентом преломления $n_0 > 0$, а слой заполнен также изотропной, но неоднородной средой с коэффициентом преломления $n(x) > 0$, зависящим только от координаты x , изменяющейся поперек слоя. Поле $U(x, y, z, t)$ удовлетворяет волновому уравнению

$$(1.1) \quad n^2(x) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \Delta U$$

причем $n(x) = n_0$ при $|x| < 1$. Задачу считаем плоской, т. е. $U \equiv U(x, y, t)$. На границах раздела $x = \pm 1$ поставим условия непрерывности поля и его нормальной производной.

Будем считать, что в полупространстве $x < -1$ поле $U(x, y, t)$ — суперпозиция падающей на слой под углом α к нормали слоя плоской монохроматической волны и волны, отраженной от слоя, а в полупространстве $x > 1$ имеется только прошедшая волна, т. е.

$$(1.2) \quad \begin{aligned} U(x, y, t) &= \exp[-i\omega(t - n_0 y \sin \alpha - n_0(x + 1) \cos \alpha)] + \\ &+ R \exp[-i\omega(t - n_0 y \sin \alpha + n_0(x + 1) \cos \alpha)], \quad x < -1 \\ U(x, y, t) &= C \exp[-i\omega(t - n_0 y \sin \alpha - n_0(x - 1) \cos \alpha)], \quad x > 1 \end{aligned}$$

Постоянные R и C назовем коэффициентами отражения и прохождения соответственно. В задаче о рассеянии на слое требуется определить эти

коэффициенты, функция $U(x, y, t)$ должна удовлетворять уравнению (1.1) и поставленным условиям непрерывности. Ниже при некоторых предположениях относительно функции $n(x)$ будут получены асимптотические формулы для коэффициентов отражения и прохождения при $\omega \rightarrow \infty$.

Полагая

$$(1.3) \quad U(x, y, t) = \exp[-i\omega(t - n_0 y \sin \alpha)] V(x)$$

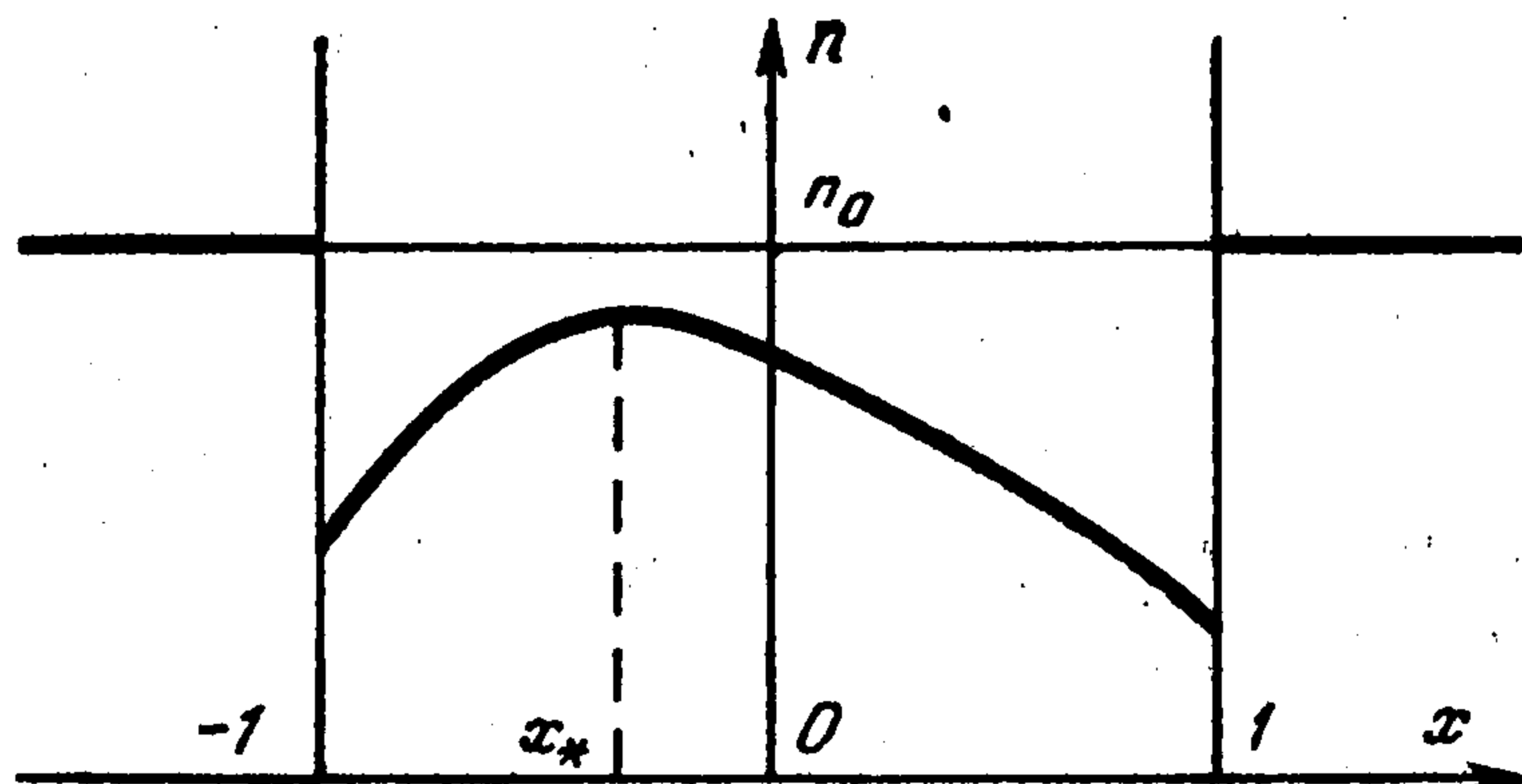
получим для функции $V(x)$ при $|x| < 1$ уравнение

$$(1.4) \quad V''(x) = \omega^2 q(x) V(x), \quad q(x) = n_0^2 \sin^2 \alpha - n^2(x)$$

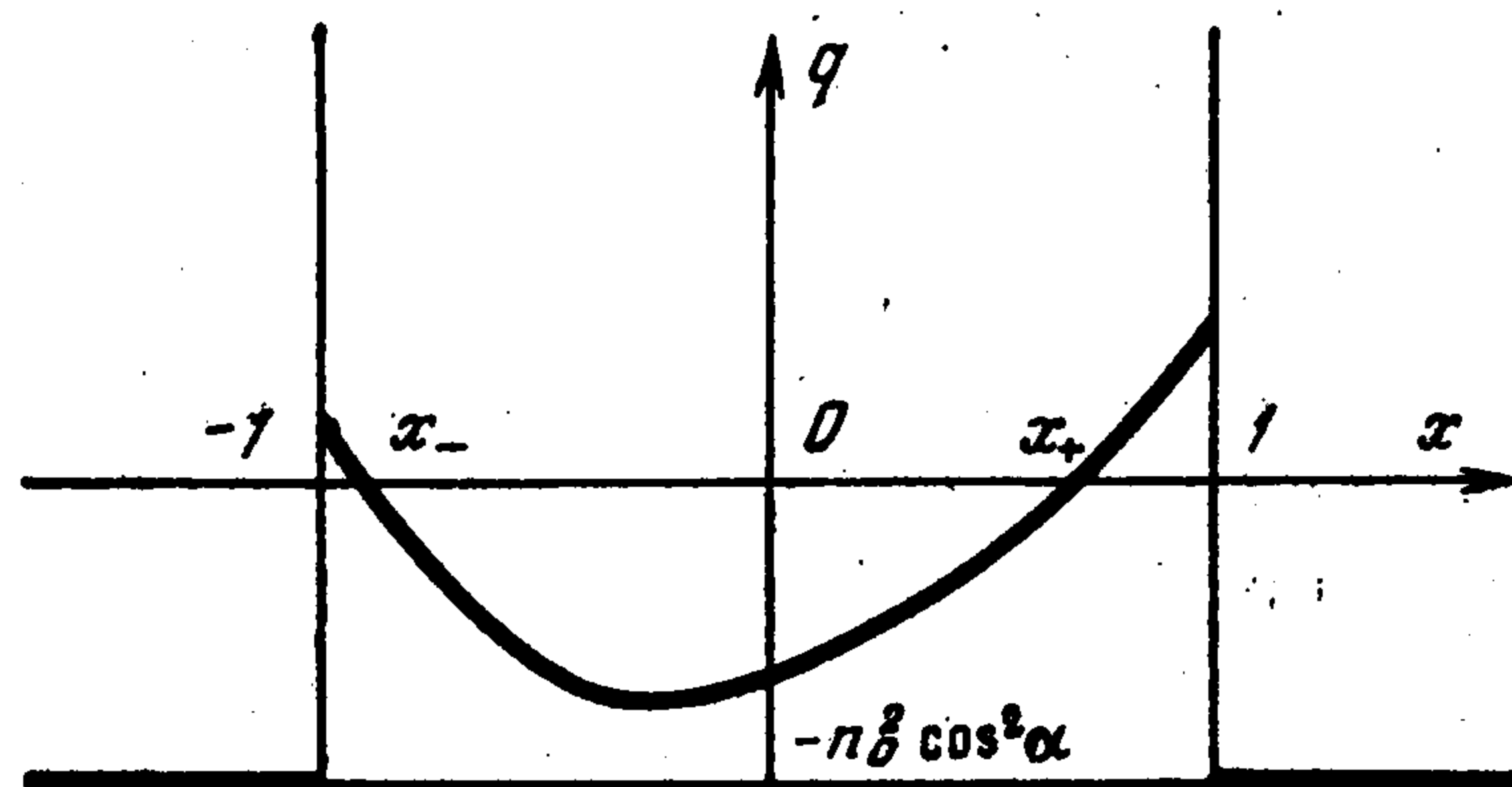
При $x < -1$ и при $x > 1$ функция $V(x)$ имеет представления согласно (1.2), (1.3), кроме того, $V(x)$ должна быть непрерывно дифференцируемой при всех x .

При построении асимптотических формул для R и C потребуются асимптотические формулы для решений уравнения (1.4); вид этих формул существенно зависит от свойств функции $q(x)$.

Предполагается, что показатель преломления $n(x)$ имеет внутри слоя один максимум в некоторой точке $x = x_*$, $|x_*| < 1$, а при остальных $x \in [-1, 1]$ является монотонной функцией (точнее, требуется, чтобы $n'(x) \neq 0$ при $x \neq x_*$, $x \in [-1, 1]$) и притом достаточно гладкой (фиг. 1). Именно, для получения главных членов асимптотических формул достаточно иметь при $|x| < 1$ непрерывность $n'''(x)$, а для получения первой поправки к главным членам — непрерывность $n^{(5)}(x)$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Это предположение относительно функции $n(x)$ приводит к следующим свойствам функции $q(x)$. Для малых α (например при нормальном падении волны) при $|x| < 1$ будет $q(x) < 0$. Однако, если $n_0 > n_{-1} \equiv n(-1 + 0)$, то для углов α , таких, что $n_0 \sin \alpha > n_{-1}$, вблизи точки $x = -1$ найдется интервал, на котором $q(x) > 0$. Аналогично, если $n_0 > n_1 \equiv n(1 - 0)$ и $n_0 \sin \alpha > n_1$, то такой интервал будет около точки $x = 1$.

Будем предполагать, что угол падения волны такой, что

$$(1.5) \quad \max(n_{-1}, n_1) < n_0 \sin \alpha < n(x_*)$$

График $q(x)$ приведен на фиг. 2. Условие (1.5) обеспечивает наличие при $|x| < 1$ у функции $q(x)$ двух простых нулей x_- и x_+ . Иными словами, уравнение (1.4) имеет две простые точки поворота x_- и x_+ .

Сделаем ряд замечаний о терминологии. В интервалах, где $q(x) < 0$, уравнение (1.4) имеет осциллирующие решения, поэтому будем называть такие интервалы интервалами прозрачности. Интервалы, в которых $q(x) > 0$, назовем интервалами непрозрачности или барьерами. Интервал (x_-, x_+) между барьерами назовем ямой.

При малых α слой прозрачен для волны. Коэффициенты R и C в этом случае — величины порядка единицы, часть энергии падающей волны уходит в полупространство $x > 1$ в виде прошедшей волны, часть отражается от слоя. Если же $\alpha > \alpha_*$, где α_* — критический угол, определяемый из соотношения $n_0 \sin \alpha_* = \min(n_{-1}, n_1)$, то в слое появляются интервалы непрозрачности (барьеры) и в этом случае коэффициент C , вообще говоря, экспоненциально мал (эффект полного внутреннего отражения [1]); при закритических углах энергия практически не просачивается в полупространство $x > 1$. В п. 4 будет показано, что при некоторых условиях на $n(x)$ и α прохождение волны возможно и для углов падения, больших критического. По-видимому, это явление связано с резонансом волны на яме между барьерами.

2. Матрица перехода. Введем векторы $z = (V(x), \omega^{-1} V'(x))$, $r = (R + 1, i\sigma(R - 1))$, $c = (C, -i\sigma C)$, где $\sigma = n_0 \cos \alpha$ (векторы здесь и далее — столбцы, но для сокращения записи пишутся в строку). Из уравнения (1.4) получаем систему дифференциальных уравнений для вектора $z(x)$

$$(2.1) \quad z'(x) = \omega \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ q(x) & 0 \end{vmatrix} z(x), \quad |x| < 1$$

а из (1.2), (1.3) и непрерывности $V(x)$ и $V'(x)$ — граничные условия

$$(2.2) \quad z(-1) = r, \quad z(1) = c$$

Пусть $Z(x)$ — фундаментальная матрица системы (2.1), тогда при $|x| < 1$ имеем $z(x) = Z(x)\beta$, где β — некоторый постоянный вектор. Исключая с помощью (2.2) вектор β , получаем (неоднородную) систему двух линейных уравнений

$$(2.3) \quad r = Tc \quad (T = Z(-1)Z^{-1}(1))$$

для точных значений коэффициентов отражения R и прохождения C .

Ясно, что матрица T (будем называть ее матрицей перехода) не зависит от выбора фундаментальной матрицы $Z(x)$, и можно выбрать в качестве $Z(x)$ матрицу с известными асимптотическими свойствами при $\omega \rightarrow \infty$.

Фундаментальную матрицу системы (2.1) на интервале, содержащем две простые точки поворота, можно строить разными способами. Здесь будет применен метод сшивания равномерных асимптотических формул, содержащих функции Эйри. Произвольно фиксируем $x_0 \in (x_-, x_+)$ и получаем два интервала $I_- = [-1, x_0]$ и $I_+ = [x_0, 1]$, на каждом из которых лежит ровно одна точка поворота. Пусть $\eta^{(l)}(x) = (\eta_1^{(l)}(x), \eta_2^{(l)}(x))$, $l = 1, 2$ — два линейно-независимых вектора-решения (2.1) на I_- , а $\zeta^{(l)}(x) = (\zeta_1^{(l)}(x), \zeta_2^{(l)}(x))$, $l = 1, 2$ — два линейно-независимых вектора-решения (2.1) на I_+ . Составим из них фундаментальные матрицы

$Z_-(x) = (\eta^{(1)}(x), \eta^{(2)}(x))$, $Z_+(x) = (\zeta^{(1)}(x), \zeta^{(2)}(x))$. В качестве $Z(x)$ возьмем непрерывную при $|x| < 1$ матрицу

$$Z(x) = \begin{cases} Z_-(x) Z_-^{-1}(x_0), & -1 < x \leq x_0 \\ Z_+(x) Z_+^{-1}(x_0), & x_0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Матрицу перехода T можно выразить через функции $\eta_k^{(l)}(x)$, $\zeta_k^{(l)}(x)$, $l, k = 1, 2$. Вычисление показывает, что

$$(2.4) \quad T = \frac{1}{\Delta_-(x_0) \Delta_+(1)} \sum_{i,k=1}^2 w_{ik} A_{ik}, \quad \Delta_{\pm}(x) = \det Z_{\pm}(x)$$

$$w_{ik} = (-1)^{i+k} [\eta_2^{(3-i)}(x_0) \zeta_1^{(3-k)}(x_0) - \eta_1^{(3-i)}(x_0) \zeta_2^{(3-k)}(x_0)]$$

$$A_{ik} = \begin{vmatrix} -\eta_1^{(i)}(-1) \zeta_2^{(k)}(1) & \eta_1^{(i)}(-1) \zeta_1^{(k)}(1) \\ -\eta_2^{(i)}(-1) \zeta_2^{(k)}(1) & \eta_2^{(i)}(-1) \zeta_1^{(k)}(1) \end{vmatrix}, \quad \det A_{ik} = 0$$

Отметим, что функции $\eta_1^{(l)}(x)$, $\zeta_1^{(l)}(x)$ ($l = 1, 2$) — решения уравнения (1.4) и для w_{ik} имеют место равенства $w_{ik} = (-1)^{i+k} \omega^{-1} W[\zeta_1^{(3-k)}, \eta_1^{(3-i)}]$, где $W[f, g]$ означает вронскиан f и g . Отсюда следует, что w_{ik} не зависит от x_0 . Поскольку $\Delta_-(x_0)$ тоже не зависит от x_0 (как определитель фундаментальной матрицы), то, значит, и матрица перехода T не зависит от x_0 .

3. Асимптотические формулы. Формула (2.4) дает выражение для матрицы перехода через четыре решения системы (2.1). Удобно выбрать эти решения так, чтобы при $\omega \rightarrow \infty$ были справедливы равномерные на I_{\pm} асимптотические формулы [2], которые в векторной форме имеют вид

$$(3.1) \quad \eta^{(l)}(x) = \begin{vmatrix} \mu_l^-(x)(1 + o_2) + o_2 \mu_l^{-'}(x) \\ \omega^{-1} \mu_l^{-'}(x)(1 + o_2) + o_1 \mu_l^-(x) \end{vmatrix},$$

$$\zeta^{(l)}(x) = \begin{vmatrix} \mu_l^+(x)(1 + o_2) + o_2 \mu_l^{+'}(x) \\ \omega^{-1} \mu_l^{+'}(x)(1 + o_2) + o_1 \mu_l^+(x) \end{vmatrix}$$

$$\mu_1^{\pm}(x) = \frac{\omega^{1/6}}{\sqrt{|\varphi_{\pm}'|}} u(\omega^{2/3} \varphi_{\pm}(x)), \quad \mu_2^{\pm}(x) = \frac{\omega^{1/6}}{\sqrt{|\varphi_{\pm}'|}} v(\omega^{2/3} \varphi_{\pm}(x))$$

$$\varphi_{\pm}(x) = \left(\frac{3}{2} \int_{x_{\pm}}^x |q(\tau)|^{1/2} d\tau \right)^{2/3} \text{sign } q(x)$$

где $u(\tau)$, $v(\tau)$ — вещественные функции Эйри, а символ o_k здесь и далее заменяет символ $O(\omega^{-k})$.

Подставляя (3.1) в (2.4) и используя известные асимптотические формулы для функций Эйри [3], получим асимптотику матрицы T

$$(3.2) \quad T = \frac{1}{\sqrt{\kappa_1 \kappa_{-1}}} \left\{ w_{11} \exp[(\gamma_+ + \gamma_-) \omega] K_{+-}^{+-} - \right.$$

$$- \frac{w_{12}}{2} \exp[(-\gamma_+ + \gamma_-) \omega] K_{--}^{++} - \frac{w_{21}}{2} \exp[(\gamma_+ - \gamma_-) \omega] K_{-+}^{-+} -$$

$$\left. - \frac{w_{22}}{4} \exp[(-\gamma_+ - \gamma_-) \omega] K_{++}^{++} \right\}, \quad \gamma_{\pm} = \gamma_{\pm}(\alpha) = \pm \int_{x_{\pm}}^{\pm 1} \sqrt{q(\tau)} d\tau > 0$$

$$w_{11} = \sin \psi + o_1, \quad w_{12} = -\cos \psi + o_1, \quad w_{21} = -\cos \psi + o_1$$

$$w_{22} = -\sin \psi + o_1$$

$$\psi = \omega J + \pi/2, \quad J = J(\alpha) = \int_{x_-}^{x_+} \sqrt{-q(\tau)} d\tau$$

$$K_{-+}^{\pm} = \begin{vmatrix} a_{\pm} & b_{\pm} \\ c_{\pm} & d_{\pm} \end{vmatrix}, \quad a_{\pm} = \pm \kappa_1(1 + o_1), \quad b_{\pm} = \pm 1 + o_1$$

$$c_{\pm} = \pm \kappa_1 \kappa_{-1}(1 + o_1), \quad d_{\pm} = \pm \kappa_{-1}(1 + o_1)$$

$$\kappa_{\pm 1} = \sqrt{q(\pm 1 \mp 0)}$$

Видно, что w_{11} может обращаться в нуль, поэтому первый член в формуле (3.2) не всегда будет главным в асимптотике T . В связи с этим далее рассматриваются два случая.

1°. Пусть $|w_{11}| \geq \delta > 0$. Тогда в (3.2) главным будет первое слагаемое и из (3.2) и (2.3) получаем

$$(3.3) \quad C = \left[\frac{2i\sigma \sqrt{\kappa_1 \kappa_{-1}}}{\sin \psi (\kappa_1 + i\sigma)(\kappa_{-1} + i\sigma)} + o_1 \right] \exp [-(\gamma_+ + \gamma_-)\omega]$$

$$R = R_0 + o_1, \quad R_0 = \frac{i\sigma - \kappa_{-1}}{i\sigma + \kappa_{-1}}, \quad |R_0| = 1$$

Это — случай обычного полного внутреннего отражения: амплитуда волны, прошедшей слой, экспоненциально мала. Наличие внутри слоя двух барьеров сводится просто к последовательному ослаблению ими проходящей волны.

2°. Пусть $w_{11} = 0$ (случай резонанса). В этом случае

$$\psi = \pi m + o_1, \quad w_{12} = (-1)^{m+1} + o_1, \quad w_{21} = (-1)^{m+1} + o_1$$

(m — целое)

В формуле (3.2) главным членом будет второй или третий, в зависимости от соотношения между γ_+ и γ_- . Предположим, что $\gamma_+ \neq \gamma_-$. Тогда получим

$$(3.4) \quad C = (-1)^m \left[\frac{4i\sigma \sqrt{\kappa_1 \kappa_{-1}}}{(\kappa_{>} + i\sigma)(\kappa_{<} - i\sigma)} + o_1 \right] \exp(-|\gamma_+ - \gamma_-|\omega)$$

$$R = \begin{cases} R_0 + o_1, & \gamma_- > \gamma_+ \\ R_0^{-1} + o_1, & \gamma_- < \gamma_+ \end{cases}$$

$$\kappa_{>} = \begin{cases} \kappa_1, & \gamma_+ > \gamma_- \\ \kappa_{-1}, & \gamma_+ < \gamma_- \end{cases}, \quad \kappa_{<} = \begin{cases} \kappa_{-1}, & \gamma_+ > \gamma_- \\ \kappa_1, & \gamma_+ < \gamma_- \end{cases}$$

Этот случай отличается от первого показателем экспоненты в формуле для C . На физическом языке можно сказать, что в случае резонанса существенно наличие именно двух барьеров внутри слоя, и действия этих барьеров на проходящую волну взаимно ослабляются.

Из (3.4) видно, что особый интерес представляет случай, когда $w_{11} = 0$ и $\gamma_+ = \gamma_-$, т. е. когда угол падения α и показатель преломления $n(x)$ таковы, что барьеры имеют одинаковую «интегральную» ширину. Этот случай, который будем называть случаем интегрально-симметричного резонанса, рассмотрим в п. 4.

В заключение п. 3 рассмотрим вопрос о ширине резонанса. Условие $w_{11} = 0$ дает дискретный набор резонансных частот

$$\omega_m = \omega_m(\alpha) = \pi(m - 1/2)/J(\alpha) + O(m^{-1}), \quad m \rightarrow \infty$$

Если вместо точного равенства $w_{11} = 0$ допустить, что

$$w_{11} \exp [(\gamma_+ + \gamma_-) \omega] = O(\omega^{-1} \exp(-|\gamma_+ - \gamma_-| \omega))$$

то в (3.2) первый член также не будет главным. Отсюда следует, что формула (3.4) справедлива не только для частот ω_m , но и в их малых окрестностях, описываемых соотношением

$$(3.5) \quad |\omega - \omega_m| \leq O(\omega_m^{-1} \exp[-2\gamma\omega_m]), \quad \gamma = \max(\gamma_+, \gamma_-)$$

Кроме ширины резонанса представляет интерес первый поправочный член к w_{11} . Он был вычислен, и оказалось, что условие резонанса $w_{11} = 0$ имеет вид

$$(3.6) \quad \sin \psi + \omega^{-1} K \cos \psi + o_2 = 0, \quad K = \frac{1}{48} \lim_{b \rightarrow x_+ - 0} \lim_{a \rightarrow x_- + 0} Q$$

$$Q = \int_a^b \frac{q''(\tau) d\tau}{(-q(\tau))^{3/2}} - \frac{2q''(x_+)}{(q'(x_+))^{3/2} \sqrt{x_+ - b}} - \frac{2q''(x_-)}{(-q'(x_-))^{3/2} \sqrt{a - x_-}}$$

При вычислении использованы первые поправочные члены в формулах 3.1), которые приведены в [2], а также члены порядка ω^{-1} в асимптотических формулах для функций Эйри [4].

Из (3.6) получается первый поправочный член к ω_m

$$(3.7) \quad \omega_m = \pi(m - 1/2)/J(\alpha) - K(\pi m)^{-1} + O(m^{-2}), \quad m \rightarrow \infty$$

4. Резонанс на интегрально-симметричном слое и на симметричном слое. Рассмотрим сначала случай интегрально-симметричного резонанса, т. е. $w_{11} = 0$ и $\gamma_+ = \gamma_-$. Асимптотика матрицы перехода имеет вид

$$(4.1) \quad T = \frac{(-1)^m}{\sqrt{\kappa_1 \kappa_{-1}}} \begin{vmatrix} o_1 & 1 + o_1 \\ -\kappa_1 \kappa_{-1} (1 + o_1) & o_1 \end{vmatrix}$$

Подставляя (4.1) в систему (2.3) и решая эту систему, получаем для R и C

$$(4.2) \quad R = \frac{\sigma^2 - \kappa_1 \kappa_{-1}}{\sigma^2 + \kappa_1 \kappa_{-1}} + o_1, \quad C = (-1)^m \frac{2i\sigma \sqrt{\kappa_1 \kappa_{-1}}}{\sigma^2 + \kappa_1 \kappa_{-1}} + o_1$$

Представляет интерес случай, когда $R = 0$, т. е. отраженной волны не будет совсем. Рассмотрим вопрос о нулях главного члена R . Простое вычисление показывает, что уравнение $\sigma^2 - \kappa_1 \kappa_{-1} = 0$ имеет в интервале $[0, \pi/2]$ единственный корень

$$(4.3) \quad \alpha^\circ = \arcsin \frac{1}{n_0} \sqrt{\frac{n_0^4 - n_1^2 n_{-1}^2}{2n_0^2 - n_1^2 - n_{-1}^2}}$$

причем α° удовлетворяет неравенствам (1.5).

Таким образом, если при $\alpha = \alpha^\circ$ слой интегрально-симметричный, т. е. $\gamma_+(\alpha^\circ) = \gamma_-(\alpha^\circ)$, то для всех резонансных частот $\omega = \omega_m(\alpha^\circ)$ слой почти не будет отражать, $R = o_1$, $|C| = 1 + o_1$. Волна пройдет через такой слой, практически не затухая, несмотря на то, что $\alpha > \alpha_*$, т. е. угол падения больше критического. Вообще говоря, неясно, можно ли утверждать, что найдется угол, при котором $R = 0$. В самом деле, главный член R

вещественный, но, вообще говоря, $\text{Im } R \neq 0$. Вопрос о нулях R удается исследовать до конца для идеально симметричного слоя.

В случае, когда слой идеально симметричный, т. е. $n(-x) = n(x)$, всегда $\gamma_+ = \gamma_-$ независимо от α . Это означает, что все резонансы интегрально-симметричны, и при $\omega = \omega_m$ коэффициент C не имеет экспоненциально малого множителя.

Ввиду симметрии слоя в качестве решений $\zeta^{(l)}(x)$ можно взять решения $\zeta^{(l)}(x) = (\eta_1^{(l)}(-x), -\eta_2^{(l)}(-x))$. Выбирая $\zeta^{(l)}(x)$ таким образом, для диагональных элементов матриц A_{ik} получим соотношения

$$\begin{aligned} -\eta_1^{(i)}(-1)\zeta_2^{(k)}(1) &= \eta_1^{(i)}(-1)\eta_2^{(k)}(-1), \quad \eta_2^{(i)}(-1)\zeta_1^{(k)}(1) = \\ &= \eta_2^{(i)}(-1)\eta_1^{(k)}(1) \end{aligned}$$

Положим $x_0 = 0$. Тогда будем иметь, что

$$w_{12} = w_{21} = -(\eta_1^{(1)}(0)\eta_2^{(2)}(0) + \eta_1^{(2)}(0)\eta_2^{(1)}(0))$$

Отсюда и из (2.4) следует, что диагональные элементы матрицы перехода T совпадают между собой. Далее, пусть $w_{11} = 0$. Запишем матрицу T в виде

$$(4.4) \quad T = \frac{(-1)^m}{V\kappa_1\kappa_{-1}} \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & 1 + \varepsilon_{12} \\ -\kappa_1\kappa_{-1}(1 + \varepsilon_{21}) & \varepsilon_{22} \end{vmatrix}$$

где через ε_{ik} обозначены величины, имеющие порядок ω^{-1} , причем, как было сказано, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$.

Подставляя (4.4) в (2.3), получим вместо (4.2) более детальную формулу для R

$$(4.5) \quad R = \frac{\sigma^2(1 + \varepsilon_{12}) - \kappa_1\kappa_{-1}(1 + \varepsilon_{21}) + i\sigma(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})}{\sigma^2(1 + \varepsilon_{12}) + \kappa_1\kappa_{-1}(1 + \varepsilon_{21}) + i\sigma(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{22})}$$

Учитывая, что $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$, получаем, что $R = 0$, если

$$(4.6) \quad \sigma^2 - \kappa_1\kappa_{-1} + \sigma^2\varepsilon_{12} - \kappa_1\kappa_{-1}\varepsilon_{21} = 0$$

Ясно, что $\sigma^2\varepsilon_{12} - \kappa_1\kappa_{-1}\varepsilon_{21}$ — вещественная функция порядка ω^{-1} ; однако вычисление первых поправочных членов показывает, что в действительности $\sigma^2\varepsilon_{12} - \kappa_1\kappa_{-1}\varepsilon_{21} = O(\omega^{-2})$.

Итак, отраженной волны не будет вообще, если выполнены условия (3.6) и (4.6). Эти условия перепишем, заменив в (4.6) величины σ и $\kappa_{\pm 1}$ их выражениями через α и указав зависимость поправочных членов от ω и α

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \omega J(\alpha) &= \pi(m - 1/2) + o_1(\alpha, \omega) \\ n_0^2 \cos^2 \alpha - [(n_0^2 \sin^2 \alpha - n_1^2)(n_0^2 \sin^2 \alpha - n_{-1}^2)]^{1/2} + o_2(\alpha, \omega) &= 0 \end{aligned}$$

Система, получаемая из (4.7) отбрасыванием функций $o_1(\alpha, \omega)$ и $o_2(\alpha, \omega)$, имеет при каждом m решение $\alpha = \alpha^\circ$, $\omega = \pi(m - 1/2)/J(\alpha^\circ)$. Функции $o_1(\alpha, \omega)$ и $o_2(\alpha, \omega)$ малы при $\omega \rightarrow \infty$, поэтому система (4.7) при каждом достаточно большом m имеет (хотя бы одно) решение $\alpha = \alpha_m$, $\omega = \omega_m(\alpha_m)$, причем

$$(4.8) \quad \alpha_m = \alpha^\circ + O(m^{-2}); \quad \omega_m(\alpha_m) = \pi(m - 1/2)/J(\alpha^\circ) + O(m^{-1}), \quad m \rightarrow \infty$$

Сформулируем полученные результаты.

Теорема. Пусть показатель преломления $n(x)$ удовлетворяет сформулированным в п. 1 условиям, угол α падения волны удовлетворяет неравенствам (1.5) и $\omega \gg 1$. Тогда для коэффициентов отражения R и прохождения C в задаче рассеяния (1.1), (1.2) имеют место следующие утверждения.

1°. Для каждого α существует дискретная последовательность резонансных частот $\{\omega_m(\alpha)\}$, определяемая формулой (3.7), такая, что: вне резонансных областей, т. е. при $|w_{11}| \geq \delta > 0$, справедливы асимптотические формулы (3.3); в окрестностях (3.5) при $\gamma_-(\alpha) \neq \gamma_+(\alpha)$ справедливы асимптотические формулы (3.4), а при $\gamma_-(\alpha) = \gamma_+(\alpha)$ — формулы (4.2).

2°. Если при $\alpha = \alpha^\circ$ слой интегрально-симметричен, т. е. $\gamma_-(\alpha^\circ) = \gamma_+(\alpha^\circ)$, то в окрестностях (3.5) резонансных частот $\omega_m(\alpha^\circ)$ будет $R = O(m^{-1})$, $|C| = 1 + O(m^{-1})$.

3°. Для идеально симметричного слоя существует последовательность углов $\{\alpha_m\}$, такая, что для соответствующих резонансных частот $\omega_m(\alpha_m)$ отраженной волны нет, т. е. $R = 0$; при этом $\alpha_m = \alpha^\circ + O(m^{-2})$, $\omega_m(\alpha_m) = \omega_m(\alpha^\circ) + O(m^{-1})$.

5. Пачка одинаковых слоев. Рассмотрим некоторое обобщение задачи (1.1), (1.2), а именно, предположим, что имеется пачка N одинаковых слоев, и будем рассматривать задачу о рассеянии на такой пачке.

Пусть слой с номером s ($s = 1, \dots, N$) имеет в качестве границ плоскости $x = s - 1$ и $x = s$. Поскольку слои одинаковы, то $n(x) = n(x + s - 1)$, $s = 1, \dots, N$. Предположим, что при $0 < x < 1$ функция $n(x)$ удовлетворяет условию (п. 1). Для поля $U(x, y, t)$ по-прежнему имеем уравнение (1.1) и по-прежнему на границах раздела $x = s$, $s = 0, 1, \dots, N$ поставим условия непрерывности поля и его нормальной производной. Относительно поля $U(x, y, t)$ вне пачки слоев сделаем предположения, аналогичные сделанным в п. 1: пусть при $x < 0$ имеет место первое представление (1.2), а при $x > N$ — второе. Наконец, пусть угол α , как и ранее, удовлетворяет условию (1.5).

Введем функции $q(x)$ и $V(x)$ и вектор $z(x)$ так же, как и в случае одного слоя. Обозначим через $Z_s(x)$ фундаментальную матрицу системы (2.1) при $s - 1 < x < s$, т. е. в слое с номером s . Условия непрерывности z на границах раздела приводят к системе уравнений (β_s — некоторые постоянные векторы)

$$(5.1) \quad Z_s(s) \beta_s = Z_{s+1}(s) \beta_{s+1}, \quad s = 1, \dots, N - 1$$

$$\mathbf{r} = Z_1(0) \beta_1, \quad \mathbf{c} = Z_N(N) \beta_N$$

Исключая из (5.1) последовательно все β_s , получим систему уравнений для R и C

$$(5.2) \quad \mathbf{r} = T_1 T_2 \dots T_N \mathbf{c} \quad (T_s = Z_s(s - 1) Z_s^{-1}(s))$$

где T_s — матрица перехода для слоя с номером s . Воспользуемся теперь тем, что слои одинаковы, и в качестве матрицы $Z_s(x)$ выберем матрицу $Z_1(x + s - 1)$. Тогда получим, что $T_s = T_1 \equiv T$, и система (5.2) приобретает вид

$$(5.3) \quad \mathbf{r} = T^N \mathbf{c}$$

Из системы (5.3) можно получить формулы, аналогичные формулам (3.3), (3.4), но довольно громоздкие. Более интересно рассмотреть случаи резонанса с интегральной или идеальной симметрией.

Предположим, что в каждом слое имеет место случай интегрально-симметричного резонанса. Тогда для матрицы перехода T справедлива формула (4.1), в которой κ_{-1} заменено на $\kappa_0 \equiv \sqrt{q(+0)}$, так как левой границей первого слоя теперь служит $x = 0$. Ясно, что

$$T^{2p} = (-1)^p (E + O_1), \quad T^{2p+1} = (-1)^p (T + O_1), \quad p = 0, 1, \dots$$

где E — единичная матрица, а O_1 — матрица с элементами порядка o_1 .

Рассмотрим случай нечетного числа слоев, $N = 2p + 1$. Решая систему (5.3), получаем, что в этом случае остаются справедливыми вторая часть утверждения 1° (при $\gamma_- = \gamma_+$) и утверждение 2° теоремы из п. 4 с очевидной заменой обозначений: κ_{-1} на κ_0 , $n(-1)$ на $n(+0)$ и добавлением множителя $(-1)^p$ в формуле для C_1 в (4.2). Если каждый слой идеально симметричен, то, как можно доказать по индукции, диагональные элементы матрицы T^{2p+1} одинаковы; отсюда следует справедливость утверждения 3°.

Итак, оказывается, что доказанная в п. 4 теорема переносится и на случай пачки нечетного числа одинаковых слоев.

Пусть теперь $N = 2p$. Тогда система (5.3) имеет вид

$$(5.4) \quad R + 1 = (1 + o_1) C_1 \\ i\sigma (R - 1) = (-i\sigma + o_1) C_1, \quad C_1 = (-1)^p C$$

Решая систему (5.4), получаем $R = o_1$, $C = (-1)^p + o_1$.

Таким образом, для четного числа слоев $R = o_1$ при интегрально-симметричном резонансе независимо от того, выполнено ли равенство $\alpha = \alpha^0$. В некотором смысле пачка четного числа слоев оказывается более прозрачной, чем один слой или нечетное число слоев. Это явление можно рассматривать как одно из проявлений четности функции $n(x)$ относительно середины пачки (в случае $N = 2p$).

Если каждый слой идеально симметричен, то, как можно доказать по индукции, $R = 0$ при углах $\alpha = \alpha_m$, указанных в утверждении 3° теоремы п. 4.

Наконец, ясно, что в случае пачки слоев ширина резонансов такая же как и для одного слоя.

Основной результат работы — доказательство того, что при наклонном падении волны на неоднородный слой или на пачку одинаковых слоев возможно прохождение волны с малыми потерями энергии при углах падения больше критического, т. е. в области полного внутреннего отражения.

Результаты, принципиально аналогичные полученным, имеются в работе, посвященной прямой и обратной задачам рассеяния волн на неоднородном слое или на пачке неоднородных слоев¹. В частности, отмечено существование резонансных частот

¹ Белишев М. И. Явление полного внутреннего отражения в задаче рассеяния плоской наклонной волны в слоисто-неоднородной среде. Рукопись деп. в ВИНТИ 25 мая 1977 г., № 2026—77 Деп.

у пачки из трех слоев (прозрачный слой между двумя непрозрачными). Следует отметить, что в указанной работе предполагалось отсутствие точек поворота.

Рассмотренные выше резонансные эффекты, вообще говоря, весьма тонкие, поскольку, во-первых, для их проявления требуется согласование угла падения со свойствами слоя (т. е. равенство $\gamma_- = \gamma_+$) и, во-вторых, ширина резонанса по частоте (и по углу) оказывается экспоненциально малой (см. (3.5)).

Авторы признательны Б. С. Павлову, а также участникам семинара, руководимого В. М. Бабичем, за обсуждение результатов.

Поступила 4 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховский Л. М.* Волны в слоистых средах. М., «Наука», 1973.
2. *Olver F. W. J.* The asymptotic solution of linear differential equations of the second order for large values of a parameter. Philos. Trans. Roy. Soc. London, A, 1954, vol. 247, No. 930, p. 307—327.
3. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. 3. М., «Наука», 1974.
4. *Фок В. А.* Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М., «Сов. радио», 1970.