Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ УПРУГОГО ШТАМПА С УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ ЧЕРЕЗ НАКЛАДКУ ИЛИ ТОНКИЙ СЛОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В. М. Александров, Н. Х. Арутюнян

(Ростов-на-Дону, Москва)

Рассматриваются две контактные задачи для упругой полуплоскости (случай плоской деформации), 1) усиленной по всей ее границе упругой тонкой накладкой (стрингером), 2) покрытой тонким слоем идеальной несжимаемой жидкости. Предполагается, что штамп вдавливается в границу накладки или слоя жидкости и движется с постоянной скоростью вдоль этой границы. Силами трения в области контакта и массовыми силами пренебрегаем. С помощью интегрального преобразования Фурье задачи приведены к интегральным уравнениям первого рода с разностными сингулярными ядрами. Исследована структура решений этих уравнений. Для построения приближенных решений использованы асимптотические методы.

1. Задача о внедрении движущегося упругого штампа в упругую полуплоскость, усиленную по границе накладкой. Пусть упругая полуплоскость ($y \leqslant 0$) с механическими характеристиками G_2, ν_2 и плотностью ρ_2 усилена по всей своей границе $y = 0$ тонкой упругой накладкой, деформация растяжения которой описывается уравнением

$$ku'' = \tau_+ - \tau_- + \rho u^{\cdot\cdot}, \quad k = hE \tag{1.1}$$

Здесь h — толщина накладки, E — ее модуль Юнга, u — среднее по толщине перемещение вдоль оси x, τ_+, τ_- — касательные напряжения, действующие соответственно по верхней и нижней граням накладки, ρ — плотность материала накладки. Предполагаем, что накладка настолько тонкая, что сопротивлением ее изгибным деформациям можно пренебречь.

По верхней границе накладки в положительном направлении оси x движется с постоянной скоростью W упругий штамп с механическими характеристиками G_1, ν_1. Штамп прижимается к границе накладки силой P, вследствие чего образуется область контакта с накладкой шириной $2a$. Вне области контакта верхняя граница накладки свободна от напряжений.

Свяжем со штампом подвижную систему координат (фигура)

$$x_1 = x - Wt, \; y_1 = y \tag{1.2}$$

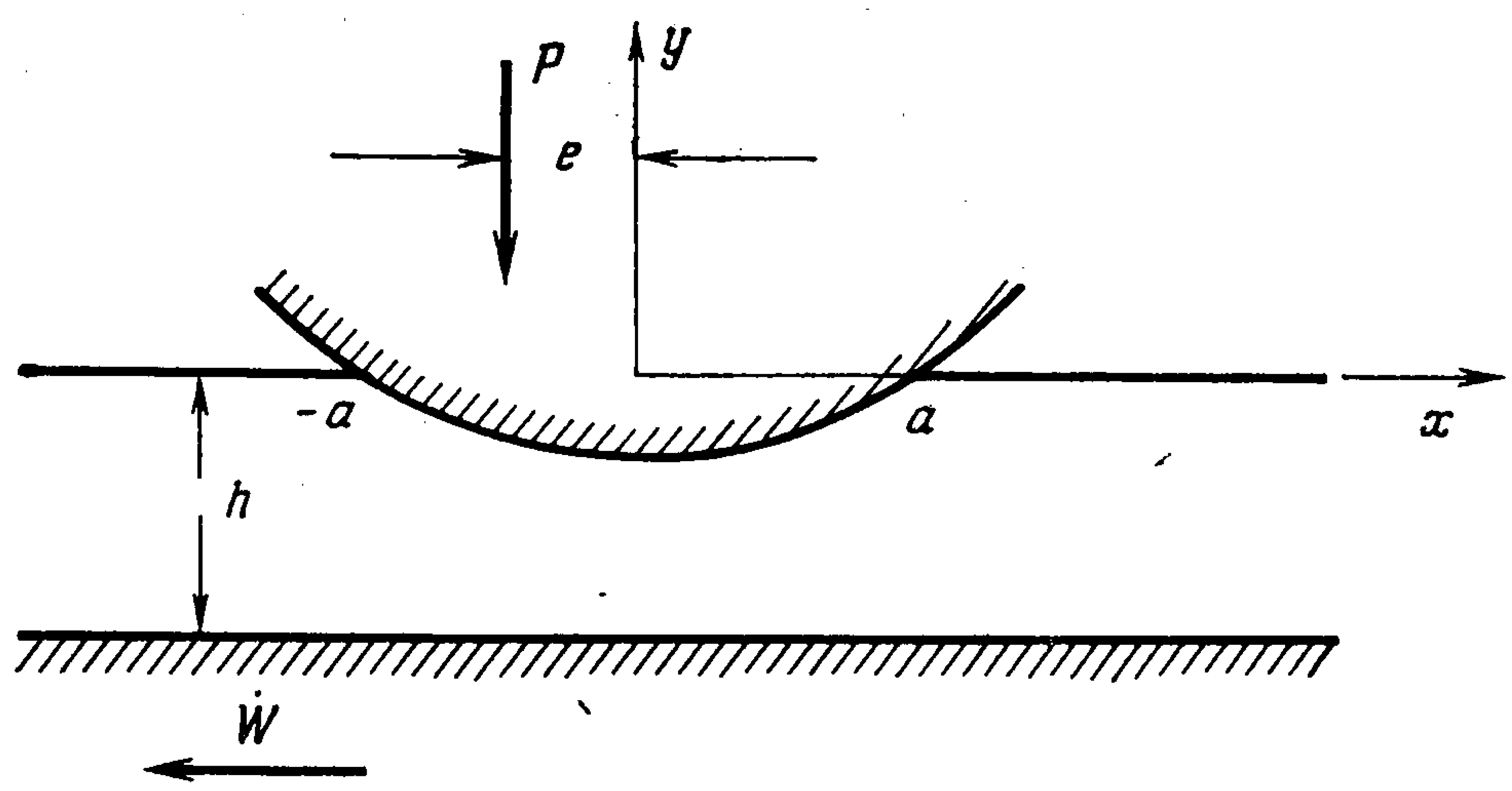
Пусть в этой системе граница штампа описывается уравнением $y = \psi(x)$, а на линии контакта $-a \leqslant x \leqslant a$ действует на штамп неизвестное контактное давление $p(x)$ (здесь и далее индексы единица у x и y опускаем). Предполагая, что минимальный при $|x| < a$ радиус кривизны штампа $\rho_{\min} \gg a$, будем для производной от перемещения v_1 точек поверхности штампа по оси y иметь выражение (в приближении теории Герца)

$$v_1'(x, 0) = \frac{1}{\pi\theta_1} \int_{-a}^{a} \frac{p(\xi)}{\xi - x} d\xi, \quad \theta_1 = \frac{G_1}{1 - \nu_1} \tag{1.3}$$

Условия контакта накладки со штампом и упругой полуплоскостью можно представить в виде

$$\tau_+ = 0, \quad \tau_- = \tau_{xy2}(x, 0), \quad u + u_2(x, 0) = 0 \tag{1.4}$$

Здесь $\tau_{xy2}(x, 0)$ — контактное касательное напряжение, действующее на границе между накладкой и полуплоскостью, u_2 — перемещение точек



полуплоскости вдоль оси x. При этом в силу (1.1) в подвижной системе координат имеет место соотношение

$$c^2 u'' = -\tau_-(x), \quad c^2 u_2''(x, 0) = \tau_{xy2}(x, 0), \quad c^2 = k - \rho W^2 \tag{1.5}$$

Предполагаем, что $W < \sqrt{k\rho^{-1}}$.

Поскольку накладка не сопротивляется изгибу, то на границе полуплоскости будем еще иметь

$$\sigma_{y2}(x, 0) = p(x) \ (|x| \leqslant a), \quad \sigma_{y2}(x, 0) = 0 \ (|x| > a) \tag{1.6}$$

Допустим, что скорость движения штампа по границе накладки меньше скоростей распространения в полуплоскости волн деформаций сжатия и сдвига, при этом

$$\beta^2 = 1 - \frac{1 - 2\nu_2}{2(1 - \nu_2)} V^2 > 0, \quad \gamma^2 = 1 - V^2 > 0, \quad V = W \sqrt{\frac{\rho_2}{G_2}} \tag{1.7}$$

С помощью интегрального преобразования Фурье по переменной x найдем теперь решение в полуплоскости уравнений Ламе с инерционными членами при граничных условиях (1.5), (1.6) и условии убывания напряжений на бесконечности. В результате получим

$$v_2'(x, 0) = -\frac{1}{\pi\theta_2\mu} \int_{-a}^{a} p(\xi) d\xi \int_0^\infty \frac{u + D}{u + 1} \sin \frac{u(\xi - x)}{\mu} du \tag{1.8}$$

$$\theta_2 = \frac{G_2\gamma(1 - \gamma^2)}{1 - \beta\gamma}, \quad \mu = \frac{c^2\gamma(1 - \gamma^2)}{G_2[4\beta\gamma - (1 + \gamma^2)^2]}$$

$$D = \frac{\beta\gamma(1 - \gamma^2)^2}{(1 - \beta\gamma)[4\beta\gamma - (1 + \gamma^2)^2]}$$

Снова учитывая тот факт, что накладка не сопротивляется изгибу, запишем условие связи между $v_1'(x, 0)$ и $v_2'(x, 0)$, имеющее место на линии контакта

$$v_1'(x, 0) - v_2'(x, 0) = \varepsilon - \psi'(x) \quad (|x| \leqslant a) \tag{1.9}$$

Здесь ε — угол поворота штампа при внедрении в накладку.

Подставляя в (1.9) выражения (1.3) и (1.8), получим интегральное уравнение для определения контактного давления $p(x)$

$$\int_{-a}^{a} \frac{p(\xi)}{\xi - x} d\xi + \frac{\sigma}{\mu} \int_{-a}^{a} p(\xi) H\left(\frac{\xi - x}{\mu}\right) d\xi = \pi\theta_{12} [\varepsilon - \psi'(x)] \tag{1.10}$$

$$\sigma = \frac{(D-1)\theta_1}{\theta_1 + \theta_2}, \quad \theta_{12} = \frac{\theta_1\theta_2}{\theta_1 + \theta_2}, \quad H(t) = \int_0^\infty \frac{\sin ut}{u+1} du$$

Уравнение (1.10) также можно представить в форме

$$\int_{-a}^{a} p(\xi) K\left(\frac{\xi - x}{\mu}\right) d\xi = \pi\mu\theta_{12} [\varepsilon - \psi'(x)], \tag{1.11}$$

$$K(t) = \int_0^\infty \frac{u + \sigma + 1}{u + 1} \sin ut\, du$$

К уравнению (1.10) или (1.11) необходимо еще добавить условия статики

$$P = \int_{-a}^{a} p(\xi) d\xi, \quad Pe = \int_{-a}^{a} \xi p(\xi) d\xi \tag{1.12}$$

Здесь e – эксцентриситет приложения вдавливающей силы P. Заметим, что сила P должна быть настолько большой, чтобы выполнялось условие $p(x) > 0$ при всех $|x| < a$. Второе условие (1.12) устанавливает взаимосвязь между величинами ε и e.

При решении уравнения (1.10) или (1.11) вместе с первым условием (1.12) могут представиться три случая:

а) если $\psi'(\pm a \mp 0) - \psi'(\pm a, \pm 0) = \text{const} \neq 0$, то величина a должна считаться заданной, а функция $p(x)$ в точках $x = \pm a$ может иметь интегрируемую особенность;

б) если в окрестности точки $x = a$ (или $x = -a$) производная функции $\psi(x)$ непрерывна, то величина a подлежит определению, а функция $p(x)$ должна быть ограничена в точке $x = a$;

в) если производная функции $\psi(x)$ непрерывна в окрестности точек $x = \pm a$, то величина a также подлежит определению, а функция $p(x)$ должна быть ограничена в точках $x = \pm a$.

Заметим, что поставленная задача в частном случае рассматривалась ранее в работе [1].

2. Задача о глиссировании упругого тела по смоченной границе упругой полуплоскости. Пусть упругая полуплоскость G_2, ν_2, ρ_2, $y \leqslant 0$ покрыта слоем идеальной несжимаемой жидкости толщины h, плотность жидкости ρ. По верхней границе слоя глиссирует с постоянной скоростью W упругое тело (G_1, ν_1), прижимаемое к границе слоя силой P (фигура). Свяжем с телом подвижную систему координат (1.2). В этой системе e — плечо действия силы, длина участка границы тела, находящегося в контакте с жидкостью, определяется неравенствами— $a \leqslant x \leqslant a$, $2a \gg h$. Давление p на поверхности жидкости вне участка контакта равно нулю. Предполагаем, что течение потенциальное и стационарное. Граница глиссирующего тела описывается уравнением $y = -\delta - \varepsilon x + \psi(x)$, причем $p > 0$ и $y \gg -h$ при всех $|x| < a$, а минимальный при $|x| \leqslant a - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ радиус кривизны тела $\rho_{\min} \gg a$.

С учетом сделанных допущений линеаризуем интеграл Бернулли в окрестности основного течения, для которого $v_{x0} = W$, $v_{y0} = 0$, $p_0 = 0$. Искомыми величинами при решении задач являются контактное давление $p(x)$, действующее при $|x| \leqslant a$ между глиссирующим телом и жидкостью, а также a, ε и e.

Для определения течения в слое жидкости имеем уравнения

$$\Delta\varphi = 0, \quad v_x = W + \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad p = -\rho W \frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{2.1}$$

Здесь и выше v_x, v_y — проекции скорости на направления осей x и y, $\varphi(x, y)$ — потенциал скоростей.

Введем безразмерные переменные

$$y' = y/h, \quad x' = x/a, \quad \sigma = h/a \ll 1 \tag{2.2}$$

и легко убедимся, что вырожденное при очень малых σ течение в слое жидкости описывается уравнением $\varphi_{y'}'' = 0$. Решая это уравнение и возвращаясь к старым переменным, найдем

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= F_1(x)\, y + F_2(x), \quad v_y = F_1(x), \quad p = \\ &= -\rho W\, [F_1'(x) y + F_2'(x)]\end{aligned} \tag{2.3}$$

Заметим теперь, что со стороны упругого тела на жидкость при $y = 0$ и $|x| \leqslant a$ действует давление $p(x)$, а со стороны упругой полуплоскости при $y = -h$ и $|x| < \infty$ — давление $q(x)$. При $y = 0$ и $|x| > a$ по постановке $p(x) = 0$. Удовлетворяя этим условиям и принимая ещё во внимание, что $q = v_y = 0$ при $x = -\infty$, имеем

$$v_y = F_1(x) = \frac{1}{\rho W h}\left[\int_{-\infty}^{x} p^*(\xi)\, d\xi - \int_{-\infty}^{x} q(\xi)\, d\xi\right] \tag{2.4}$$

Здесь $p^*(x) = p(x)$ при $|x| \leqslant a$, $p^*(x) = 0$ при $|x| > a$.

На границах контакта жидкости с упругим телом и упругой полуплоскостью после обычной линеаризации, принятой в теории тонкого слабо изогнутого крыла, получим следующее условие:

$$v_y\big|_{\Gamma} = W f'(x) \tag{2.5}$$

где $y = f(x)$ — уравнение границы. Таким образом, в силу (2.5) имеем такие условия контакта с упругим телом:

$$F_1(x) = [v_1'(x, 0) + \psi'(x) - \varepsilon]W \quad (|x| \leqslant a) \tag{2.6}$$

с упругой полуплоскостью

$$F_1(x) = v_2'(x, -h)\, W \quad (|x| < \infty) \tag{2.7}$$

Здесь v_1 и v_2 — упругие перемещения точек тела и полуплоскости по оси y. Величина $v_1'(x, 0)$ дается выражением (1.3).

Для определения величины $v_2'(x, -h)$ подвергнем уравнения Ламе с инерционными членами интегральному преобразованию Фурье по переменной x и построим их решение для полуплоскости при граничных условиях

$$\sigma_y(x, -h) = -q(x), \; \tau_{xy}(x, -h) = 0 \quad (|x| < \infty) \tag{2.8}$$

и условии отсутствия напряжений на бесконечности. Здесь также учтем, что $q(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, и имеют место неравенства (1.7). В результате получим

$$v_2'(x, -h) = \frac{i}{2\pi\theta_2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} \alpha Q(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \tag{2.9}$$

$$\theta_2 = G_2 [4\gamma\beta - (1 + \gamma^2)^2]\, \beta^{-1} (1 - \gamma^2)^{-1} \tag{2.10}$$

Здесь $Q(\alpha)$ — трансформанта Фурье функции $q(x)$.

Подставляя (2.4) и (2.9) в (2.7) и подвергая затем это соотношение преобразованию Фурье, установим связь между $Q(\alpha)$ и трансформантой Фурье $P(\alpha)$ функции $p^*(x)$]

$$Q(\alpha) = \frac{P(\alpha)}{\mu|\alpha| + 1}, \quad \mu = \frac{\rho h W^2}{\theta_2} \tag{2.11}$$

Обратное преобразование дает

$$q(x) = \frac{1}{\pi\mu} \int_{-a}^{a} p(\xi)\, d\xi \int_0^{\infty} \frac{\cos ut}{u + 1} du \left(t = \frac{\xi - x}{\mu}\right) \tag{2.12}$$

Теперь можно получить интегральное уравнение относительно $p(x)$, если преобразовать условие контакта (2.6) с учетом формул (2.4), (1.3) и (2.12). Будем иметь

$$\int_{-a}^{a} \frac{p(\xi)}{\xi - x} d\xi + \frac{\sigma}{\mu} \int_{-a}^{a} p(\xi) H\left(\frac{\xi - x}{\mu}\right) d\xi = \pi\theta_1 [\varepsilon - \psi'(x)] \tag{2.13}$$

$$(|x| \leqslant a, \; \sigma = \theta_1\theta_2^{-1})$$

где $H(t)$ дается формулой (1.10). Уравнение (2.13) можно также представить в форме (1.11), где следует заменить θ_{12} на θ_1. К уравнению (2.13) нужно также добавить условия (1.12).

Далее рассмотрим два возможных режима глиссирования:

а) если $\psi'(a - 0) - \psi'(a + 0) = \text{const} \neq 0$, то величина a должна считаться известной и должно быть найдено решение уравнения (2.13), такое, что величина $p(a)$ ограничена (условие Жуковского).

б) если в окрестности точки $x = a$ производные $\psi'(x)$ и $\psi''(x)$ непрерывны, то величина a подлежит определению, и должны быть ограничены $p(a)$ и $p'(a)$ [2].

Таким образом, обе рассматриваемые задачи приведены к одному и тому же интегральному уравнению вида (1.10) или (1.11) (для второй задачи $\theta_{12} = \theta_1$). Постоянные σ, μ и θ_2, входящие в интегральное уравнение, для первой задачи даются формулами (1.8) и (1.10), а для второй задачи — (2.10), (2.11) и (2.13).

3. Структура решений интегрального уравнения (1.10), асимптотические решения. Вычисляя интеграл [3], представим ядро $H(t)$ интегрального уравнения (1.10) в виде

$$H(t) = (\operatorname{ci} t \sin|t| - \cos t \operatorname{si}|t|) \operatorname{sgn} t \tag{3.1}$$

Здесь $\operatorname{ci} t$ и $\operatorname{si} t$ — интегральные косинус и синус. Используя известные [3] разложения этих функций в ряды при малых t, убедимся, что для $H(t)$ при всех $0 \leqslant |t| < \infty$ справедливо представление

$$H(t) = \ln|t| H_1(t) + |t| H_2(t) + H_3(t) + {}^1/_2\pi \operatorname{sgn} t \tag{3.2}$$

$$H_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} t^{2k+1} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$a_{1k} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, \quad a_{2k} = \frac{\pi(-1)^{k+1}}{2(2k+2)!}, \quad a_{30} = C - 1 \tag{3.3}$$

$$a_{3k} = (-1)^k \left\{ \frac{1}{(2k+1)!} \left(C - \frac{1}{2k+1} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=1}^{k} \frac{2k+1-4s}{2s(2s)!\,(2k-2s+1)(2k-2s+1)!} \right\}$$

Здесь C — постоянная Эйлера, $k \geqslant 1$ в выражении a_{3k}.

Анализируя представление (3.2), заключаем, что при всех $|t| \leqslant A$, где A — любое, сколь угодно большое число, справедливо соотношение

$$H(t) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t + t \ln|t| + F(t), \quad F(t) \in B_1{}^1(-A, A) \tag{3.4}$$

Здесь $B_k{}^\alpha(-A, A)$ — пространство функций, k-е производные которых при $t \in [-A, A]$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем $0 < \alpha \leqslant 1$.

Результаты работы [4] могут быть использованы для доказательства следующих теорем.

Теорема 1. Пусть $\psi(x) \in B_1{}^\alpha(-a, a)$, $0 < \alpha \leqslant 1$. Тогда если при данном $\mu \in (0, \infty)$ существует решение уравнения (1.10), такое, что $p(x) \in L_p(-a, a)$, $1 < p < 2$, то $p(x)$ имеет вид

$$p(x) = \omega(x)(a^2 - x^2)^{-1/2}, \quad \omega(x) \in B^\gamma(-a, a), \quad \gamma = \inf\left(\alpha, \frac{p-1}{p}\right)$$

Теорема 2. Пусть 1) $\psi(x) \in B_1{}^\alpha(-a, a)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, 2) $\psi(x) \in B_1{}^\beta(a - \varepsilon, a)$, $\varepsilon > 0$, ${}^1/_2 < \beta \leqslant 1$. Тогда если при данном $\mu \in (0, \infty)$ существует решение уравнения (1.10), такое, что 1) $p(x) \in L_p(-a, a)$, $1 < p < 2$, 2) $|p(x)| \leqslant m$, $m > 0$ при $a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a$, то выполняется соотношение

$$(3.5)\qquad P = -\pi\theta_{12}\varepsilon a + \int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}\,[\theta_{12}\psi'(\xi) + \sigma g(\xi)]\,d\xi$$

$$g(x) = \frac{1}{\pi\mu}\int_{-a}^{a} p(\xi)\,H\left(\frac{\xi - x}{\mu}\right)d\xi$$

и $p(x)$ имеет вид

$$(3.6)\qquad p(x) = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,\omega(x), \quad \omega(x) \in B^{\gamma}(-a, a),$$

$$\gamma = \inf\left(\alpha, \frac{p-1}{p}, \beta - \frac{1}{2}\right)$$

Теорема 3. Пусть 1) $\psi(x) \in B_1^{\alpha}(-a, a)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, 2) $\psi(x) \in B_1^{\beta}(a-\varepsilon, a)$, $\varepsilon > 0$, $1/2 < \beta \leqslant 1$, 3) $\psi(x) \in B_1^{\beta}(-a, -a+\varepsilon)$. Тогда если при данном $\mu \in (0, \infty)$ существует решение уравнения (1.10), такое, что 1) $p(x) \in L_p(-a, a)$, $1 < p < 2$, 2) $|p(x)| \leqslant m, m > 0$ при $x \in [a-\varepsilon, a]$ и $x \in [-a, -a+\varepsilon]$, то выполняются соотношения

$$(3.7)\qquad P = \int_{-a}^{a} [\theta_{12}\psi'(\xi) + \sigma g(\xi)]\,\frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}}$$

$$\pi\varepsilon\theta_{12} = \int_{-a}^{a} [\theta_{12}\psi'(\xi) + \sigma g(\xi)]\,\frac{d\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}}$$

и $p(x)$ имеет вид

$$(3.8)\qquad p(x) = \omega(x)\sqrt{a^2-x^2}, \quad \omega(x) \in B^{\gamma}(-a, a)$$

$$\gamma = \inf\left(\alpha, \frac{p-1}{p}, \beta - \frac{1}{2}\right)$$

Теорема 4. Пусть 1) $\psi(x) \in B_1^{\alpha}(-a, a)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, 2) $\psi(x) \in B_2^{\beta}(a-\varepsilon, a)$, $\varepsilon > 0$, $1/2 < \beta \leqslant 1$. Тогда если при данном $\mu \in (0, \infty)$ существует решение уравнения (1.10), такое, что 1) $p(x) \in L_p(-a, a)$, $1 < p < 2$, 2) $|p'(x)| \leqslant m$, $m > 0$ при $a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a$, то выполняются соотношения (3.5) и

$$(3.9)\qquad \pi\theta_{12}[\varepsilon - \psi'(a)] - \pi\sigma g(a) =$$

$$= \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a+\xi}}{(a-\xi)^{3/2}}\{\theta_{12}[\psi'(a) - \psi'(\xi)] + \sigma[g(a) - g(\xi)]\}\,d\xi$$

и $p(x)$ имеет вид

$$(3.10)\qquad p(x) = \frac{(a-x)^{3/2}}{\sqrt{a+x}}\,\omega(x), \quad \omega(x) \in B^{\gamma}(-a, a)$$

$$\gamma = \inf\left(\alpha, \frac{p-1}{p}, \beta - \frac{1}{2}\right)$$

Для примера приведем доказательство теоремы 4 с учетом того, что теоремы 1—3 доказываются проще и по аналогичной схеме. Покажем, что функция $g(x)$ вида (3.5) обладает следующими свойствами:

$$g(x) \in B^{\delta}(-a, a), \quad \delta = \frac{p-1}{p}, \quad g(x) \in B_1^{1-0}(a-\varepsilon, a) \tag{3.11}$$

Для этого представим $g(x)$ с помощью (3.4) в форме

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x), \quad g_1(x) = \frac{1}{2\mu}\left(P - 2\int_a^x p(\xi)\,d\xi\right) \tag{3.12}$$

$$g_2(x) = \frac{1}{\pi\mu^2}\left[P(x-e)\ln\mu + \int_{-a}^{a} p(\xi)(\xi - x)\ln|\xi - x|\,d\xi\right]$$

$$g_3(x) = \frac{1}{\pi\mu}\int_{-a}^{a} p(\xi) F\left(\frac{\xi - x}{\mu}\right) d\xi$$

В силу свойств функции $p(\xi)$, указанных в теореме, и свойств $F(t)$, отмеченных в (3.4), можно показать, что $g_3(x) \in B_1^1(-a, a)$. Продифференцируем $g_2(x)$ по x и произведем оценки

$$|g_2'(x_1) - g_2'(x_2)| \leqslant \frac{1}{\pi\mu^2}\int_{-a}^{a} |p(\xi)|\left|\ln\left|\frac{\xi - x_1}{\xi - x_2}\right|\right| d\xi \leqslant \tag{3.13}$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi\mu^2}\|p\|_{L_p}\left(\int_{-a}^{a}\left|\ln\left|\frac{\xi - x_1}{\xi - x_2}\right|\right|^q d\xi\right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \mu^{-2}M\,\|p\|_{L_p}|x_1 - x_2|^{1/q-0}, \quad \frac{1}{q} = \frac{p-1}{p} = \delta$$

$$|g_2'(a) - g_2'(x)| \leqslant \frac{1}{\pi\mu^2}\int_{-a}^{a}|p(\xi)|\left|\ln\left|\frac{\xi - a}{\xi - x}\right|\right| d\xi \leqslant \frac{1}{\mu^2} m^*(a-x)^{1-0},$$

$$x > -a$$

Из (3.13) следует, что $g_2(x) \in B_1^{\delta-0}(-a, a)$ и $g_2(x) \in B_1^{1-0}(a-\varepsilon, a)$. Для функции $g_1(x)$ имеют место оценки

$$|g_1(x_1) - g_1(x_2)| = \frac{1}{\mu}\left|\int_{x_1}^{x_2} p(\xi)\,d\xi\right| \leqslant \frac{1}{\mu}\|p\|_{L_p}|x_1 - x_2|^{1/q} \tag{3.14}$$

$$|g_1'(a) - g_1'(x)| = \frac{1}{\mu}|p(a) - p(x)| = \frac{1}{\mu} m(a - x), \quad x > -a$$

Из (3.14) следует, что $g_1(x) \in B^{\delta}(-a, a)$ и $g_1(x) \in B_1^{1}(a-\varepsilon, a)$. Таким образом, соотношения (3.11) доказаны.

Заметим, что интегральное уравнение (1.10) можно записать в форме

$$\int_{-a}^{a}\frac{p(\xi)}{\xi - x}\,d\xi = \pi\{\theta_{12}[\varepsilon - \psi'(x)] - \sigma g(x)\}, \quad (|x| \leqslant a) \tag{3.15}$$

Временно предположим функцию $g(x)$ известной, тогда решение сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши (3.15), обладающее указанными в условии теоремы 4 свойствами, будет иметь вид [5]

$$p(x)=\frac{1}{\pi}\frac{(a-x)^{3/2}}{\sqrt{a+x}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a+t}}{(a-t)^{3/2}}\Big\{\theta_{12}[\psi'(t)-\psi'(a)]+ \tag{3.16}$$

$$+\sigma[g(t)-g(a)]\Big\}\frac{dt}{t-x}$$

при дополнительных условиях (3.5) и (3.9). Здесь существенно использованы свойства функции $\psi(x)$, указанные в условии теоремы 4, и также свойства (3.11) функции $g(x)$. Уравнение (3.16) можно переписать следующим образом:

$$p(x)=\frac{(a-x)^{3/2}}{\sqrt{a+x}}\,\omega(x) \tag{3.17}$$

$$\omega(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{h(t)}{t-x}dt-[\theta_{12}\psi''(a)+\sigma g'(a)]$$

$$h(t)=\frac{\sqrt{a+t}}{(a-t)^{3/2}}\{\theta_{12}[\psi'(t)-\psi'(a)+\psi''(a)(a-t)]+$$

$$+\sigma[g(t)-g(a)+g'(a)(a-t)]\}$$

Заметим, что $h(\pm a)=0$ и в силу формулы (1.30) [4] в окрестности точки $t=a$ имеют место неравенства

$$|\psi'(t)-\psi'(a)+\psi''(a)(a-t)|\leqslant A_1|t-a|^{\beta+1} \tag{3.18}$$

$$|g(t)-g(a)+g'(a)(a-t)|\leqslant A_2|t-a|^{2-0}$$

Теперь с учетом (3.18), а также других свойств функций $\psi(x)$ и $g(x)$ придем к заключению, что $h(t)\in B^{\gamma}(-a,a)$, $\gamma=\inf(\alpha,\beta-{}^{1}/_{2},\delta)$. Проводя далее рассуждения для интеграла в (3.17), подобные рассуждениям относительно интеграла (2.3) [4], убедимся, что функция $\omega(x)$ вида (3.17) принадлежит классу $B^{\gamma}(-a,a)$.

Вернемся к рассматриваемым задачам. Для варианта б) первой задачи условие (3.5) послужит для определения величины a, для варианта в) из первого условия (3.7) будет определена величина a, а второе условие (3.7) позволит определить вместе со вторым условием (1.12) величины ε и e. Для варианта а) второй задачи условие (3.5) вместе со вторым условием (1.12) позволяет определить величины ε и e, для варианта б) из условий (3.5), (3.9) и второго условия (1.12) могут быть найдены величины a, ε и e.

Решение интегрального уравнения (1.10) при больших значениях параметра λ, как подсказывает разложение (3.2), нужно искать в виде [6]

$$p(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}p_{ij}(x)\lambda^{-i}(\ln\lambda)^{j} \tag{3.19}$$

Подставляя (3.2), (3.19) в уравнение (1.10), обращая точно его сингулярную часть и приравнивая затем в полученном соотношении коэффициенты в левой и правой части при одинаковых степенях λ^{-1} и $\ln\lambda$, получим бесконечную систему соотношений для последовательного определения функций $p_{ij}(x)$. Ограничившись в (3.19) конечным числом членов, можно получить указанным образом асимптотическое представление для $p(x)$ при больших λ. Используя принцип неподвижной точки Банаха, можно найти такое λ_0, $0 < \lambda_0 < \infty$, что при $\lambda > \lambda_0$ решение уравнения (1.10) в классе $L_p(-a, a)$, $1 < p < 2$ существует и единственно, а в двойной ряд (3.19) равномерно сходится по λ в норме $L_p(-a, a)$.

Заметим, что в (3.2) $0 \leqslant |t| \leqslant 2/\lambda$, и поэтому при достаточно больших λ можно приближенно принять $H(t) = {}^1/_2\pi \operatorname{sgn} t$. В этом случае уравнению (1.10) можно придать вид интегрального уравнения Прандтля для крыла конечного размаха

$$\int_{-a}^{a} \frac{\varphi'(\xi)}{\xi - x} d\xi = \frac{\pi\sigma}{\mu}\left[\varphi(x) - \frac{1}{2}P\right] + \pi\theta_{12}[\varepsilon - \psi'(x)] \qquad (|x| \leqslant a) \tag{3.20}$$

$$\varphi(x) = \int_{-a}^{x} p(\xi)\,d\xi, \quad \psi(-a) = 0, \quad \varphi(a) = P$$

Для нахождения приближенных решений уравнения (3.20) можно использовать весь арсенал методов теории крыла конечного размаха, а также теории упругих накладок (стрингеров) и, в частности, результаты работ [7-9].

При очень больших λ, когда уже можно пренебречь выражением в первых квадратных скобках в правой части (3.20), решение для вариантов а) — в) первой задачи имеет вид

вариант а)

$$p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}\left[P + \theta_{12}\left(\pi\varepsilon x + \int_{-a}^{a} \frac{\psi'(\xi)\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi - x} d\xi\right)\right] \tag{3.21}$$

$$Pe = \theta_{12}\left[\frac{\pi\varepsilon a^2}{2} - \int_{-a}^{a} \psi'(\xi)\sqrt{a^2 - \xi^2}\,d\xi\right] \tag{3.22}$$

вариант б)

$$p(x) = \theta_{12}\sqrt{\frac{a - x}{a + x}}\left[-\varepsilon + \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a + \xi}{a - \xi}}\frac{\psi'(\xi)}{\xi - x}d\xi\right] \tag{3.23}$$

сюда также надо добавить (3.22) и (3.5) при $g(x) \equiv 0$;

вариант в)

$$p(x) = \frac{\theta_{12}}{\pi}\sqrt{a^2 - x^2}\int_{-a}^{a} \frac{\psi'(\xi)\,d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}(\xi - x)} \tag{3.24}$$

сюда также надо добавить (3.22) и (2.7) при $g(x) \equiv 0$.

Решение для варианта а) второй задачи дается формулами (3.23), (3.22) и (3.5) при $g(x) \equiv 0$ с заменой θ_{12} на θ_1; для варианта б) будем иметь

$$p(x) = \frac{\theta_1}{\pi}\frac{(a - x)^{3/2}}{\sqrt{a + x}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a + \xi}}{(a - \xi)^{3/2}}\frac{[\psi'(a) - \psi'(\xi)]}{\xi - x}d\xi \tag{3.25}$$

сюда также надо добавить (3.22), (3.5) и (3.9) при $g(x) \equiv 0$ с заменой θ_{12} на θ_1.

Некоторое видоизменение метода «малых λ» [6] позволяет построить главный член асимптотического решения уравнения (1.11) рассматриваемых задач при малых значениях параметра λ. Основная трудность заключается в проведении факторизации функции

$$L_\varepsilon(u) = \frac{u\left(\sqrt{u^2+\varepsilon^2}+\sigma+1\right)}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}\left(\sqrt{u^2+\varepsilon^2}+1\right)} = L_+(u)\,L_-(u) \quad (\varepsilon\to 0)$$

Далее ограничимся построением лишь «вырожденного» решения, пригодного для случая очень малых λ.

Заметим, что при больших t для ядра $K(t)$ вида (1.11) имеет место асимптотическое представление

$$K(t) \sim (1+\sigma)\,t^{-1}$$

и вырожденное при очень малых λ решение задач будет определяться уравнением

$$\int_{-a}^{a}\frac{p(\xi)}{\xi - x}\,d\xi = \pi\theta_{12}^*\left[\varepsilon - \psi'(x)\right] \quad (|x|\leqslant a)$$

где соответственно для первой и второй задач

$$\theta_{12} = \frac{\theta_1\theta_2}{\theta_2 + D\theta_1}, \quad \theta_{12}^* = \frac{\theta_1\theta_2}{\theta_1+\theta_2}$$

Тогда решения задач при очень малых λ будут по-прежнему определяться формулами (3.21) — (3.25) и (3.5), (3.7), (3.9), где $g(x)\equiv 0$, и величина θ_{12} или θ_1 заменена на соответствующее выражение θ_{12}^*.

Поступила 4 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александрова Г. П.* О влиянии сил поверхностного натяжения на контактную жесткость. В сб.: Расчет оболочек и пластин. Тр. Ростовск.-н/Д инж.-строит. ин-та, 1975.
2. *Белоконь А. В., Грунтфест Р. А.* Движение параболического контура по поверхности тяжелой идеальной жидкости конечной глубины. ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
4. *Александров В. М.* О плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления или трения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
5. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., «Наука», 1977.
6. *Александров В. М.* Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
7. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
8. *Arutiunyan N. K., Mkhitaryan S. M.* Some contact problems for a semi-plane with elastic stiffeners. In: Trends in elasticity and thermoelasticity. Groningen, 1971.
9. *Александров В. М., Солодовник М. Д.* Эффективный метод решения задачи о взаимодействии накладки (стрингера) с упругой полуплоскостью и некоторые новые качественные результаты. Тр. X Всес. конф. по теории оболочек и пластин, т. 1. Тбилиси, «Мецниереба», 1975.