Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.3 : 62—50

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О КОНТАКТЕ НЕСКОЛЬКИХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ КАК ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А. С. Кравчук

(Москва)

Дается новая постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел, доказывается ее эквивалентность задаче выпуклого программирования. На основании известных результатов устанавливаются теоремы о существовании и единственности решения для случая линейной теории упругости и деформационной теории пластичности без разгрузок. Устанавливаются ограничения на внешние воздействия, обеспечивающие существование решения при отсутствии закрепленной части границы и дается их механическая интерпретация.

Работа служит продолжением и развитием исследования [1].

Применяется метод Синьорини [2], представляющий собой, по существу, принцип возможных перемещений Лагранжа при наличии односторонних связей. Из большого количества работ, посвященных задаче Синьорини и ее обобщениям, отметим [3–6].

Развиваемая ниже постановка позволяет применить для решения контактной задачи численные методы современной теории оптимизации (нелинейного программирования). Численное решение некоторых конкретных контактных задач дано в работах [7–10]; отметим, однако, что деформируемость штампа в работе [7] учитывалась на основании модели Винклера и ее обобщений (аналогичная идея применена в работе [8]), метод решения задач в работах [9,10] — это метод прямого поиска без анализа условий существования и единственности решения.

1. Постановка задачи. Пусть имеется несколько твердых деформируемых тел конечных размеров, занимающих области $\Omega^1, \ldots, \Omega^M$ с границами $S^1 = \partial\Omega^1, \ldots, S^M = \partial\Omega^M$. Будем предполагать, что в недеформированном состоянии тела соприкасаются в точках или по кускам поверхностей, форма и размеры которых определяются из геометрических соображений.

Для упрощения обозначений всюду ниже (где это возможно) условимся, говоря о конкретном теле и относящихся к нему параметрах, индекс (номер тела) опускать; если речь будет идти о двух соприкасающихся телах, индекс, определяющий номер одного из тел, будем опускать, номер второго тела будем заменять штрихом.

Итак, пусть граница S одного из тел состоит из трех кусков: $S = S_u \cup S_\sigma \cup S_c$; будем предполагать, что на S_u и S_σ заданы условия классического типа

$$u(r) = g(r), \quad r \in S_u \tag{1.1}$$

$$\sigma_{ij}(u)\nu_j = P_i(r), \quad r \in S_\sigma$$

Здесь r — радиус-векторы точек Ω по отношению к системе координат, общей для всех тел; $u(r)$ — вектор перемещения точки r; $\sigma_{ij}(u)$ — компоненты тензора напряжений, связанные с вектором $u = u(r)$ при помощи уравнения состояния, вид которого пока фиксировать не будем; ν_j — компоненты вектора единичной нормали к S, внешней к Ω; $g(r)$ — заданные на S_u перемещения, ниже для простоты предполагаемые нулевыми; P — заданные на S_σ поверхностные усилия; повторяющиеся латинские индексы означают суммирование от единицы до $n = 2,3$.

Примем гипотезу о том, что форма и размеры предельных зон контакта, по которым тело Ω может соприкоснуться с другими телами, могут быть указаны из геометрических и физических соображений, совокупность этих зон обозначим через S_c. Подчеркнем, что предполагаются известными лишь предельные размеры зон контакта, фактические же площадки соприкосновения подлежат определению в процессе решения задачи.

Предположим также, что $\partial S_c = S_c \cap S_\sigma$; эта гипотеза используется при математическом обосновании и в технических приложениях обычно выполняется.

Плотность объемных сил, действующих на тело Ω, обозначим через ρF, тогда в общем случае проблема состоит в определении напряженно-деформированного состояния каждого из тел Ω при воздействии на систему этих тел поверхностных и объемных усилий с плотностями P^1, $\rho F^1, \ldots$, P^M, ρF^M, а также формы и размеров зон контакта и распределенного по этим зонам контактного давления. В такой общей постановке задача может вовсе не иметь решения, а если решение существует, то оно может оказаться неединственным. Ниже теоремы существования и единственности будут установлены для случая линейной теории упругости и деформационной теории пластичности без разгрузок.

2. Анализ граничных условий в зоне контакта. Рассмотрим два соприкасающихся тела Ω и Ω' и обозначим через S_c, S_c' предельно-возможные зоны контакта; будем предполагать, что формы поверхностей S_c и S_c' различаются не очень сильно (более точный смысл данной гипотезы выяснится ниже). Уравнения, описывающие поверхности S_c и S_c', примем в форме

$$\Psi(r) = 0, \quad \Psi'(r') = 0 \tag{2.1}$$

где r, r' — радиус-векторы точек поверхностей S_c и S_c'.

Выберем функции Ψ, Ψ' таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\Psi(r) > 0, \quad \text{если } r \notin \Omega, \ \Psi(r) < 0 \text{ при } r \in \Omega \tag{2.2}$$

(для функции Ψ' условия аналогичны).

В результате деформации тел Ω и Ω' поверхности S_c и S_c' изменяются; докажем, что в первом приближении искажение формы границы тела определяется нормальными (вдоль нормали) перемещениями частиц, лежащих на границе. Рассмотрим для определенности тело Ω; пусть r_0 — радиус-векторы частиц S_c до деформации, r — радиус-векторы тех же частиц после деформации; имеем

$$r = r_0 + u(r_0) \tag{2.3}$$

Из (2.1) и (2.3) следует, что

$$\Psi\,(r - u\,(r_0)) = 0 \tag{2.4}$$

Принимая те же гипотезы огладкости Ψ, что и в работе [1], линеаризуем (дважды) зависимость (2.4) по u

$$\varphi\,(r,\ r_0) - u_{\nu n}\,(r_0) = 0 \tag{2.5}$$

Здесь введены обозначения

$$\varphi\,(r,\ r_0) = \Psi\,(r) \,/\, |\operatorname{grad}\Psi\,(r_0)|, \quad u_{\nu n} = u\nu \tag{2.6}$$
$$\nu\,(r) = \operatorname{grad}\ \Psi\,(r) \,/\, |\operatorname{grad}\ \Psi\,(r)|$$

Зависимость (2.5) означает, что в первом приближении форма деформированной границы определяется нормальными перемещениями лежащих на ней частиц.

Получим теперь краевые условия на S_c, S_c' в первом приближении. Пусть r_0' — радиус-векторы точек S_c' до деформации; в результате деформации, определяемой полем перемещений u', эти точки займут положение

$$r^* = r_0' + u_{\nu n}'\,(r'_0)\nu'\,(r'_0) \equiv r_0' + u_{\nu b}'\,(r_0') \tag{2.7}$$

Опустим из точки r^* перпендикуляр на поверхность S_c; радиус-вектор точки пересечения этого перпендикуляра с S_c обозначим через r_{00}. Имеет место неравенство

$$u_{\nu n}\,(r_{00}) \leqslant \delta^* \equiv (r^* - r_{00})\ \nu\,(r_{00}) \tag{2.8}$$

Очевидно, $r_{00} = r_{00}\,(r_0',\ u_{\nu b}')$; цель дальнейших рассуждений состоит в линеаризации этой зависимости, а также условия (2.8) по нормальным перемещениям и по величине зазора $|r_0' - r_0|$, где r_0 — радиус-вектор точки пересечения перпендикуляра, проведенного из точки r_0' к поверхности S_c, с поверхностью S_c.

В формуле (2.8) можно, с принятой точностью, заменить r_{00} на r_0. В самом деле, нетрудно подсчитать, используя предположение об ограниченности вторых производных от Ψ, что

$$(r^* - r_{00})\nu\,(r_{00}) - (r^* - r_0)\ \nu\,(r_0) = O\,(|\,r_0 - r_{00}\,|^2 + \tag{2.9}$$
$$+ (r_0 - r_{00})\,(r_0' - r_0 + u'_{\nu b}\,(r_0'))$$

Производя указанные преобразования, из условия (2.8) получим неравенство

$$(u'_{\nu b}\,(r_0') + r_0' - r_0)\ \nu\,(r_0) - u_{\nu n}\,(r_{00}) \geqslant 0 \tag{2.10}$$
$$\forall\ r_0 \in S_c, \quad r_0' = r_0'\,(r_0)$$

Замена $u_{\nu n}\,(r_{00})$ на $u_{\nu n}\,(r_0)$ законна лишь при дополнительном предположении о малости деформаций (первых производных от перемещений), что в случае геометрически линейных теорий, которыми здесь и ограничимся, справедливо.

Зависимость $r_0'\,(r_0)$ определяется из формулы $r_0' = r_0 + t_0 \operatorname{grad}\ \Psi\,(r_0)$, где t_0 находится из уравнения

$$\Psi'\,(r_0 + t\operatorname{grad}\ \Psi\,(r_0)) = 0 \tag{2.11}$$

Следуя общей методике, заменим уравнение (2.11) уравнением, линеаризованным по t, решив которое, найдем

(2.12) $$r_0'(r_0) = r_0 - \varphi'(r_0, r_0)\,\nu(r_0)/(\nu'(r_0)\,\nu(r_0))$$

Меняя ролями тела Ω и Ω', получим

(2.13) $$(u_{\nu b}(r_0(r_0')) + r_0(r_0') - r'_0 - u_{\nu b}'(r_0'))\,\nu'(r_0') \geqslant 0$$

Будем предполагать, что скалярное произведение разности векторов единичных нормалей к S_c и S_c' на вектор перемещения и векторы начального зазора $r_0'(r_0) - r_0$, $r_0(r_0') - r_0'$ имеет второй порядок малости по отношению к нормальным перемещениям точек поверхностей S_c и S_c' и величине начального зазора между телами, тогда условия (2.10), (2.13) формально сводятся к одному

(2.14) $$u_{\nu n} + u_{\nu n}' \leqslant \delta$$

При решении конкретных задач можно пользоваться первой из форм условия (2.14), когда независимой переменной является $r_0 \in S_c$, $\delta \doteq (r_0'(r_0) - r_0)\,\nu(r_0)$, или же второй возможной формой этого условия, когда независимая переменная — $r_0' \in S_c'$, $\delta = (r_0(r_0') - r_0')\,\nu'(r_0')$; различие в результатах будет иметь второй порядок малости по отношению к величине начального зазора и нормальных перемещений точек границы.

3. Приведение задачи к вариационному неравенству. Рассмотрим сначала случай, когда тела — линейно-упругие, связь напряжений с деформациями для тела Ω запишем в форме

(3.1) $$\sigma_{ij}(u) = a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u)$$

где a_{ijkh} — тензор модулей упругости, обладающий обычными свойствами симметрии и положительной определенности и зависящий, вообще говоря, от точек области Ω. Компоненты тензора деформации ε_{ij} связаны с вектором перемещений формулами Коши $\varepsilon_{ij} = {}^1/_2\,(u_{i,j} + u_{j,i})$.

Будем предполагать, что

(3.2) $$a_{ijkh} \in L^\infty(\Omega), \quad \rho F \in L^2(\Omega)$$
$$P_i \in L^2(\Omega), \quad u_i \in L^2(\Omega), \quad \varepsilon_{ij}(u) \in L^2(\Omega)$$

тогда все преобразования, проводимые ниже, будут законны. Введем функциональное пространство

(3.3) $$V_* = \{v \mid v = v(r),\ r \in \Omega;\ v(r) = 0,\ r \in S_u;\ v \in H^1(\Omega)\}$$

где H^1 — пространство С. Л. Соболева функций, обладающих обобщенными суммируемыми с квадратом первыми производными.

В дифференциальной форме постановка задачи имеет вид

(3.4) $$-\frac{\partial}{\partial x_j}[a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u)] = \rho F_i$$

Предполагается, что выполнены условия (1.1) и, кроме того,

(3.5) $$u_{\nu n} + u_{\nu n}' < \delta \Rightarrow \sigma_{ij}(u)\,\nu_j = 0, \quad u_{\nu n} + u_{\nu n}' = \delta \Rightarrow \sigma_\nu \leqslant 0, \quad \sigma_T = 0$$

(3.6) $$\sigma_\nu(u(r_0)) = \sigma_\nu(u'(r(r_0)))$$
$$(\sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_i\nu_j, \quad (\sigma_T)_i = \sigma_{ij}\nu_j - \sigma_\nu\nu_i)$$

В формулах (3.5), (3.6) $r_0 \in S_c^\alpha$, $r = r^\beta(r_0)$ определяется в соответствии с (2.12); индекс β зависит от α и равен номеру того тела Ω, с которым соприкасается Ω^α по данному куску поверхности S_c.

Умножим каждое из уравнений (3.4) на v_i, где v — произвольный элемент пространства V_*, сложим получившиеся результаты и проинтегрируем по области Ω. Применив формулу Гаусса — Остроградского и использовав условия (1.1), найдем

$$a_*(u, v) = L_*(v) + \int_{S_c} \sigma_{ij}(u) v_i \nu_j \, dS \tag{3.7}$$

$$a_*(u, v) = \int_\Omega a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) \varepsilon_{ij}(v) \, d\Omega$$

$$L_*(v) = \int_\Omega \rho F v \, d\Omega + \int_{S_\sigma} P v \, dS$$

Положим в (3.7) $v = u$ и вычтем получившееся выражение из (3.6); с использованием введенных обозначений получим

$$a_*(u, v-u) = L_*(v-u) + \int_{S_c} \sigma_{ij}(u)(v_i - u_i)\nu_j \, dS \tag{3.8}$$

Обозначим через V прямое произведение введенных выше пространств V_*, т. е.

$$V = V_*^1 \otimes \ldots \otimes V_*^M$$

В пространстве V введем подмножество функций K по формуле (v — произвольный элемент V)

$$K = \{v \mid v \in V;\ v_{\nu n}^\alpha + v_{\nu n}^\beta \leqslant \delta\} \tag{3.9}$$

Индексы α и β определяют номера тел, соприкасающихся по кускам своих границ. Суммируя все равенства (3.8), найдем (здесь и ниже суммирование ведется по всем номерам тел)

$$a(u, v-u) = L(v-u) + \sum \int_{S_c} \sigma_{ij}(u)(v_i - u_i)\nu_j \, dS \tag{3.10}$$

$$\left(a(u, v) = \sum a_*(u, v),\ L(v) = \sum L_*(v)\right)$$

Разобьем последнюю сумму в (3.10) на пары слагаемых, каждая из которых соответствует паре соприкасающихся поверхностей S_c и S_c', и рассмотрим подробно одну из этих пар

$$\int_{S_c} \sigma_{ij}(u)(v_i - u_i)\nu_j \, dS + \int_{S_c'} \sigma_{ij}(u')(v_i' - u_i')\nu_j' \, dS \tag{3.11}$$

Заметим, прежде всего, что

$$\sigma_{ij}(u)(v_i - u_i)\nu_j = \sigma_\nu(u)(v_{\nu n} - u_{\nu n}) + \sigma_T(u)(v_T - u_T) \tag{3.12}$$

где $v_{\nu n}$ — нормальная компонента вектора v (проекция на нормаль ν), v_T — проекция v на касательную плоскость. В силу условий (3.5), (3.6) второе слагаемое в формуле (3.12) равно нулю. Вспомним теперь, что по предположению $\nu \simeq -\nu'$, $\sigma_\nu = \sigma_\nu'$ и что различием между поверхностями при вычислении поверхностных интегралов в геометрически линейной теории можно пренебречь. Из всего сказанного вытекает, что выражение (3.11) имеет форму

$$\int\limits_{S_c} \sigma_\nu (v_{\nu n} + v'_{\nu n} - u_{\nu n} - u'_{\nu n})\, dS \tag{3.13}$$

По предположению, $u = (u^1(r^1), \ldots, u^M(r^M))$ — решение задачи (3.4) — (3.6), (1.1), следовательно, $u \in K$. Пусть теперь $v = (v^1(r^1), \ldots, v^M(r^M))$ в (3.10), (3.12) принадлежит K, тогда

$$v_{\nu n} + v'_{\nu n} \leqslant \delta$$

и, следовательно, в силу уравнений (3.5), (3.6) подынтегральное выражение в (3.13) неотрицательно.

Таким образом, решение исходной задачи (1.1), (3.4) — (3.6) удовлетворяет вариационному неравенству, вытекающему из равенства (3.10) и неотрицательности пар слагаемых (3.11)

$$a(u, v - u) \geqslant L(v - u), \quad \forall v \in K, u \in K \tag{3.14}$$

Имеет место теорема: решение вариационного неравенства (3.14), если оно существует и обладает вторыми производными (хотя бы обобщенными), удовлетворяет всем уравнениям и условиям (1.1), (3.4) — (3.6).

Вывод уравнений (3.4), второго условия (1.1) и (3.5) по существу ничем не отличается от вывода аналогичных условий и уравнений работы [6]. Новое, по сравнению с задачей работы [6], условие (3.6) вытекает из неравенства (3.14), уравнений (3.4) и условий (1.1), (3.5) при надлежащем выборе компонент элемента $v = (v^1, \ldots, v^M)$; ввиду простоты этих преобразований процедуру вывода условия (3.6) приводить не будем.

Замечание. Все рассуждения проходят с небольшими несущественными изменениями и для случая деформационной теории пластичности без разгрузок (физически нелинейной теории упругости), в которой связь напряжений с деформациями имеет форму [11]

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - 2\mu\omega(e_u)\, e_{ij} \tag{3.15}$$

где λ и μ — параметры Ламе; ограничения на функцию $\omega(e_u)$ указаны в работах [1,6].

Вариационное неравенство в данном случае имеет вид

$$a(u, v - u) - Dj(u, v - u) \geqslant L(v - u) \tag{3.16}$$

$$Dj(u, v - u) = 2\mu \sum \int\limits_{\Omega} \omega(e_u(u))\, e_{ij}(v - u)\, e_{ij}(v)\, d\Omega$$

где $a(u, v)$ и $L(v)$ определяются по-прежнему формулами, приведенными в скобках в (3.10); буквой D обозначена производная Гато функционала $j(v)$ в точке u по направлению $v - u$.

4. Приведение проблемы к минимизации функционала. Предположим сначала, что все $S_u \neq \phi$, тогда из неравенства Корна для каждой из форм $a_*(u, v)$ следует положительная определенность билинейной формы $a(u, v)$ на V

$$a(v, v) \geqslant c\, \| v \|^2, \quad \forall v \in V,\ c = \text{const} > 0$$

При сформулированных выше ограничениях на ρF, P форма $L(v)$ непрерывна на V. Симметрия и непрерывность формы $a(u, v)$ на V очевидна.

Можно проверить, что множество K, определенное по формуле (3.9), выпукло в V; замкнутость этого множества вытекает из теоремы Лионса о следах [12]. Таким образом, имеет место теорема, являющаяся следствием более общих результатов [13,14]:

Теорема 4.1. Решение вариационного неравенства (3.14) эквивалентно проблеме минимизации функционала

$$J(v) = {}^1/_2\, a(v, v) - L(v)$$

на подмножестве K пространства V.

Используя результаты работ [1,6], можно доказать, что имеет место

Теорема 4.2. Решение вариационного неравенства (3.16) эквивалентно проблеме минимизации функционала

$$J(v) = {}^1/_2\, a(v, v) - L(v) - j(v)$$

на подмножестве K пространства V.

Вводя в рассмотрение пространства, смежные к V по подмножествам жестких смещений, как это сделано в [15], можно установить аналогичные теоремы и для случая, когда некоторые из тел Ω или все они не имеют закрепленных участков границы. При реализации этой процедуры возникают трудности, связанные с установлением дополнительных ограничений на ρF, P; более простой путь (который и будет использован) состоит в непосредственном использовании вариационных неравенств (3.14), (3.16) и относящихся к этим неравенствам теорем, установленным в работе [16].

5. **Теоремы существования и единственности.** Заметим, прежде всего, что в условиях п. 4 существование и единственность решения вытекают из более общих результатов, которые можно найти в монографиях [13, 14]. Рассмотрим поэтому случай, когда для всех $\alpha = 1, \ldots, M$ $S_u^\alpha = \varnothing$. Будем использовать следующую теорему [16].

Теорема Лионса — Стампаккья. Пусть выполнены условия:

1) билинейная на V форма $a(u, v)$ непрерывна

$$|a(u, v)| \leqslant c\|u\|\|v\|, \quad \forall u \in V, \quad v \in V \tag{5.1}$$

2) норма на V эквивалентна норме $p_0(v) + p_1(v)$, где $p_0(v)$ — норма на V, по отношению к которой пространство V предгильбертово, $p_1(v)$ — полунорма на V;

3) пространство

$$Y = \{v \in V \mid p_1(v) = 0\} \tag{5.2}$$

конечномерно;

4) существует постоянная c_1, такая, что

$$\inf_y p_0(v - y) \leqslant c_1 p_1(v) \tag{5.3}$$

5) форма $a(u, v)$ полукоэрцитивна, т. е.

$$a(v, v) > c_2 p_1^2(v), \quad \forall v \in V, \quad c_2 = \text{const} > 0 \tag{5.4}$$

6) множество K замкнуто и выпукло в V и содержит точку $\{0\}$ (нулевой элемент пространства V);

7) форма $L(v)$ линейна и непрерывна на V, причем

$$L(y) < 0, \quad \forall y \in Y \cap K \tag{5.5}$$

Тогда вариационное неравенство (3.14) имеет по крайней мере одно решение.

Проверим, что все условия сформулированной теоремы в исследуемой проблеме выполнены. Заметим, что в качестве нормы в V можно выбрать

$$\|v\|_V^2 = \sum \int_\Omega [v_i v_i + \varepsilon_{ij}(v)\,\varepsilon_{ij}(v)]\,d\Omega \tag{5.6}$$

Из неравенства Корна, справедливого для каждого из тел Ω, следует эквивалентность нормы (5.6), использованной выше нормы прямого произведения. Положим

$$p_0^2(v) = \sum \int_\Omega v_i v_i d\Omega, \quad p_1^2(v) = \sum \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\,\varepsilon_{ij}(v)\,d\Omega \tag{5.7}$$

Очевидно, $p_0(v)$ — норма в L_2; по отношению к этой норме H^1, а следовательно и V, является предгильбертовым. Квадратичная форма $p_1^2(v)$ — полунорма на V, так как $\varepsilon_{ij}(y) = 0$, где y — смещение тела Ω как абсолютно жесткого. Пространство Y, определенное формулой (5.2), конечномерно, поскольку оно представляет собой прямое произведение конечномерных пространств вида

$$Y^\alpha = \{y^\alpha \mid y^\alpha = a + b \times r^\alpha, \quad a = \text{const}, \ b = \text{const}\} \tag{5.8}$$

Выполнение неравенства (5.3) проверяется методом от противного. Полукоэрцитивность формы $a(u, v)$ в смысле (5.4) является следствием неравенства Корна для каждого из тел Ω. Условие 6) теоремы было установлено выше.

Рассмотрим подробнее ограничение (5.5) и выясним его физический смысл. Заметим, что (5.5) в действительности имеет вид

$$L(y) < 0, \quad \forall y \in Y \cap K \setminus G \tag{5.9}$$

где G — смещение системы тел $\Omega^1, \ldots, \Omega^M$ как единого жесткого целого. В самом деле, имеют место следующие равенства:

$$\sum \left[\int_\Omega \rho F d\Omega + \int_{S_\sigma} P dS\right] = 0 \tag{5.10}$$

$$\sum \left[\int_\Omega r \times \rho F d\Omega + \int_{S_\sigma} r \times P dS\right] = 0$$

представляющие собой условия равновесия системы тел $\{\Omega\}$ в целом. Подставляя в (5.5) вместо $y = (y^1, \ldots, y^M)$ выражения для y^α по формуле (5.8) и использовав при этом (5.10), приходим к (5.9).

Теперь нетрудно дать механическую трактовку условия (5.9): работа внешних сил на смещении каждого из тел Ω как жесткого целого из состояния, в котором это тело находилось до деформации, строго отрицательна, т. е. условие (5.9) — условие устойчивости системы тел $\{\Omega\}$ до деформации.

Естественно, что в результате деформации состояние системы тел $\{\Omega\}$ может оказаться неустойчивым; предполагая существование решения (множества решений U) поставленной проблемы и определив множество Z по формуле

$$Z = \{y \mid y \in Y;\ u + y \in K,\ \forall u \in U\}$$

найдем из вариационного неравенства (3.14) и условий (5.10), что

$$L(y) \leqslant 0, \quad \forall y \in Z \setminus G \tag{5.11}$$

Условие (5.11) означает, что после деформации система тел $\{\Omega\}$ оказалась в состоянии равновесия, являющемся устойчивым или безразличным.

Множества $Y \cap K$ и Z, вообще говоря, не совпадают, так как из условия $u + y \in K$ вовсе не следует, что $y \in K$.

Таким образом, можно сказать, что условие (5.9), представляющее собой небольшое обобщение «сильной гипотезы Синьорини» [3, 4], предполагает фиксацию взаимного положения тел $\{\Omega\}$ до деформации; условие же (5.11) фиксирует взаимное положение тел $\{\Omega\}$ после деформации и является следствием нелинейности рассматриваемой задачи.

На основании теоремы Лионса — Стампаккья заключаем, что существует по крайней мере одно решение поставленной задачи, разность двух решений принадлежит множеству смещений системы тел как жесткого целого.

Результаты п. 5 о существовании и единственности решения переносятся без изменений на случай деформационной теории пластичности (3.15); при этом вместо теоремы Лионса — Стампаккья необходимо использовать более общую теорему Минти — Браудера о монотонных операторах [17, 18], выполнение условий которой следует из результатов, изложенных в [6] и п. 5 данной работы.

Поступила 3 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кравчук А. С.* К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров. Докл. АН СССР, 1976, т. 230, № 2.
2. *Signorini A.* Sopra alcune questioni di elastostatica. Atti Soc. Ital. Progresso (delle Scienze), 1933.
3. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М., «Мир», 1974.
4. *Duvaut G., Lions J.-L.* Les inequations en mécanique et en physique. Paris, Dunod, 1972.
5. *Frêmond M.* Solid resting on a stratified medium. Proc. Conf. Variat. Method in Engng, 1972, vol. 2. Southampton Univ. Press, 1973.
6. *Кравчук А. С.* К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров. ПММ, 1977, т. 41, вып. 2.
7. *Panagiotopoulos P. D.* A Non-linear Programming Approach to the Unilateral Contact- and Friction-boundary Value Problem in the Theory of Elasticity. Ingr-Arch., 1975, Bd 44, H. 6.
8. *Fischer F. D.* Zür Losung der Kontaktproblems elastischer Körper mit ausgedehnter Kontaktflache durch quadratische Programierung. Computing, 1974, Bd 13, Nr 3—4.
9. *Francavilla A., Zienkiewicz O. C.* A note on numerical compylation of elastic contact problems. Internat. J. Numerical Methods in Engng, 1975, vol. 9, No. 4.
10. *Шевченко Ю. А.* Применение метода конечных элементов к решению контактной задачи теории упругости с переменной зоной контакта без трения. Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 6.
11. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.— Л., Гостехиздат, 1948.
12. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., «Мир», 1971.
13. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М., «Наука», 1972.
14. *Сеа Ж.* Оптимизация. Теория и алгоритмы. М., «Мир», 1973.
15. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
16. *Lions J.-L., Stampacchia G.* Variational inequalities. Communs Pure and Appl. Math., 1967, vol. 20, No. 3.
17. *Browder F. E.* Non-linear elliptic boundary value problems. Bull. Amer. Math. Soc., 1963, vol. 69, No. 6.
18. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., «Мир», 1972.