Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.3 : 534.1

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В. С. Колесов, Ю. С. Колесов, А. Н. Куликов, И. И. Федик

(Москва, Ярославль)

Рассмотрена задача о бифуркации автоколебаний из состояния равновесия для нелинейных дифференциальных уравнений гиперболического типа. Проделан общий качественный анализ и приведены формулы для расчета параметров периодических решений.

Во многих неконсервативных задачах теории упругой устойчивости (см., например, [1–3]) потеря устойчивости происходит за счет того, что пара комплексно-сопряженных собственных значений, принадлежащих спектру устойчивости линеаризованной задачи, при изменении некоторых параметров пересекает мнимую ось и переходит в правую полуплоскость комплексной плоскости. В этом случае анализ соответствующей механической задачи в нелинейной постановке позволяет выявить мягкий или жесткий характер потери устойчивости. Одна из наиболее известных таких задач — нелинейный «панельный флаттер» при сверхзвуковых скоростях, моделируемый при помощи закона плоских сечений [4]. Используемые в последней задаче математические методы сводятся к замене нелинейных уравнений с частными производными их галеркинскими приближениями с последующим применением метода малого параметра или метода гармонического баланса. Как показано в [5], получающиеся на этом пути результаты часто далеки от истинных.

Ниже предлагается строгий метод исследования соответствующих нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. Используемый при этом математический аппарат представляет собой сочетание метода интегральных многообразий с методикой, развитой в [6]. В чистом виде здесь метод интегральных многообразий неприменим. Это связано со спецификой уравнений гиперболического типа, свойства решений которых не могут обеспечить нужную гладкость инвариантной поверхности [7]. Отметим, что решаемая ниже задача фактически поставлена В. В. Болотиным (см. [1], стр. 333).

1. Описание рассматриваемого класса дифференциальных уравнений. Ниже E — вещественное банахово пространство, R^m — евклидово m-мерное пространство. В E рассмотрим уравнение

$$x^{\cdot\cdot} + A(\varepsilon)x^{\cdot} + [B^2 + C(\varepsilon)]x = f(x,\ x^{\cdot};\ \varepsilon,\ \mu) \tag{1.1}$$

зависящее от числового параметра ε и векторного параметра $\mu \in R^m$. В дальнейшем предполагается, что

$$|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0, \quad \|\mu\|_{R^m} \leqslant \mu_0 \tag{1.2}$$

где ε_0 и μ_0 достаточно малы. Опишем ограничения, накладываемые на коэффициенты уравнения (1.1). Сначала остановимся на тех из них, которые относятся к линейной части

$$x^{\cdot\cdot} + A(\varepsilon)x^{\cdot} + [B^2 + C(\varepsilon)]x = 0 \tag{1.3}$$

Будем предполагать, что B — замкнутый линейный неограниченный оператор с плотной в E областью определения $D(B)$, iB — производящий оператор группы класса (C_0) в комплексном расширении E и B имеет в E непрерывный обратный B^{-1}. Далее будем предполагать, что $\| C(\varepsilon)B^{-1}\|_E \leqslant \leqslant \mathrm{const}$ и операторы $C(\varepsilon)B^{-1}$ и $A(\varepsilon)$ аналитически зависят от ε в метрике линейных операторов, действующих из E в E. Последнее ограничение, касающееся (1.3), заключается в следующем. Введем в рассмотрение квадратичный пучок

$$L(\lambda; \varepsilon) = \lambda^2 I + \lambda A(\varepsilon) + B^2 + C(\varepsilon) \tag{1.4}$$

где I — единичный оператор. Его точки спектра назовем спектром устойчивости, считая, что характер их расположения определяет поведение решений уравнения (1.3). Будем считать, что ему принадлежат два простых собственных значения $\lambda(\varepsilon) = \tau(\varepsilon) + i\sigma(\varepsilon)$, $\bar{\lambda}(\varepsilon) = \tau(\varepsilon) - i\sigma(\varepsilon)$, которые, очевидно, аналитически зависят от ε и для которых будем считать выполненными условия

$$\tau(0) = 0, \quad \sigma_0 = \sigma(0) > 0, \quad \tau_0' = \frac{d}{d\varepsilon}\tau(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} \neq 0$$

Относительно остальных точек спектра устойчивости будем предполагать, что они расположены в части комплексной плоскости, выделяемой неравенством $\mathrm{Re}\,\lambda \leqslant -\gamma_0 < 0$.

Перейдем к описанию ограничений, накладываемых на правую часть (1.1). С этой целью введем в рассмотрение пространства $E(B)$ и $E(B^2)$, состоящие из элементов $x \in D(B)$ и $x \in D(B^2)$ соответственно и нормированные следующим образом:

$$\| x\|_{E(B)} = \| Bx\|_E, \quad \| x\|_{E(B^2)} = \| B^2x\|_E$$

Будем предполагать, что оператор $f(x, y; \varepsilon, \mu)$ действует из некоторого шара достаточно малого радиуса пространства $E(B) \times E(B) \times R^{m+1}$ в E и аналитичен по совокупности переменных, причем по переменным x и y в нуле он имеет порядок малости выше первого. Будем предполагать, что производная Фреше $f(x, y; \varepsilon, \mu)$ по y допускает расширение до непрерывного линейного оператора $D_y f(x, y; \varepsilon, \mu)$, действующего из E в E, причем это расширение сильно непрерывно зависит от ε и μ, а по переменным x и y, принадлежащим некоторому шару пространства $E(B) \times E(B)$, удовлетворяет условию Липшица с универсальной постоянной N_0

$$\begin{aligned} \| D_y f(x_1, y_1; \varepsilon, \mu) - D_y f(x_2, y_2; \varepsilon, \mu)\|_{E\to E} &\leqslant \\ \leqslant N_0 [\| x_1 - x_2\|_{E(B)} + \| y_1 - y_2\|_{E(B)}] \end{aligned} \tag{1.5}$$

Последнее ограничение состоит в следующем. Будем предполагать, что оператор $f(x, y; \varepsilon, \mu)$ при значениях параметров ε и μ, удовлетворяющих неравенствам (1.2), и при каждом достаточно малом $\delta > 0$ допускает такое распространение $f_\delta(x, y; \varepsilon, \mu)$ с элементов

$$\| x\|_{E(B)} \leqslant \delta, \quad \| y\|_{E(B)} \leqslant \delta \tag{1.6}$$

на все элементы $E(B) \times E(B)$, что

$$f_\delta(x, y; \varepsilon, \mu) \equiv f(x, y; \varepsilon, \mu)$$

при x и y, удовлетворяющих неравенствам (1.6), что при произвольных x и y из $E(B) \times E(B)$ оператор $f_\delta(x, y; \varepsilon, \mu)$ обладает всеми свойствами оператора $f(x, y; \varepsilon, \mu)$ с заменой аналитичности на бесконечную дифференцируемость, что выполнено неравенство (1.5) с некоторой постоянной N_δ, общей для всех элементов из $E(B) \times E(B)$, и что на всех элементах пространства $E(B) \times E(B)$

$$\| f_\delta(x_1, y_1; \varepsilon, \mu) - f_\delta(x_2, y_2; \varepsilon, \mu) \|_E \leqslant$$
$$\leqslant q(\delta)\, [\| x_1 - x_2 \|_{E(B)} + \| y_1 - y_2 \|_{E(B)}]$$

где функция $q(\delta)$ монотонно убывает до нуля при $\delta \to 0$.

2. Постановка задачи. Как обычно функцию

$$x(t) \in C^2([-T, T], E) \cap C^1([-T, T], E(B)) \cap C([-T, T], E(B^2))$$

которая при $-T \leqslant t \leqslant T$ обращает (1.1) в тождество и которая при $t = 0$ удовлетворяет начальным условиям $x(0) = x_0 \in E(B^2)$, $x^\cdot(0) = x_0^\cdot \in E(B)$, будем называть решением задачи Коши. Обозначим через $S(r)$ шар радиуса $r > 0$ с центром в нуле пространства $E(B^2) \times E(B)$. Из результатов работы [8] вытекает, что по любому $T > 0$ можно указать такой шар $S[r(T)]$ радиуса $r(T) > 0$, с начальными условиями из которого однозначно разрешима задача Коши для (1.1). Рассмотрим вопрос о нелокальной продолжимости решений этого уравнения с начальными условиями из некоторого фиксированного шара $S(r_0)$ и вопрос о поведении при $t \to \infty$ тех его решений, которые при всех $t \geqslant 0$ принадлежат этому шару. Такие решения наиболее важны для приложений, так как, вообще говоря, достаточно большие по норме решения физически не реализуемы: при соответствующих значениях t происходит разрушение системы.

3. Основные результаты. Сначала введем ряд обозначений и понятий. В дальнейшем $e_0 = e_1 + ie_2$ — собственный элемент операторного пучка $L(\lambda; 0)$, отвечающий собственному значению $i\sigma_0$, $h_0 = h_1 + ih_2$ — линейный функционал, являющийся собственным элементом сопряженного операторного пучка

$$L^*(\lambda; 0) = \lambda^2 I - \lambda A^*(0) + B^{*2} + C^*(0)$$

который соответствует тому же собственному значению. Как известно, можно считать, что

$$(h_j, e_k) = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2) \tag{3.1}$$

где δ_{jk} — символ Кронекера. В (3.1) через (a, b) обозначено значение функционала a на элементе b. Используя e_0 и h_0, введем в рассмотрение функции

$$E_1(t) = e_1 \cos \sigma_0 t - e_2 \sin \sigma_0 t, \quad E_2(t) = e_1 \sin \sigma_0 t + e_2 \cos \sigma_0 t$$
$$H_1(t) = h_1 \cos \sigma_0 t - h_2 \sin \sigma_0 t, \quad H_2(t) = h_1 \sin \sigma_0 t + h_2 \cos \sigma_0 t$$

которые потребуются при рассмотрении вопроса о существовании $2\pi/\sigma_0$-

периодических решений у неоднородного уравнения

$$x^{\cdot\cdot} + A(0)\,x^{\cdot} + [B^2 + C(0)]x = f(t) \qquad (f(t + 2\pi/\sigma_0) \equiv f(t)) \tag{3.2}$$

с достаточно гладкой правой частью. Именно, уравнение (3.2) имеет периодические решения в том и только том случае, если

$$m_k[f(t)] = \frac{\sigma_0}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\sigma_0} (H_k(t), f(t))\,dt = 0 \quad (k = 1, 2) \tag{3.3}$$

Определим далее два класса функций со специальными свойствами. Первый класс W состоит из действительных скалярных функций $w(\xi, \mu)$. По определению $w(\xi, \mu) \in W$, если

1°. Функция $w(\xi, \mu)$ аналитична по совокупности переменных при

$$|\xi| \leqslant \xi_0, \quad \|\mu\|_{R^m} \leqslant \mu_0 \tag{3.4}$$

2°. При ξ и μ, удовлетворяющих неравенствам (3.4), выполнены условия

$$w(\xi, \mu) \equiv w(-\xi, \mu), \quad w(0, \mu) \equiv 0$$

Второй класс X_τ состоит из периодических по τ с периодом $2\pi/\sigma_0$ функций $x(\tau; \xi, \mu)$ со значениями в $E(B^2)$, которые дополнительно удовлетворяют условиям

1°. Функции $x(\tau; \xi, \mu)$ аналитичны по совокупности переменных в метрике пространства $E(B^2)$ при всех τ и значениях ξ и μ, удовлетворяющих неравенствам (3.4).

2°. При тех же ξ и μ выполнены тождества

$$m_1[x(\tau; \xi, \mu)] \equiv \xi, \quad m_2[x(\tau; \xi, \mu)] \equiv 0$$

$$x(\tau; 0, \mu) \equiv 0, \quad \frac{\partial}{\partial\xi}x(\tau; \xi, \mu)|_{\xi=0} \equiv E_1(\tau)$$

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (1 + c)A(\varepsilon)\frac{dx}{d\tau} + (1 + c)^2[B^2 + C(\varepsilon)]x = (1 + c)^2 f\left(x, \frac{1}{1+c}\frac{dx}{d\tau}; \varepsilon, \mu\right) \tag{3.5}$$

которое получается из (1.1) при помощи замены $t = (1 + c)\tau$, где $|c| < 1$. Будем рассматривать (3.5) как уравнение относительно

$$c = c(\xi, \mu) \in W, \quad \varepsilon = \psi(\xi, \mu) \in W \tag{3.6}$$
$$x = x(\tau; \xi, \mu) \in X_\tau$$

Теорема 1. Существует единственный набор функций (3.6), обращающих (3.5) в тождество.

Из этого предложения вытекает, что каждому решению $\xi = \xi(\varepsilon, \mu)$ скалярного уравнения

$$\varepsilon = \psi(\xi, \mu) \tag{3.7}$$

соответствует периодическое решение

$$x(t; \varepsilon, \mu) = x\left(\frac{t}{1 + c(\xi(\varepsilon, \mu)\ \mu)}; \xi(\varepsilon, \mu), \mu\right) \tag{3.8}$$

уравнения (1.1). Возникает естественный вопрос: исчерпываются ли таким образом все геометрически различные периодические решения (1.1), при каждом t принадлежащие некоторому шару $S(r_0)$ фазового пространства $E(B^2) \times E(B)$. Напомним, что геометрически различными называются периодические решения, которые нельзя получить одно из другого сдвигами по времени.

Всюду ниже будем предполагать, что $\psi(\xi, 0) \not\equiv 0$. При этом условии и при достаточно малых ε_0 и μ_0, фигурирующих в правых частях неравенств (1.2), у скалярного уравнения (3.7) при любом изменении ε и μ в соответствующих пределах не могут появляться решения, проходящие через концы достаточно малого отрезка $[-\xi_0, \xi_0]$. В дальнейшем будем предполагать, что необходимая для этого малость ε_0, μ_0 и ξ_0 соблюдена.

Теорема 2. Существует такое r_0 и зависящие от него ε_0, μ_0 и ξ_0, что при ε и μ, удовлетворяющих неравенствам (1.2), дифференциальное уравнение (1.1) имеет столько геометрически различных периодических решений, при каждом t принадлежащих $S(r_0)$, сколько различных решений имеет уравнение (3.8), принадлежащих интервалу $(0, \xi_0)$.

Теорема 3. Траектория каждого решения дифференциального уравнения (1.1), при всех $t \geqslant 0$ принадлежащего $S(r_0)$, асимптотически приближается либо к нулевому состоянию равновесия, либо к одному из его циклов.

Перейдем к вопросу об устойчивости по Ляпунову периодических решений, построенных ранее.

Теорема 4. Пусть для данных ε_* и μ_* скалярное уравнение (3.7) имеет простое решение $\xi_* \in (0, \xi_0)$. Тогда построенное по нему согласно формуле (3.8) периодическое решение $x(t; \varepsilon_*, \mu_*)$ устойчиво (неустойчиво), если

$$\tau_0' \frac{\partial}{\partial \xi} \psi(\xi, \mu)|_{\xi=\xi_*, \mu=\mu_*} > 0 \quad (< 0)$$

Осталось объяснить поведение решений в случае, когда скалярное уравнение (3.7) не имеет решений на интервале $(0, \xi_0)$.

Теорема 5. При заданных ε_* и μ_* все решения дифференциального уравнения (1.1) с начальными условиями из шара $S(r_0)$ асимптотически приближаются к нулевому решению, если

$$\tau_0' [\varepsilon_* - \psi(\xi, \mu_*)] < 0 \quad (0 < \xi < \xi_0)$$

и это уравнение имеет решения со сколь угодно малыми по норме начальными условиями, которые с течением времени покидают шар $S(r_0)$, если указанное неравенство заменено на противоположное.

4. Алгоритмическая часть. Пусть

$$
\begin{aligned}
(4.1)\qquad & c(\xi, \mu) = c_2(\mu)\xi^2 + c_4(\mu)\xi^4 + \ldots \\
& \psi(\xi, \mu) = b_2(\mu)\xi^2 + b_4(\mu)\xi^4 + \ldots \\
& x(\tau; \xi, \mu) = \xi E_1(\tau) + \xi^2 x_2(\tau; \mu) + \ldots
\end{aligned}
$$

— разложения в ряды по степеням ξ функций (3.6). Подставляя их в (3.5), разлагая левую и правую части получившегося тождества в ряды по степеням ξ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ, получим рекуррентные последовательности линейных неоднородных дифференциальных уравнений

$$\text{(4.2)}\qquad \begin{aligned} &\frac{d^2}{d\tau^2}x_n(\tau;\mu)+A(0)\frac{d}{d\tau}x_n(\tau;\mu)+\\ &+[B^2+C(0)]\,x_n(\tau;\mu)=\varphi_n(\tau;\mu),\qquad n=2k,\ 2k+1\\ &\varphi_{2k}(\tau;\mu)=\varphi_{2k}(\tau;\ c_2(\mu),\ldots,c_{2k-2}(\mu),\ b_2(\mu),\ldots,b_{2k-2}(\mu),\ \mu)\\ &\varphi_{2k+1}(\tau;\mu)=\varphi_{2k+1}(\tau;\ c_2(\mu),\ldots,c_{2k}(\mu),\ b_2(\mu),\ldots\\ &\ldots,b_{2k}(\mu),\ \mu),\qquad k=1,2\ldots \end{aligned}$$

Здесь φ_{2k}, φ_{2k+1} — тригонометрические многочлены переменной τ с номерами гармоник, не превосходящими $2k$ и $2k+1$ соответственно. Как оказывается, всегда

$$m_1[\varphi_{2k}(\tau;\mu)]=m_2[\varphi_{2k}(\tau;\mu)]=0$$

Равенства же

$$m_1[\varphi_{2k+1}(\tau;\mu)]=m_2[\varphi_{2k+1}(\tau;\mu)]=0$$

однозначно определяют коэффициенты первых двух рядов (4.1). При этом коэффициенты последнего ряда (4.1) однозначно определяются как тригонометрические решения уравнений (4.2), удовлетворяющие равенствам

$$m_k[x_j(\tau;\mu)]=0\quad (k=1,2;\ \ j=2,3,\ldots)$$

В приложениях часто $b_2(0)\neq 0$. В этом случае скалярное уравнение (3.7) при достаточно малых ε_0 и μ_0, участвующих в неравенствах (1.2), не может иметь более одного решения на достаточно малом интервале $(0,\xi_0)$. Если такое решение существует, то оно разлагается в ряд

$$\xi=a_1(\mu)\,\varepsilon^{1/2}+a_3(\mu)\,\varepsilon^{3/2}+\ldots$$

по нечетным степеням $\varepsilon^{1/2}$. Поэтому можно считать, что $\xi\approx a_1(\mu)\varepsilon^{1/2}$. Из формулы (3.8) тогда следует, что

$$\text{(4.3)}\qquad x(t;\varepsilon,\mu)\approx a_1(\mu)\,\varepsilon^{1/2}E_1\left(\frac{t}{1+c_2(\mu)\,a_1^2(\mu)\,\varepsilon}\right)$$

Отметим еще, что в приложениях параметр μ отражает влияние различных нелинейностей. Например, в задаче панельного флаттера — геометрической и аэродинамической нелинейностей. Если при некотором их взаимодействии оказалось, что $b_2(0)=0$, то тогда обычно $b_4(0)\neq 0$. Ясно, что и в этом случае скалярное уравнение (3.7) может быть полностью проанализировано.

5. Доказательства. Все сформулированные предложения имеют аналоги в работе [6], в которой отмечено, что соответствующие обоснования имеют общий характер и применимы к широкому классу эволюционных уравнений. В связи с этим ниже укажем лишь изменения, обусловленные особенностями рассматриваемого случая.

В совокупности алгоритмическая часть и теорема 1 примерно эквивалентны по содержанию работам [9, 10], где изучались параболические уравнения. Обосновываются они по изложенной в [6] схеме, и новых моментов здесь не возникает. Отметим, что эта схема близка к использованной в [9, 10].

Приступим к обоснованию теоремы 2. Для этого введем в рассмотрение дифференциальное уравнение

$$\text{(5.1)}\qquad u^{\cdot}=Q(\varepsilon)u+F_\delta(u;\varepsilon,\mu)$$

получающееся из уравнения (1.1), в котором функция $f(x,x^{\cdot};\varepsilon,\mu)$ заменена на $f_\delta(x,x^{\cdot};\varepsilon,\mu)$, при помощи замен

$$u=(x_1,x_2),\quad x_1=Bx,\ x_2=x^{\cdot}$$

Задача Коши для уравнения (5.1) нелокально разрешима при любом начальном условии $u \in E(B) \times E(B)$, и совокупность его решений образует группу нелинейных операторов

$$U(t, u; \varepsilon, \mu) = T(t; \varepsilon)u + V(t, u; \varepsilon, \mu) \tag{5.2}$$

где $T(t; \varepsilon)$ — группа линейных операторов класса (C_0) с производящим оператором $Q(\varepsilon)$ [11]. Нелинейное слагаемое в правой части (5.2) удовлетворяет всем ограничениям, сформулированным в [7]. В частности, оператор $V(t, u; \varepsilon, \mu)$ как оператор из $E(B) \times E(B) \times R^{m+1}$ в $E(B) \times E(B)$ непрерывен по совокупности переменных, а по пространственной переменной он удовлетворяет условию Липшица с достаточно малой постоянной и имеет в нуле порядок малости выше первого.

Отметим, что спектр устойчивости уравнения (1.3) совпадает со спектром оператора $Q(\varepsilon)$. Обозначим через $e_1(\varepsilon) + ie_2(\varepsilon)$ собственный элемент оператора $Q(\varepsilon)$, отвечающий собственному значению $\lambda(\varepsilon)$, а через $h_1(\varepsilon) + ih_2(\varepsilon)$ — линейный функционал, который является собственным элементом сопряженного оператора $Q^*(\varepsilon)$ и соответствует собственному значению $\bar{\lambda}(\varepsilon)$. Их можно выбрать зависящими от ε гладко и так, чтобы $(h_k(\varepsilon), e_j(\varepsilon)) = \delta_{kj}$, где $k, j = 1, 2$. Эти величины необходимы для того, чтобы фазовое пространство $E(B) \times E(B)$ уравнения (5.1) разбить в прямую сумму двух подпространств $C_1(\varepsilon)$ и $C_2(\varepsilon)$. Первое из них — линейная оболочка $e_1(\varepsilon)$ и $e_2(\varepsilon)$, второе — задается равенствами $(h_k(\varepsilon), u) = 0$, где $k = 1, 2$. Соответствующие им проекторы обозначим через $P_1(\varepsilon)$ и $P_2(\varepsilon)$. Через $M(\rho, \varepsilon)$ обозначим множество элементов, связанных неравенством

$$\rho \| P_1(\varepsilon) u \|_\varepsilon \geqslant \| P_2(\varepsilon) u \|_\varepsilon \quad (\rho = \text{const} > 0)$$

Здесь $\| * \|_\varepsilon$ — некоторая специальная норма в $E(B) \times E(B)$, равномерно относительно ε эквивалентная обычной, которая выбирается, как и в [6]. Из свойств нелинейной группы (5.2) и результатов работы [6] вытекает, что решения уравнения (5.1) с начальными условиями $u \in M(\rho, \varepsilon)$ с течением времени либо, убывая по норме, попадают в это множество, либо по экспоненциальному закону приближаются к нулевому решению. В самом же множестве $M(\rho, \varepsilon)$ происходит вращение (см. [6]). Эти два факта позволяют свести вопрос о поведении решений уравнения (5.1) к вопросу о поведении итераций оператора Пуанкаре

$$\Pi(u; \varepsilon, \mu) = U(t_k(u; \varepsilon, \mu), u; \varepsilon, \mu) \tag{5.3}$$

определенного на множестве $K(\rho, \varepsilon)$, состоящем из таких $u \in M(\rho, \varepsilon)$, что $(h_1(\varepsilon), u) \geqslant 0$, а $(h_2(\varepsilon), u) = 0$. В (5.3) функционал $t_K = t_K(u; \varepsilon, \mu)$ является непрерывным решением уравнения

$$\exp \tau(\varepsilon) t_K \sin \sigma(\varepsilon) t_K = (h_2(\varepsilon), V(t_K, u; \varepsilon, \mu))$$

$$t_K(0; \varepsilon, \mu) = 2\pi/\sigma(\varepsilon)$$

Такое решение по пространственной переменной обязательно удовлетворяет условию Липшица.

Дальнейшие рассуждения несколько отличаются от изложенных в [6], где существенно использовалась монотонность оператора (5.3) в смысле полуупорядоченности, порождаемой конусом $K(\rho, \varepsilon)$. В случае уравнений гиперболического типа этот факт установить не удается, так как из нелинейного оператора (5.3) нельзя выделить главную линейную часть.

Из результатов работы [7] вытекает, что оператор (5.3) имеет в $K(\rho, \varepsilon)$ единственную инвариантную кривую $l(\varepsilon, \mu)$ со следующими свойствами: она задается уравнением $u = \eta e_1(\varepsilon) + v_0(\eta; \varepsilon, \mu)$, где параметр $\eta \geqslant 0$; непрерывная по совокупности переменных функция $v_0(\eta; \varepsilon, \mu)$ со значениями в $C_2(\varepsilon)$ удовлетворяет по η условию Липшица с постоянной $N_0 < 1$ и имеет в нуле порядок малости выше первого; наконец, расстояние между $\Pi^n(u; \varepsilon, \mu)$ и этот кривой при $n \to \infty$ убывает со скоростью геометрической прогрессии. Функция $v_0(\eta; \varepsilon, \mu)$ обладает еще некоторой гладкостью по η и ε [7]. Это позволяет установить монотонность оператора (5.3) на элементах $l(\varepsilon, \mu)$

и затем для завершения доказательства воспользоваться схемой и аналогом леммы 2.19, описанными в [6].

Доказательство теоремы 3 следует из монотонности оператора (5.3) на элементах $l(\varepsilon, \mu)$ и из изложенного в [7]. Доказательства теорем 4, 5 проводятся примерно так же, как и в [6].

6. Одно добавление. Пусть $b_2(0) \neq 0$. Рассмотрим произвольное решение $x(t)$ уравнения (1.1) с начальными условиями из шара $S(r_0)$. Тогда для значений t, при которых траектория решения $x(t)$ остается в $S(r_0)$, справедлива формула

$$x(t) \approx \eta(t) E_1\left(\frac{t+c_0}{1+c_2(\mu)\,a_1^2(\mu)\,\varepsilon}\right) \tag{6.1}$$

аналогичная (4.3). Здесь $\eta(t)$ — решение уравнения

$$\eta^{\cdot} = \varepsilon\tau_0'\eta - b_2(\mu)\tau_0'\eta^3, \qquad \eta(0) = \eta_0 \geqslant 0$$

а постоянные c_0 и η_0 зависят от начальных условий $x(t)$. Из п. 5 вытекает, что в правой части формулы (6.1) отброшены слагаемые, которые либо пропорциональны ε, либо экспоненциально затухают с показателем экспоненты, не зависящим от ε.

7. Заключение. Предлагаемый метод применим к неконсервативным задачам теории упругой устойчивости, в которых потеря устойчивости состояния равновесия происходит колебательным образом. Для проверки соответствующего факта нужно провести анализ спектра линеаризованной задачи. После этого необходимо решить некоторое количество стационарных неоднородных уравнений. Последнее можно сделать, привлекая, например, метод Галеркина. Эта программа действий подробно описана в работе [12], в которой численно рассчитан нелинейный флаттер существенно двумерной панели и проведено сравнение с экспериментальными данными, опубликованными американскими авторами. Расхождение с экспериментом не превысило 8%.

Поступила 16 IX 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
2. *Филиппов А. П.* Колебания деформируемых систем. М., «Машиностроение», 1970.
3. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М., «Наука», 1967.
4. *Ильюшин А. А.* Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей. ПММ, 1956, т. 20, вып. 6.
5. *Куликов А. Н., Либерман Б. Д.* О новом подходе к исследованию задач нелинейного «панельного флаттера». Вестн. Яросл. ун-та, 1975, вып. 13.
6. *Колесов Ю. С.* Гармонические автоколебания дифференциальных уравнений n-го порядка с последействием. Вестн. Яросл. ун-та, 1974, вып. 7.
7. *Куликов А. Н.* Интегральные многообразия гиперболических дифференциальных уравнений в случае, близком к критическому одной пары чисто мнимых корней. Вестн. Яросл. ун-та, 1975, вып. 13.
8. *Якубов С. Я.* Разрешимость задачи Коши для абстрактных квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения. Тр. Моск. матем. о-ва, 1970, т. 23.
9. *Юдович В. И.* Возникновение автоколебаний в жидкости. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.
10. *Юдович В. И.* Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
11. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., «Наука», 1967.
12. *Либерман Б. Д.* Теоретический анализ нелинейного флаттера прямоугольной панели. Сравнение с результатами эксперимента. В сб.: Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1976.