Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 536.46 : 533.6 + 534.222.2

НЕСТАЦИОНАРНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ ГОРЕНИЯ В СРЕДЕ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ СВОЙСТВАМИ

В. С. Берман

(Москва)

Исследуется распространение нестационарной волны горения в неоднородной нестационарной газовой среде с медленно меняющимися параметрами. Предполагается, что в системе есть подобие между полем распределения концентрации реагента и температуры. Выводится уравнение, описывающее эволюцию трехмерной волны горения. Рассмотрен ряд примеров.

Классической в теории горения является задача о стационарном распространении волны горения в однородной среде [1]. Однако в ряде случаев распределение теплофизических характеристик среды зависит как от координат, так и от времени. При этом волна горения будет распространяться нестационарно с возможными деформациями фронта пламени.

Для изучения влияния временной и пространственной неоднородности на волну горения рассмотрено распространение стационарной волны реакции в среде, теплофизические параметры которой непостоянны. Для аналитического изучения вопроса предположим, что неоднородности существенно изменяются на пространственном и временном интервалах, больших $O(\varepsilon^{-1})$ по сравнению соответственно с масштабами характерной толщины теплового слоя — $\varkappa / u_{st}$ и характерного времени перестройки этого слоя ($\varkappa / u_{st}^2$). Здесь $\varkappa$ — температуропроводность газа, u_{st} — стационарная скорость распространения волны горения, $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый безразмерный параметр, характеризующий скорость изменения теплофизических параметров. При этом допускаем, что характеристики среды могут изменяться на величины порядка $O(1)$.

В качестве примера можно привести случай взаимодействия звуковой волны с волной горения, при этом иногда в реальных системах можно считать, что длина звуковой волны Λ намного больше толщины стационарного теплового слоя, так что основные изменения температуры и концентрации происходят в однородном по пространству поле давления, зависящем от времени. При этом должны выполняться соотношения

$$c/\omega \sim \Lambda \gg \varkappa/u_{st} \tag{0.1}$$

где c — скорость звука, ω — частота звуковой волны.

Результаты данной работы могут применяться при описании взаимодействия с волной горения звуковой волны достаточно низкой частоты, для которой справедливо соотношение

$$\omega \ll u_{st}^2/\varkappa \tag{0.2}$$

Отметим, что для характерных значений $u_{st} = 10^2$ *см*, $\varkappa = 10^{-1}$ *см²/сек*, $c = 10^5$ *см/сек*, $\varkappa/u_{st} = 10^{-3}$ *см* неравенство (0.1) справедливо при $\omega \ll 10^8$ *гц*, а неравенство (0.2) — при $\omega \ll 10^5$ *гц*. Таким образом исследован довольно широкий диапазон частот.

Ниже рассматривается модельная задача распространения волны горения в газе, для которого число Льюиса равно единице. Показано, что профиль волны в ряде случаев может деформироваться уже в нулевом приближении по ε. Найдено изменение поля температуры во времени и пространстве, а также скорость движения изотермических поверхностей.

1. Основные уравнения. Модельная задача распространения нестационарной волны в среде может быть записана при ряде предположений в следующей безразмерной форме:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial Z^2} + f^2(\tau, x, y, z) F(\Theta) \tag{1.1}$$

Здесь Θ—температура, X, Y, Z—пространственные координаты; $x = X\varepsilon$, $y = Y\varepsilon$, $z = Z\varepsilon$, $\tau = \varepsilon t$, $0 < \varepsilon \ll 1$; функция f описывает временную и пространственную неоднородности (при $t = 0$ $f \equiv 1$); $F(\Theta)$ — нелинейная функция, описывающая температурную зависимость скорости тепловыделения в среде. Далее полагается, что $f = O(1)$.

В качестве масштабов времени и пространственных переменных выбраны величины $\varkappa / u_{st}^2$ и $\varkappa / u_{st}$ соответственно.

Обычно

$$0 \leqslant \Theta \leqslant 1, \quad F(0) = F(1) = 0 \tag{1.2}$$

Предполагается, что при $t < 0$ в газе распространяется устойчивая стационарная волна горения вдоль оси X ($f \equiv 1$).

Тогда при $t < 0$ имеем

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{d\varphi}{ds} + F(\varphi) = 0 \tag{1.3}$$

$$\varphi(-\infty) = 1, \quad \varphi(+\infty) = 0 \tag{1.4}$$

$$\theta(X, t) = \varphi(s), \quad s = X - t$$

Как показано в работах [2,3], решение задачи (1.3), (1.4) существует при

$$F'(0) > 0, \quad F'(1) > 0; \quad \Theta \in [0, a), \quad F(\Theta) \geqslant 0 \tag{1.5}$$

$$\Theta \in (0, 1], \quad F(\Theta) \leqslant 0; \quad 0 < a \leqslant 1$$

или при условиях [4]

$$F'(0) < 0; \quad \Theta \in [0, a), \quad F(\Theta) \leqslant 0 \tag{1.6}$$

$$\Theta \in [a, 1), \quad F(\Theta) \geqslant 0; \quad 0 \leqslant a \leqslant 1; \quad \int_0^1 F(\Theta)\, d\Theta > 0$$

а также при [5]

$$\Theta \in [0, \delta], \quad F(\Theta) \equiv 0; \quad \Theta \in [\delta, 1) \tag{1.7}$$

$$F(\Theta) > 0; \quad 0 < \delta < 1$$

Важным для последующего изложения является знание асимптотики $\varphi(s)$ при $s \to +\infty$. Как следует из (1.5) – (1.7) и (1.3), $\varphi(s \to +\infty) = O(\exp(-\alpha s))$, $\alpha \geqslant 1$. Таким образом, встречающиеся далее интегралы

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 e^x\, dx; \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 x e^x\, dx \tag{1.8}$$

существуют.

В ряде случаев интегралы I_1 и I_2 можно приближенно оценить. Так, часто в теории горения функции $F(\varphi(s)) \sim O(1)$ только на интервале, много меньшем единицы, а при других значениях $\varphi - |F(\varphi)| \ll 1$. Поэтому аппроксимация [6]

$$\varphi(s) = \begin{cases} 1, & s<0 \\ e^{-s} & s>0 \end{cases}$$

является достаточно разумной. При этом встречающаяся ниже величина $I = I_1^{-1} I_2$ приближенно равна

$$I = 1 + o(1)$$

Обычно решение (1.3), (1.4) в замкнутом виде неизвестно. Однако в ряде случаев для определения $\varphi(s)$ могут быть применены приближенные методы. Так, для типичной в теории горения функции $F(\Theta) \sim (1-\Theta)^n \exp(\beta(\Theta-1))$ $(\beta \gg 1)$ могут быть применены методы сращиваемых асимптотических разложений [7,8]. Отметим, что наличие двух малых параметров $\beta^{-1} \ll 1$ и $\varepsilon \ll 1$ не приводит к неравномерности соответствующих разложений, так как разложения по β^{-1} строятся в области $X \sim O(\beta^{-1})$, а по ε — для $X \sim O(\varepsilon^{-1})$.

Граничные условия для уравнения (1.1) следующие:

$$X = -\infty, \quad \Theta(-\infty, Y, Z, t) = 1 \tag{1.9}$$

$$X = +\infty, \quad \Theta(+\infty, Y, Z, t) = 0.$$

При конечном X решение (1.1) должно быть ограничено для любых Y, Z, t.

Начальное условие для (1.1) имеет вид

$$\Theta(X, Y, Z, 0) = \varphi(X) \tag{1.10}$$

2. Метод решения. Будем искать решение (1.1), (1.10) и (1.11) в виде

$$\Theta(X, Y, Z, t; \varepsilon) = \Theta_0(\eta, x, y, z, \tau) + \varepsilon\Theta_1(\eta, x, y, z, \tau) + \ldots \tag{2.1}$$

Полагаем, что разложение (2.1) равномерно пригодно, т. е. $\Theta_1 / \Theta_0 \approx \approx O(1)$ при всех (x, y, z, τ), где

$$\eta = \xi(x, y, z, \tau; \varepsilon)\varepsilon^{-1}; \quad \xi = \xi_0(x, y, z, \tau) + \varepsilon\xi_1(x, y, z, \tau) + \ldots \tag{2.2}$$

Аналогичный метод применялся в [9] для отыскания решения нелинейных уравнений гиперболического типа и для нахождения формы уединенных волн (солитонов) при изменяемом профиле дна в [10]. Указанный метод использовался также в ряде других работ [11, 12]. Переходя от переменных (X, Y, Z, t) к (η, x, y, z, τ) по формулам ($\mathbf{r} = (x, y, z)$)

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} = |\nabla\xi|^2 \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \tag{2.3}$$

$$+ \varepsilon\left(2(\Delta\xi\nabla)\frac{\partial}{\partial\eta} + \nabla^2\xi\frac{\partial}{\partial\eta}\right) + \varepsilon^2\nabla^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial\xi}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial\eta} \tag{2.4}$$

Здесь ∇ и ∇^2 — операторы в переменных $\mathbf{r}$.

Подставляя (2.1), (2.3) и (2.4) в (1.1) и приравнивая члены при одинаковых степенях ε, для первых двух членов разложения (2.1) имеем

$$|\nabla\xi_0|^2 \frac{\partial^2\Theta_0}{\partial\eta^2} - \frac{\partial\xi_0}{\partial\tau}\frac{\partial\Theta_0}{\partial\eta} + f^2(\mathbf{r},\tau)F(\Theta_0) = 0 \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} &|\nabla\xi_0|^2 \frac{\partial^2\Theta_1}{\partial\eta^2} - \frac{\partial\xi_0}{\partial\tau}\frac{\partial\Theta_1}{\partial\eta} + f^2(\mathbf{r},\tau)\frac{dF(\Theta_0)}{d\Theta}\Theta_1 = \\ &= \frac{\partial\Theta_0}{\partial\tau} - 2(\nabla\xi_0\nabla)\frac{\partial\Theta_0}{\partial\eta} - \nabla^2\xi_0\frac{\partial\Theta_0}{\partial\eta} - \\ &- 2(\nabla\xi_0\nabla\xi_1)\frac{\partial^2\Theta_0}{\partial\eta^2} - \frac{\partial\xi_1}{\partial\tau}\frac{\partial\Theta_0}{\partial\eta} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Полагаем, что решения уравнений (2.5) и (2.6) удовлетворяют граничным условиям (1.9), т. е.

$$\Theta_0(-\infty, \mathbf{r}, \tau) = 1, \quad \Theta_0(+\infty, \mathbf{r}, \tau) = 0 \tag{2.7}$$

$$\Theta_1(-\infty, \mathbf{r}, \tau) = 0, \quad \Theta_1(+\infty, \mathbf{r}, \tau) = 0 \tag{2.8}$$

Уравнение (2.5) формально совпадает с уравнением, описывающим стационарную волну горения (1.3), (1.4). Решение уравнения (2.5) имеет вид

$$\Theta_0(\eta, \mathbf{r}, \tau) = \Psi(f|\nabla\xi_0|^{-1}\eta + a) \tag{2.9}$$

где $a = a(\mathbf{r}, \tau)$ — произвольная функция, а функция $\Psi(s)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\Psi}{ds^2} + V\frac{d\Psi}{ds} + F(\Psi) = 0, \quad V = -\frac{\partial\xi_0}{\partial\tau}f^{-1}|\nabla\xi_0|^{-1}$$

$$\Psi(-\infty) = 1, \ \Psi(+\infty) = 0$$

Из (1.3), (1.4) следует уравнение для $\xi_0(\mathbf{r}, \tau)$ в виде $V = 1$; $\Psi(s) \equiv \equiv \varphi(s)$. Отсюда имеем

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial\tau} = -f|\nabla\xi_0|, \quad \xi_0(\mathbf{r}, 0) = x \tag{2.10}$$

Для определения функции $a(\mathbf{r}, \tau)$ рассмотрим уравнение (2.6). Предварительно отметим, что вследствие зависимости функции Ψ от комбинации $f|\nabla\xi_0|^{-1}\eta + a(\mathbf{r}, \tau)$ (2.2) функция $\xi_1(\mathbf{r}, \tau)$ без ограничения общности может быть положена равной нулю. Далее полагается $\xi_1 \equiv 0$.

Уравнение (2.6) линейно по Θ_1 и является уравнением в вариациях по отношению к уравнению (2.5). Из теоремы Пуанкаре [13, 14] следует, что фундаментальными решениями уравнения (2.6) будут функции $y_1(\eta)$ и $y_2(\eta)$

$$y_1(\eta) = \frac{\partial}{\partial A}\Phi(\eta + A, B), \quad y_2(\eta) = \frac{\partial}{\partial B}\Phi(\eta + A, B)$$

Здесь $\Phi(\eta + A, B)$ — общее решение (2.5), A и B — произвольные функции $\mathbf{r}$ и τ. Отсюда и из (2.9) следует, что решение однородного уравнения (2.6) с условиями (2.8) пропорционально $\partial\Theta_0 / \partial\eta$. Так как решение $y_2(\eta)$ не удовлетворяет граничным условиям, т. е. не обращается в нуль на обоих концах интервала $\eta \to -\infty$ и $\eta \to +\infty$, для разрешения неоднородной краевой задачи (2.6) и (2.8) необходимо, чтобы правая часть (2.6) была ортогональна с весом $\exp(-|\nabla\xi_0|^{-2}\eta\partial\xi_0/\partial\tau)$ к функции $\partial\Theta_0/\partial\eta$ — решению однородной краевой задачи [15], т. е. решению сопряженного к (2.6) однородного уравнения. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\Theta_0}{\partial\eta}e^{g\eta}\left(\frac{\partial\Theta_0}{\partial\tau}-2(\nabla\xi_0\nabla)\frac{\partial\Theta_0}{\partial\eta}-\nabla^2\xi_0\frac{\partial\Theta_0}{\partial\eta}\right)d\eta=0$$

$$g(\mathbf{r},\tau)=-|\nabla\xi_0|^{-2}\partial\xi_0/\partial\tau$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial\Theta_0}{\partial\tau}=\left(\frac{\partial g}{\partial\tau}\eta+\frac{\partial a}{\partial\tau}\right)\frac{d\varphi}{ds}$$

$$(\nabla\xi_0\nabla)\frac{\partial\Theta_0}{\partial\eta}=(\nabla\xi_0\nabla g)\frac{d\varphi}{ds}+(\eta g(\nabla\xi_0\nabla g)+g(\nabla\xi_0\nabla a))\frac{d^2\varphi}{ds^2}$$

$$\frac{\partial\Theta_0}{\partial\eta}=g\frac{d\varphi}{ds}$$

получим условие ортогональности в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{g\eta}\frac{d\varphi}{ds}\left\{\frac{d\varphi}{ds}\left(\eta\frac{\partial g}{\partial\tau}+\frac{\partial a}{\partial\tau}\right)-2\frac{d\varphi}{ds}(\nabla\xi_0\nabla g)-\right.$$
$$\left.-2g\frac{d^2\varphi}{ds^2}(\eta(\nabla\xi_0\nabla)_g+(\nabla\xi_0\nabla a))-\nabla^2\xi_0 g\frac{d\varphi}{ds}\right\}d\eta=0 \tag{2.11}$$

Переходя в (2.11) от переменной η к s согласно соотношению $\eta=(s-a)/g$ и вводя новую неизвестную функцию $A(\mathbf{r},\tau)$

$$a(\mathbf{r},\tau)=g(\mathbf{r},\tau)A(\mathbf{r},\tau)$$

имеем

$$A_\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2e^s\,ds-2g\nabla\xi_0\nabla A\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\varphi}{ds}\frac{d^2\varphi}{ds^2}e^s\,ds+$$
$$+g^{-2}\frac{\partial g}{\partial\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}e^s\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2s\,ds-2g^{-1}(\nabla\xi_0\nabla)g\int_{-\infty}^{+\infty}e^s\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2ds-$$
$$-2g^{-1}(\nabla\xi_0\nabla)g\int_{-\infty}^{+\infty}e^s\frac{d\varphi}{ds}\frac{d^2\varphi}{ds^2}s\,ds-\nabla^2\xi_0\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2e^s\,ds=0 \tag{2.12}$$

Предполагая, что входящие в (2.12) интегралы существуют и проводя интегрирование по частям, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\varphi}{ds}\frac{d^2\varphi}{ds^2}e^s\,ds=-\frac{1}{2}I_1,\quad I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}e^s\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2ds \tag{2.13}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}s\frac{d\varphi}{ds}\frac{d^2\varphi}{ds^2}e^s\,ds=\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2se^s\Big|_{-\infty}^{+\infty}-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 e^s(1+s)\,ds = -\frac{1}{2}(I_1+I_2)$$

$$I_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^s s\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 ds$$

где I_1 и I_2 — постоянные.

Из (2.12) и (2.13) получаем

$$A_\tau + g(\nabla\xi_0\nabla)A + g^{-2}\frac{\partial g}{\partial\tau}I + g^{-1}(\nabla\xi_0\nabla)g(I-1) - \nabla^2\xi_0 = 0,\quad I = I_2 I_1^{-1} \tag{2.14}$$

В качестве примера приложения полученных результатов рассмотрим случай

$$f(\mathbf{r},\ \tau) = \psi(\tau)$$

Тогда из (2.9), (2.10) и (2.14) имеем

$$\xi_0 = x - \int\limits_0^\tau \psi(\tau')\,d\tau',\quad a = I(1-\psi(\tau)) \tag{2.15}$$

$$\Theta_0 = \varphi\left(\psi(\tau)\varepsilon^{-1}\left(x - \int\limits_0^\tau \psi\,d\tau'\right) + I(1-\psi(\tau))\right)$$

3. Обсуждение результатов. В п. 2 построено первое приближение к решению нестационарной задачи (1.1), (1.9) и (1.10).

Наиболее важной характеристикой волны горения является скорость распространения изотермических поверхностей. В стационарном случае ($f \equiv 1$) скорость движения всех изотермических поверхностей постоянна и одинакова. При непостоянной функции скорость можно определить, как следует из (2.9), при помощи соотношения

$$f(\mathbf{r},\ \tau)\,|\nabla\xi_0|^{-1}\,\xi_0(\mathbf{r},\ \tau) = B \tag{3.1}$$

где B — постоянная, зависящая от температуры изотермических поверхностей.

В [12] отмечалось, что решение, построенное методом, используемым в данной работе, хорошо описывает поведение распределения температуры только в некоторой окрестности фронта, а при достаточном удалении от фронта это решение плохо применимо. Поэтому везде далее будет полагаться, что $B = O(\varepsilon)$.

Дифференцируя (3.1) по t, находим ($r_B(t)$ — решение уравнения (3.1))

$$\mathbf{v} = \left(\frac{d\mathbf{r}_B}{dt}\right)$$

Отметим, что решение задачи (1.1), (1.9), (1.10) можно попытаться построить и другим методом, основываясь на медленном изменении функции

$f(\mathbf{r}, \tau)$. Считая f фиксированным, получим решение задачи в виде

$$\Theta = \varphi\left(f(x - \tau f)\, \varepsilon^{-1}\right) \tag{3.2}$$

Легко показать непригодность этого выражения. Рассмотрим, например, $f(\mathbf{r}, \tau) = \Phi(\tau)$, $\Phi(\tau) = O(1)$. Тогда скорость распространения изотермы $\Phi(\tau)(x - \tau\Phi(\tau)) = B$ равна

$$dx / d\tau = \Phi(\tau) + \tau d\Phi / d\tau + O(\varepsilon) \tag{3.3}$$

При $\tau \to \infty$ и $d\Phi / d\tau = O(1)$ скорость распространения волны стремится к бесконечности, что, очевидно, неверно.

В данном случае из (2.15) и (3.1) имеем

$$\mathbf{v} = (v_x, 0, 0), \quad v_x = \Phi(\tau) + O(\varepsilon) \tag{3.4}$$

Скорость остается постоянной при $\tau \to \infty$ и $d\Phi / d\tau = O(1)$.

Отметим, что при переходных режимах в $\Phi(+\infty) = \Phi_+ = \mathrm{const}$ оба решения (3.3) и (3.8) при $f(\mathbf{r}, \tau) = \Phi(\tau)$ описывают при $\tau = +\infty$ стационарное решение $\varphi(\Phi_+(x - \tau\Phi_+)\varepsilon^{-1})$.

В общем случае $f(\mathbf{r}, \tau)$ в каждый момент времени скорость распространения изотермической поверхности нормальна к ней и не совпадает с направлением, рассчитанным по «квазистационарной» формуле

$$f(x - \tau f) = \mathrm{const}$$

Отметим, что полученное во втором разделе уравнение (2.10) может быть применено и для нахождения приближенных решений других подобных задач, как, например, описание эволюции устойчивой волны горения, входящей в область с переменными теплофизическими параметрами. При этом необходимо потребовать выполнения условий $\xi_0(\mathbf{r}, \tau) = x$ при $x \to -\infty$.

Для более общего случая, когда коэффициенты переноса зависят от $\mathbf{r}$ и τ, вместо (1.1) имеем

$$\varepsilon a(\mathbf{r}, \tau)\, \partial\Theta / \partial\tau = \varepsilon^2 \nabla (b(\mathbf{r}, \tau) \nabla \Theta) + c^2(\tau, \mathbf{r}) F(\Theta)$$
$$b > 0, \quad a > 0$$

Тогда вместо (2.9) и (2.10) получим

$$\Theta_0 = \varphi\left(cb^{-1/2} |\xi_0|^{-1} \eta + a\right),$$
$$\partial\xi_0 / \partial\tau = -ca^{-1}b^{1/2} |\nabla\xi_0|$$

Предлагаемый подход применим также и при явной зависимости F от $\mathbf{r}$ и τ.

Автор выражает благодарность Ю. С. Рязанцеву за полезные обсуждения.

Поступила 21 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Франк-Каменецкий Д. А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., «Наука», 1967.
2. *Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме. М., ОНТИ, 1937.
3. *Aronson D. G., Weinberger H. F.* Non-linear diffusion in population genetics, combustion and nerve pulse propagation. In: Lecture Notes in Mathematics, No. 446. Berlin, Springer-Verlag, 1975.
4. *Канель Я. А.* О стационарном решении для системы уравнений теории горения. Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 2.
5. *Зельдович Я. Б.* К теории распространения пламени. ЖФХ, 1948, т. 22, вып. 1.
6. *Зельдович Я. Б.* Цепные реакции в горячих пламенах — приближенная теория скорости пламени. Кинетика и катализ, 1961, т. 2, вып. 3.
7. *Fendell F. E.* Asymptotic analysis of premixed burning with large activation energy. J. Fluid Mech., 1972, vol. 56, p. 1.
8. *Берман В. С., Рязанцев Ю. С.* К анализу задачи о тепловом распространении пламени методом сращиваемых асимптотических разложений. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
9. *Luke J. C.* A perturbation method for non-linear dispersive wave problems. Proc. Roy. Soc. London, A, 1966, vol. 292, No. 1430.
10. *Johnson R. S.* On the development of solitary wave moving over an uneven bottom. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1973, vol. 73, N 1, p. 183.
11. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. М., «Мир», 1976.
12. *Островский Л. А.* Приближенные методы в теории нелинейных волн. Изв. вузов, Радиофизика, 1974, т. 17, № 4.
13. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
14. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М., «Наука», 1969.
15. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики, т. 1—2. М.— Л., Гостехиздат, 1951.