

**О НЕСТАЦИОНАРНОМ МАССООБМЕНЕ КАПЛИ
В ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ**

**Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, П. А. Прядкин,
Ю. С. Рязанцев**

(Москва)

Для широкого класса неустановившихся течений вязкой несжимаемой жидкости получено аналитическое решение осесимметричной задачи о нестационарной конвективной диффузии к поверхности поглощающей капли. В случае установившихся поступательного и чисто сдвигового обтеканий пузыря при малых числах Рейнольдса и нестационарной диффузии определены явные выражения для диффузионных потоков в зависимости от времени. При малых временах получена асимптотика решения задачи о диффузии при обтекании пузыря равноускоренным потоком.

1. Нестационарная диффузия к поверхности поглощающей капли.
Общее решение. Рассмотрим процесс нестационарной конвективной диффузии к поверхности сферической капли в потоке вязкой жидкости. Считаем, что число Пекле велико. Запишем в приближении диффузионного пограничного слоя безразмерное уравнение конвективной диффузии в предположении полного поглощения растворенного в потоке вещества на поверхности капли и постоянства концентрации вдали от нее

$$(1.1) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{(1+y)^{-2}}{\sin \theta} \frac{\partial (c, \psi)}{\partial (y, \theta)} = P^{-1} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad \left(P = \frac{aU}{D} \right)$$

$$c(t, y, \theta^-) = 1, \quad c(t, 0, \theta) = 0, \quad c(t, \infty, \theta) = 1$$

Здесь $r = y + 1$, θ — сферическая система координат, связанная с центром капли, где угол θ отсчитывается от траектории вытекания θ^+ (от направления потока на бесконечности в случае поступательного обтекания капли); c — концентрация, D — коэффициент диффузии, ψ — функция тока, $\partial (c, \psi) / \partial (y, \theta)$ — якобиан функций c и ψ ; масштабами служат радиус капли a , характерная скорость (на бесконечности) U , время a / U .

Первое граничное условие в (1.1) соответствует обычному условию натекания (особая линия тока $\theta^-(\theta^+)$, на которой нормальная компонента скорости вблизи частицы направлена к (от) ее поверхности называется траекторией натекания (вытекания) [1]).

Считаем, что функцию тока вблизи поверхности капли (пузыря) можно представить в виде

$$(1.2) \quad y \rightarrow 0, \quad \psi(t, y, \theta) \rightarrow \Omega(t) y f(\theta); \quad \Omega(t) \geq 0$$

В частности, как будет видно из результатов п. 3, представление (1.2) имеет место при обтекании пузыря поступательным и сдвиговым потоками.

В дальнейшем для упрощения рассуждений рассматриваем область $\sigma = \{\theta^+ \leq \theta \leq \theta^-\}$, где $f(\theta) \geq 0$, а траектории натекания θ^- и вытекания θ^+ определяются следующим образом:

$$(1.3) \quad f(\theta^-) = f(\theta^+) = 0, \quad -\infty < [f\theta' / \sin \theta]_{\theta=\theta^-} < 0 \\ 0 < [f\theta' / \sin \theta]_{\theta=\theta^+} < \infty$$

Более общий случай произвольного числа критических линий на поверхности капли может быть рассмотрен аналогично [1].

Не задавая пока начального условия, ищем частные решения уравнения (1.1). Для этого введем новые переменные

$$(1.4) \quad \eta = P^{1/2} y f(\theta), \quad \zeta = \zeta(t, \theta)$$

и считаем, что концентрация $c = c(\eta, \zeta)$ зависит только от них. Тогда уравнение (1.1) принимает вид

$$(1.5) \quad \left(\zeta_t' - \frac{\Omega(t) f(\theta)}{\sin \theta} \zeta_{\theta}' \right) \frac{\partial c}{\partial \zeta} = f^2(\theta) \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2}$$

Если определить функцию $\zeta = \zeta(t, \theta)$ как решение уравнения

$$(1.6) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\Omega(t) f(\theta)}{\sin \theta} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} = f^2(\theta)$$

то задача о конвективной диффузии сведется к обычному уравнению теплопроводности

$$(1.7) \quad \partial c / \partial \zeta = \partial^2 c / \partial \eta^2.$$

Найдем теперь $\zeta = \zeta(t, \theta)$ из уравнения (1.6), которое эквивалентно следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(1.8) \quad \frac{dt}{1} = - \frac{\sin \theta d\theta}{\Omega(t) f(\theta)} = \frac{d\zeta}{f^2(\theta)}$$

Интегрируя первые два и последние два уравнения (1.8), получаем

$$(1.9) \quad G(t, \theta) = \int_0^t \Omega(\xi) d\xi + x(\theta) = C_1 \\ \zeta = - \int_{\theta_2}^{\theta} f(\xi) \sin \xi \Omega^{-1}[t(\xi, C_1)] d\xi + C_2, \quad x(\theta) = \int_{\theta_1}^{\theta} \sin \xi f^{-1}(\xi) d\xi$$

Здесь θ_1, θ_2 — некоторые углы, причем θ_1 не определяет критических точек поверхности капли ($f(\theta_1) \neq 0$), а функция $t_i^*(\theta, C_1)$ получена разрешением первого уравнения (1.9) относительно t , т. е. $G[t(\theta, C_1), \theta] \equiv C_1$. Отсюда получаем, что общим решением уравнения (1.6) будет (F — произвольная функция)

$$(1.10) \quad \zeta = - \int_{\theta_2}^{\theta} f(\xi) \sin \xi \Omega^{-1}[t(\xi, C_1)] d\xi + F[G(t, \theta)]$$

Функция ζ определяется с точностью до постоянной, а интеграл $x(\theta) \rightarrow \infty$ при $\theta \rightarrow \theta^-$ (для данного класса функций $f(\theta)$, определяемого свой-

ствами (1.3) и $f(\theta_1) \neq 0$), что следует из разложения $x(\theta)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\theta = \theta^-$. Поэтому, выбирая за θ_2 траекторию натекания $\theta_2 = \theta^-$ и полагая $F(\infty) = 0$, получаем следующую систему краевых условий для уравнения (1.7):

$$(1.11) \quad c(\eta, 0) = 1, \quad c(0, \zeta) = 0, \quad c(\infty, \zeta) = 1$$

Решение задачи (1.7), (1.11) имеет вид

$$(1.12) \quad c(\eta, \zeta) = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\eta\zeta^{-1/2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{1/2\eta\zeta^{-1/2}} \exp(-u^2) du$$

Начальное условие для исходной задачи (1.1) и (1.2), как видно из (1.9), задается выражением (1.12), где

$$(1.13) \quad \zeta(0, \theta) = \zeta_0 = - \int_{\theta^-}^{\theta} f(\xi) \sin \xi \Omega^{-1}[t(\xi, x(\xi))] d\xi + F[x(\theta)]$$

Для толщины диффузионного пограничного слоя δ , дифференциального и полного диффузионных потоков на поверхность капли из (1.4) и (1.12) получаем

$$(1.14) \quad \delta = \frac{1}{j}, \quad j(t, \theta) = \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{y=0} = \sqrt{\frac{P}{\pi}} \frac{f(\theta)}{\sqrt{\zeta(t, \theta)}}$$

$$I(t) = \int_{\sigma} j d\sigma = 2\pi \int_{\theta^+}^{\theta^-} j(t, \xi) \sin \xi d\xi$$

Поскольку $f(\theta^+) = 0$ и $\zeta(t, \theta^+) \neq 0$ (см. (1.3), (1.9) и (1.10), где $\theta_2 = \theta^-$), то толщина диффузионного пограничного слоя δ становится бесконечно большой в точке вытекания: $\delta \rightarrow \infty$, $\theta \rightarrow \theta^+$.

В случае установившегося обтекания $\Omega(t) = \Omega^{(0)} = \text{const}$, в силу того, что $F(\infty) = 0$, распределение концентрации и диффузионный поток на поверхность капли, как следует из (1.9), (1.10), (1.12) и (1.14), при $t \rightarrow \infty$ выходят на стационарный режим [1]

$$(1.15) \quad t \rightarrow \infty, \quad c \rightarrow \operatorname{erf}\left[\frac{1}{2}\eta\zeta^{-1/2}(\infty, \theta)\right]$$

$$j(\infty, \theta) = \sqrt{\frac{P}{\pi}} f(\theta) \zeta^{-1/2}(\infty, \theta), \quad \zeta(\infty, \theta) = - \frac{1}{\Omega^{(0)}} \int_{\theta^-}^{\theta} f(\xi) \sin \xi d\xi$$

Далее (см. п. 2) будем искать явный вид решения задачи (1.1), (1.2) с двумя различными начальными условиями

$$(1.16) \quad t = 0, \quad c = 1, \quad \zeta_0 = 0 \quad (F_{\alpha}(x) = \int_{\theta^-}^{\theta(x)} f(\xi) \sin \xi \Omega^{-1}[t(\xi, x)] d\xi)$$

$$(1.17) \quad t = 0, \quad c = \operatorname{erf}\left[\frac{1}{2}\eta\zeta_0^{-1/2}\right], \quad \zeta_0 = - \int_{\theta^-}^{\theta} f(\xi) \sin \xi d\xi$$

$$(F_{\beta}(x) = F_{\alpha}(x) + \zeta_0)$$

Функция $\theta = \theta(x)$ задается обращением функции $x = x(\theta)$, определенной в (1.9). Здесь и в дальнейшем все величины, относящиеся к первому (1.16) и второму (1.17) начальному условию, помечаются индексами

α и β . Как видно из (1.12) и (1.13), первое начальное условие означает, что при $t < 0$ концентрация в потоке была постоянна и потом внезапно началась реакция на поверхности капли (для потенциального установившегося обтекания сферической капли с поступательным потоком идеальной жидкости аналогичная задача рассматривалась в [2]). Второе условие соответствует тому, что в начальный момент времени распределение концентрации вещества в жидкости определяется стационарным режимом диффузии [1, 3], при этом $\Omega^{(0)} = 1$.

2. Конвективная диффузия к пузырю в случае однороднопоступательного и сдвигового потоков. Получим решение задачи (1.1), (1.2) с начальными условиями (1.16) и (1.17).

Рассмотрим процесс нестационарной диффузии к пузырю, обтекаемому неустановившимся однородно-поступательным и сдвиговым потоками. Зависимость от времени предполагаем следующей:

$$(2.1) \quad \Omega(t) = (1 + wt)^{-1}$$

Функция $\Omega(t)$ может быть представлена в виде

$$\Omega(t) = 1 + \Omega^{(1)}(t), \quad \Omega^{(1)}(t) = -wt(1 + wt)^{-1}$$

Такому полю скоростей вблизи поверхности соответствует суперпозиция установившегося потока [4] $\psi^{(0)} = 1/2 y \sin^2 \theta$ и неустановившегося $\psi^{(1)} = 1/2 \Omega^{(1)}(t) y \sin^2 \theta$. При малых временах функция $\Omega^{(1)}(t) \rightarrow -wt$, а при $t \rightarrow \infty$ выходит на предельное значение, равное минус единице.

Решение задачи (1.1), (1.2), (2.1) в дальнейшем может быть использовано для изучения нестационарной диффузии при установившемся обтекании ($w \rightarrow 0$). Кроме того, как будет видно из п. 4, несколько членов разложения этого решения при малом t (до первого члена, содержащего w , включительно) дадут асимптотику решения диффузионной задачи для равноускоренного поля течения.

Поступательный поток. Для поступательного потока функция тока определяется выражениями (1.2), (2.1), где $f(\theta) = 1/2 \sin^2 \theta$; угол $\theta^+ = 0$ определяет траекторию вытекания, а $\theta^- = \pi$ — втекания [4]. Используя результаты п. 1, получаем следующие первые интегралы системы (1.8):

$$(2.2) \quad \Omega(t) [(1 + \cos \theta) / (1 - \cos \theta)]^w = C_1$$

$$\zeta = - (2C_1)^{-1} \int_{\pi}^{\theta} \sin^3 \xi \operatorname{ctg}^{2w} \left(\frac{\xi}{2} \right) d\xi + C_2$$

Отсюда находим выражения для переменных ζ , η при первом (1.16) и втором (1.17) начальных условиях соответственно

$$(2.3) \quad \zeta_{\alpha} = 4\Omega^{-1}(t) \operatorname{tg}^{2w}(\theta/2) [B(\cos^2(\theta/2), 2+w, 2-w) - B(z(t, \theta), 2+w, 2-w)]$$

$$\zeta_{\beta} = \zeta_0^* + \zeta_{\alpha}, \quad \eta_{\alpha} = \eta_{\beta} = 1/2 P^{1/2} y \sin^2 \theta$$

$$\zeta_0^* = 2z^2 - 4/3 z^3, \quad \zeta_0^* |_{t=0} = \zeta_0$$

$$z = z(t, \theta) = [1 + \Omega^{-1/w}(t) \operatorname{tg}^2(\theta/2)]^{-1}, \quad B(\chi, p, q) =$$

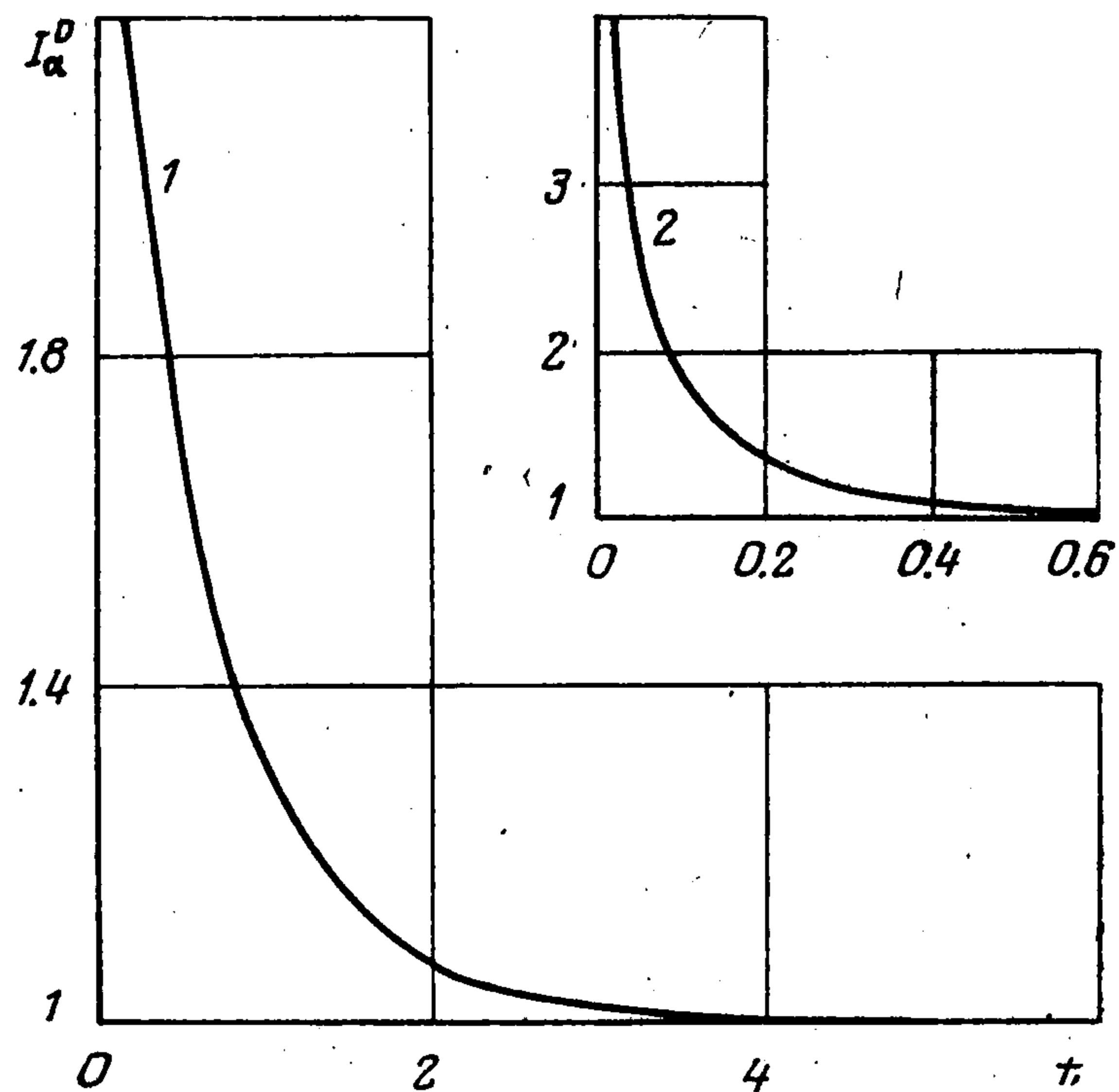
$$= \int_0^{\chi} \xi^{p-1} (1 - \xi)^{q-1} d\xi$$

Здесь $B(\chi, p, q)$ — неполная бета-функция, толщина диффузионного пограничного слоя и диффузионные потоки на поверхность пузыря определяются выражениями (1.14) и (2.3).

При $w > 0, t \rightarrow \infty$ имеем следующее асимптотическое представление для ζ :

$$(2.4) \quad t \rightarrow \infty, \quad \zeta_{\alpha, \beta} \rightarrow 4\Omega^{-1}(t) \operatorname{tg}^{2w}(\theta/2) B(\cos^2(\theta/2), 2+w, 2-w)$$

Поэтому полный и локальный диффузионные потоки (1.14) при больших временах выходят на один и тот же режим и стремятся к нулю обратно пропорционально \sqrt{t} . Последнее означает, что толщина диффузионного погранслоя δ растет пропорционально \sqrt{t} , т. е. при достаточно больших временах приближение диффузионного погранслоя (1.1) становится непригодным и нужно рассматривать процесс диффузии без учета конвективного переноса. Это ясно и из того, что при больших временах скорость пузыря становится малой, а это соответствует малым числам Пекле.



Рассмотрим теперь случай установившегося обтекания. Для этого в выражении (2.3) устремим w к нулю. Отметим, что в рассматриваемом случае в задаче о конвективной диффузии с начальным условием (1.17) имеем обычную стационарную диффузию [1-3]. Поэтому представляет интерес задача (1.1) с начальным условием (1.16), поскольку именно здесь при установившемся обтекании имеет место нестационарная диффузия.

Учитывая, что $\Omega^{-1/w}(t) \rightarrow e^t$ при $w \rightarrow 0$, из (2.3) получаем

$$(2.5) \quad \zeta_{\alpha}(t, \theta) = 1/2 [\cos \theta - 1/3 \cos^3 \theta + 1/3 (V - 1)^3 (V + 1)^{-3} - (V - 1) \cdot (V + 1)^{-1}]$$

$$V = V(t, \theta) = e^{-t} \operatorname{ctg}^2(\theta / 2)$$

Отсюда, используя замену $\lambda = \cos \theta$, найдем выражение для полного диффузионного потока на поверхность пузыря

$$(2.6) \quad I_{\alpha}(t) = \sqrt{6\pi P} \int_{-1}^1 \frac{(1 - \lambda^2) d\lambda}{\sqrt{3\lambda - \lambda^3 + H^3 - 3H}}$$

$$H = H(t, \lambda) = \frac{\lambda - \operatorname{th}(t/2)}{1 - \lambda \operatorname{th}(t/2)}$$

$$I_{\alpha} \rightarrow 4/3 \sqrt{6\pi P}, \quad t \rightarrow \infty$$

Зависимость $I_{\alpha}^0 = I_{\alpha}(t) / I_{\alpha}(\infty)$ представлена на фигуре (кривая 1). Видно, что полный поток на поверхность пузыря быстро (экспоненциально) выходит на стационарный режим ($t \rightarrow \infty, [3]$).

Сдвиговой поток. В случае сдвигового потока функция тока вблизи поверхности пузыря определяется соотношениями (1.2), (2.1), где $f(\theta) = 3 \sin^2 \theta \cos \theta$; $\theta_1^+ = 0$, $\theta_2^+ = \pi$ — траектории вытекания, а $\theta_1^- = \pi/2$ — натекания [5].

Первыми интегралами системы (1.9) будут

$$(2.7) \quad \frac{\Omega(t)}{\operatorname{tg}^\gamma \theta} = C_1, \quad \zeta = \left(\frac{3}{2}\right) C_1^{-1} \int_0^{\cos^2 \theta} \lambda^{\gamma/2} (1-\lambda)^{1-\gamma/2} d\lambda + C_2, \quad \gamma = \frac{w}{3}$$

(в последнем интеграле была сделана замена $\lambda = \cos^2 \theta$). Толщина δ и диффузионные потоки j и I определяются формулами (1.14), где переменные ζ , η при первом (1.16) и втором (1.17) начальных условиях соответственно будут следующими:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \zeta_\alpha &= {}^{3/2}\Omega^{-1}(t) \operatorname{tg}^\gamma \theta [B(\cos^2 \theta, 1 + \gamma/2, 2 - \gamma/2) - \\ &- B(m(t, \theta), 1 + \gamma/2, 2 - \gamma/2)] \\ \zeta_\beta &= \zeta_0^* + \zeta_\alpha, \quad \eta_\alpha = \eta_\beta = 3P^{1/2} y \sin^2 \theta \cos \theta \\ \zeta_0^* &= {}^{3/4}[1 - \Omega^{-4/\gamma}(t) \operatorname{tg}^4 \theta m^2(t, \theta)], \quad \zeta_0^*|_{t=0} = \zeta_0 \\ m(t, \theta) &= [1 + \operatorname{tg}^2 \theta \Omega^{-2/\gamma}(t)]^{-1} \end{aligned}$$

Отсюда при $w > 0$ ($\gamma > 0$) и больших временах получаем асимптотическое выражение для ζ

$$(2.9) \quad t \rightarrow \infty, \quad \zeta_{\alpha, \beta} \rightarrow {}^{3/2}\Omega^{-1}(t) \operatorname{tg}^\gamma \theta B(\cos^2 \theta, 1 + \gamma/2, 2 - \gamma/2)$$

Из (2.9) видно, что в данном случае функция ζ при $t \rightarrow \infty$ ведет себя аналогично соответствующей функции ζ в случае однородно-поступательного потока, поэтому все сказанное выше остается справедливым и здесь.

Устремляя в (2.8) $w \rightarrow 0$ ($\gamma \rightarrow 0$), получаем задачу о конвективной диффузии при установившемся обтекании. Здесь, как и для поступательного потока, при установившемся обтекании пузыря, задача (1.1), (1.17) приводит к решению, описывающему стационарную диффузию [6].

Решение задачи (1.1), (1.16) получаем предельным переходом при $w \rightarrow 0$ ($\gamma \rightarrow 0$) в выражении (2.8). Для переменной ζ_α и полного диффузионного потока имеем

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \zeta_\alpha &= -{}^{3/4}[\sin^4 \theta - (e^{-\delta t} \operatorname{ctg}^2 \theta + 1)^{-2}] \\ I_\alpha &= 4\sqrt{3\pi P} \operatorname{cth}^{1/2}(3t); \quad I_\alpha \rightarrow 4\sqrt{3\pi P}, \quad t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Зависимость $I_\alpha^\circ = I_\alpha(t) / I_\alpha(\infty)$ представлена на фигуре (кривая 2). В этом случае также имеет место экспоненциальный выход полного диффузионного потока на стационарный режим.

3. Поле скоростей жидкости при неустановившемся обтекании пузыря при малых числах Рейнольдса. Как видно из результатов п. 1, 2, для решения задачи о конвективной диффузии к поверхности пузыря при неустановившемся обтекании необходимо по заданному распределению скоростей жидкости вдали от него определить поле течения вблизи поверхности, т. е. найти конкретный вид функции $\Omega(t)$ в (1.2).

Рассмотрим здесь поступательный и сдвиговый потоки на бесконечности. В частности, первый случай реализуется при подъеме пузыря в вязкой жидкости, а ситуация, аналогичная второму случаю, имеет место, например, при движении пузыря в конфузоре (диффузоре) в условиях конического сходящегося (расходящегося) потока.

Запишем в безразмерных переменных уравнение и начальное условие для функции тока $\psi = \psi^{(0)}(r, \theta) + \psi^{(1)}(\tau, r, \theta)$ ($\psi^{(0)}$ — функция тока, соответствующая установившемуся движению при $\tau \leq 0$)

$$(3.1) \quad E^2 \left(E^2 - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \psi_n^{(1)} = 0, \quad \psi_n^{(1)}(0, r, \theta) = 0 \quad (n = 1, 2)$$

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

$$\left(v_r^{(1)} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \theta}, \quad v_\theta^{(1)} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r} \right)$$

где $n = 1$ соответствует однородно-поступательному потоку, $n = 2$ — сдвиговому (здесь и в дальнейшем, где это не приводит к путанице, индекс n снизу у функций опускается); $v_r^{(1)}, v_\theta^{(1)}$ — компоненты скорости жидкости. В качестве масштабов длины, времени и скорости выбраны радиус пузыря a , время $a^2 \nu^{-1}$ (ν — кинематическая вязкость жидкости) и характерная скорость течения $U = U_0(2 - n) + \alpha_0 a(n - 1)$ (U_0 — скорость потока на бесконечности ($n = 1$), α — коэффициент сдвига ($n = 2$)).

Граничные условия, выражающие непроницаемость границы пузыря, отсутствие на ней касательных напряжений, а также поведение функции тока на бесконечности имеют вид

$$(3.2) \quad r = 1, \quad v_r^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} v_\theta^{(1)} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} v_r^{(1)} = 0$$

$$r \rightarrow \infty, \quad \psi^{(1)} \rightarrow \frac{1}{2} n u^{(1)}(\tau) r^{n+1} \sin^2 \theta \cos^{n-1} \theta \quad (u^{(1)}(0) = 0)$$

Решение задачи (3.1), (3.2) ищем в виде

$$\psi^{(1)} = \Phi(r, \tau) \sin^2 \theta \cos^{n-1} \theta$$

Применяя к (3.1) преобразование Лапласа, получаем следующее уравнение для изображений:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2(2n-1)}{r^2} \right] \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2(2n-1)}{r^2} - s \right] \Phi^* = 0$$

$$\Phi^*(r, s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} \Phi(r, \tau) d\tau$$

Используя перестановочность операторов, стоящих в левой части этого уравнения, находим его общее решение

$$\Phi^* = A_1 r^{n-1} + A_2 r^{-n} + r^{n+1} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{n+1} [A_3 \exp(s^{1/2} r) + A_4 \exp(-s^{1/2} r)]$$

Определяя постоянные A_j из граничных условий (3.2), получаем следующие выражения для нестационарной добавки к функции тока:

$$(3.3) \quad \psi^{(1)} = \sin^2 \theta \cos^{n-1} \theta \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{s\tau} \Phi^*(r, s) ds$$

$$\Phi^* = u^*(s) \{ r^{n+1} - [1 + 2s^{-1} \kappa_n(1, s)] r^{-n} + 2s^{-1} \kappa_n(r, s) r^{-n} \exp[s^{1/2}(1-r)] \}$$

$$\kappa_1(r, s) = 3(1 + s^{1/2} r) / (3 + s^{1/2}), \quad \kappa_2(r, s) = 5(3 + 3s^{1/2} r + sr^2) / (5 + 5s^{1/2} + s)$$

где $u^*(s)$ — изображения функций $u^{(1)}(\tau)$. Отметим, что выражение (3.3) для Φ^* в случае поступательного потока ($n = 1$) было найдено ранее (см., например, [7-9]).

Предельный переход в изображениях $s \rightarrow \infty$ соответствует $\tau \rightarrow 0$ в оригиналах, поэтому из выражений (3.3) получаем

$$(3.4) \quad \tau \rightarrow 0, \quad \psi^{(1)} \rightarrow \frac{1}{2} n u^{(1)}(\tau) (r^{n+1} - r^{-n}) \sin^2 \theta \cos^{n-1} \theta$$

В дальнейшем понадобится поле скоростей жидкости вблизи поверхности пузыря. Разлагая (3.3) в ряд по $y = r - 1$, получаем

$$(3.5) \quad \psi^{(1)} = \frac{1}{2} n K^{(1)}(\tau) y \sin^2 \theta \cos^{n-1} \theta + O(y^2)$$

$$K^{(1)}(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{s\tau} \kappa(1, s) u^*(s) ds$$

Так как $\tau = t/R$, ($R = Ua/\nu$ — число Рейнольдса), то из (3.5) следует, что в случае однородно-поступательного ($n = 1$) и сдвигового ($n = 2$) потоков функцию тока вблизи поверхности частицы можно представить в виде (1.2), где $\Omega(t) = \Omega^{(0)} + \frac{1}{2} \Omega^{(1)} = [2n - 1 + K^{(1)}(\tau)]n/2$.

Зависимости $\kappa(1, s)$ обладают свойствами

$$s \rightarrow 0, \quad \kappa(1, s) \rightarrow 2n - 1; \quad s \rightarrow \infty, \quad \kappa(1, s) \rightarrow 2n + 1$$

Это означает, что если существуют соответствующие пределы, то выполняются соотношения

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \tau \rightarrow 0, \quad K^{(1)}(\tau) &\rightarrow (2n + 1) u^{(1)}(\tau) \\ \tau \rightarrow \infty, \quad K^{(1)}(\tau) &\rightarrow (2n - 1) u^{(1)}(\tau) \end{aligned}$$

Отметим, что первое соотношение в (3.6) можно получить также из (3.4) при помощи разложения в ряд по малой величине $y = r - 1$.

Рассмотрим один точный пример получения функций $K^{(1)}(\tau)$. Для этого возьмем функции $u^{(1)}(\tau)$ в виде

$$u_1^{(1)}(\tau) = \tau + \frac{2}{3} \sqrt{\tau/\pi}, \quad u_2^{(1)}(\tau) = \frac{1}{3} \sqrt{\tau/\pi} (20\tau + 15\sqrt{\pi\tau} + 6)$$

Отсюда, используя (3.5), получаем

$$K_1^{(1)}(\tau) = \tau + 2\sqrt{\tau/\pi}, \quad K_2^{(1)}(\tau) = 5\sqrt{\tau/\pi} (4\tau + 3\sqrt{\pi\tau} + 2)$$

Итак, для определения поля скоростей вблизи поверхности пузыря (т. е. для определения функции $\Omega(t)$) по заданному течению вдали от частицы необходимо определить функцию $K^{(1)}(\tau)$ в формуле (3.5), т. е. выполнить обращение преобразования Лапласа от известных функций. Затем, учитывая, что $\tau = t/R$, перейти к представлению (1.2) и решить соответствующую диффузионную задачу (п. 1, 2). Для произвольных времен требуется применение численных методов. В случае $t \rightarrow 0$ можно получить аналитическое решение (см. п. 4).

4. Асимптотическое поведение решений при малых временах. Исследуем асимптотическое поведение решений задачи (1.1) с начальными условиями (1.16) и (1.17) при $t \rightarrow 0$. Для поступательного обтекания пузыря, устремляя t к нулю в (1.14) и (2.3), получаем следующие асимптотические выражения для полных диффузионных потоков:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} t \rightarrow 0, \quad I_\alpha(t) &= 4\sqrt{\pi P/t} [1 + (5/72)t^2 - (7/72)wt^3 + O(t^4)] \\ I_\beta(t) &= \frac{4}{3}\sqrt{6\pi P} [1 - \frac{3}{5}(2\sqrt{3} - 3)wt^2 + O(t^3)] \end{aligned}$$

Устремляя t к нулю в (1.14) и (2.8), находим соответствующие асимптотические формулы для полных потоков в случае сдвигового обтекания

$$(4.2) \quad \begin{aligned} t \rightarrow 0, \quad I_\alpha(t) &= 4\sqrt{\pi P/t} [1 + \frac{3}{2}t^2 - \frac{6}{7}(81 + 7w)t^3 + O(t^4)] \\ I_\beta(t) &= 4\sqrt{3\pi P} [1 - \frac{3}{4}(3\pi - 8)wt^2 + O(t^3)] \end{aligned}$$

Из выражений (4.1), (4.2) следует, что в случае первого начального условия полный диффузионный поток при $t \rightarrow 0$ стремится к бесконечности. Это является следствием несогласованности начального $c(0, 0, \theta) = 0$ и граничного $c(0, y \rightarrow +0, \theta) = 1$ условий в (1.16), (1.1).

Формулы для полных диффузионных потоков (4.1), (4.2) остаются справедливыми при $t \rightarrow 0$ для любой функции $K(\tau)$, определяемой как

$$\psi = \frac{1}{2} n K(\tau) y \sin^2 \theta \cos^{n-1} \theta, \quad K(\tau) = 2n - 1 + K^{(1)}(\tau) \\ K^{(1)}(0) = 0; \quad \partial K / \partial t \rightarrow -(2n - 1)w, \quad t \rightarrow 0, \quad (\tau = R^{-1}t)$$

с точностью до первого члена, содержащего коэффициент w , в разложении по степеням t . Учитывая это свойство и используя коэффициенты перехода (3.6), исследуем конвективную диффузию к поверхности пузыря при его равноускоренном движении, определяемом как

$$r \rightarrow \infty, \quad \psi \rightarrow \frac{1}{2} n u(\tau) r^{n+1} \sin^2 \theta \cos^{n-1} \theta \\ u(\tau) = 1 + u^{(1)}(\tau) = 1 + \frac{2n - 1}{2n + 1} b\tau$$

Здесь коэффициент перед $b\tau$ выбран для удобства. При малых τ этому выражению соответствуют следующие значения функций $K(\tau)$ и $\Omega(t)$:

$$(4.3) \quad K(\tau) = (2n - 1)(1 + b\tau) \quad (\tau = R^{-1}t) \\ \Omega(t) = 1 + bR^{-1}t$$

Из соотношений (4.3) следует, что $w = -bR^{-1}$. Поэтому, используя формулы (4.1), (4.2), получаем следующие выражения для полных диффузионных потоков в случае поступательного ($n = 1$) и сдвигового обтекания ($n = 2$):

$$(4.4) \quad I_{\beta}(t) = I_{\beta}(0) [1 + M_n b R^{-1} t^2 + o(t^2)] \\ M_1 = \frac{3}{5} (2\sqrt{3} - 3), \quad M_2 = \frac{3}{4} (3\pi - 8)$$

Видно, что в формулах (4.4) отсутствует первый член разложения I_{β} в ряд по t . Второй член содержит множителем $1/R$, который при учете введенных предположений ($R \ll 1$) делает вклад этого члена в полный диффузионный поток существенным. Отметим, что полный поток увеличивается при ускорении пузыря, а при замедлении уменьшается.

Поступила 31 X 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. Диффузия к частице при больших числах Пекле в случае произвольного осесимметричного обтекания вязкой несжимаемой жидкостью. ПММ, 1976, т. 40, вып. 5.
2. Chao B. T. Transient heat and mass transfer to translating droplet. Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Transfer, 1969, vol. 91, No. 2.
3. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
4. Бэтчелор Д. Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
5. Taylor G. I. Viscosity of a fluid containing small drops of another fluid. Proc. Roy. Soc. A, 1932, vol. 138, No. 834.
6. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С. Диффузия к частице в случае сдвигового течения вязкой жидкости. Приближение диффузионного пограничного слоя. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
7. Sy F., Taunton J. W., Lightfoot E. N. Transient creeping flow around spheres. AIChE J., 1970, vol. 16, No. 3.
8. Sy F., Lightfoot E. N. Transient creeping flow around fluid spheres. AIChE J., 1971, vol. 17, No. 1.
9. Morrison F. A., Stewart M. B. Small bubble motion in an accelerating liquid. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1976, vol. 43, No. 3.