Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 62-50

О РАЗНОСТНЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ СИСТЕМ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Б. Ш. Мордухович

(Минск)

Исследуются вопросы аппроксимации задач оптимального управления с непрерывным временем последовательностями конечномерных задач оптимизации (с дискретным временем), которые возникают при разностных заменах производных. При минимальных предположениях получено необходимое и достаточное условие сходимости дискретных (конечно-разностных) аппроксимаций по функционалу, указаны оценки скорости сходимости. Полученные результаты позволяют обосновать численные методы решения задач оптимального управления на ЭЦВМ и исследовать во взаимосвязи ряд качественных вопросов оптимизации непрерывных и дискретных систем управления.

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления для систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$x^{\cdot} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.1}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1] \tag{1.2}$$

$$x(t) \in G(t) \subset \mathbf{R}^n, \quad t \in T \tag{1.3}$$

$$I = \varphi(x(t_1)) \to \inf \tag{1.4}$$

Вектор $x_0 \in \mathbf{R}^n$ в (1.1) и моменты времени t_0, t_1 считаем фиксированными. Решение задачи (1.1) — (1.4) (ее для удобства будем называть задачей A) ищется в классе измеримых управлений $u(t)$ и абсолютно непрерывных траекторий $x(t)$, причем предполагается, что существует хотя бы одна допустимая пара $\{x(t), u(t)\}$, $t \in T$. Отметим, что к задаче A сводится ряд других задач оптимизации для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с фиксированным и нефиксированным временем при наличии фазовых и интегральных ограничений.

Аппроксимируем задачу A последовательностью задач A_N дискретной оптимизации, которые получаются из A путем разностной замены производной $x^{\cdot}(t)$ в заданных точках разбиения отрезка T. Для каждого натурального N рассмотрим сеточное разбиение $T_N = \{t_0, t_0 + h_{1N}, \ldots$ $\ldots, t_1\}$ отрезка T с переменным шагом h_{kN}, $k = 1, \ldots, m(N)$ и множество $G_N(t) \subset \mathbf{R}^n$, $t \in T$, аппроксимирующее ограничение (1.3). Задача A_N состоит в минимизации функционала (1.4) при следующих ограничениях:

$$x_N(t + h_{kN}) = x_N(t) + h_{kN} f(x_N(t), u_N(t), t) \tag{1.5}$$

$$x_N(t_0) = x_0, \quad t = t_0 + \sum_{i=1}^{k-1} h_{iN}, \quad k = 1, \ldots, m(N)$$

(1.6) $$u_N(t)\in U, \quad t\in T_N \setminus t_1 = T_N{}^1$$

(1.7) $$x_N(t)\in G_N(t), \quad t\in T_N$$

Введем обозначения

$$h_N = \max_{1\leqslant k\leqslant m(N)} h_{kN}, \quad \beta_N = \sup_{t\in T}\ \sup_{x\in G_N(t)}\ \inf_{z\in G(t)} \| x-z \|$$

где $\|\cdot\|$ — некоторая норма в пространстве $\mathbf{R}^n$. Последовательность задач $\{A_N\}$, $N = 1, 2, \ldots$ назовем дискретной аппроксимацией задачи A, если $h_N \to 0$, $\beta_N \to 0$ при $N \to \infty$. При этом последовательность множеств $\{G_N(t)\}$, $N = 1, 2, \ldots$ будем называть ρ_N-аппроксимацией множества $G(t)$, если для всех $t\in T$

(1.8) $$G_N(t) \supset [G(t)]_{\rho_N} \overset{\text{def}}{=} \{x\in \mathbf{R}^n:\ \inf_{z\in G(t)} \|x-z\| \leqslant \rho_N\}, \quad N = 1, 2, \ldots$$

Цель данной статьи — нахождение условий, при которых оптимальные значения минимизируемого функционала в задачах A_N при больших N как угодно близки к оптимальному значению функционала (1.4) в задаче A (имеет место сходимость $A_N \to A$ по функционалу). Этим обосновывается прямой метод решения задач оптимального управления с фазовыми ограничениями, связанный с разностными заменами производных и переходом к конечномерным задачам дискретной оптимизации.

Впервые подобные исследования для линейной задачи быстродействия были проведены Н. Н. Красовским [1]. Дальнейшие результаты в данном направлении имеются в работах [2–8] и др., где получен ряд достаточных условий сходимости дискретных аппроксимаций по функционалу для задач рассматриваемого типа при разных способах аппроксимаций ограничений (1.2), (1.3)

В предлагаемой работе развивается новый подход к исследованию дискретных аппроксимаций общих задач оптимального управления и получено необходимое и достаточное условие сходимости $A_N \to A$ по функционалу с оценками скорости сходимости. При доказательстве теорем используются методы теории существования оптимальных управлений [9].

Полученные результаты находят применение при построении аппроксимаций и доказательстве по схеме [10] принципа максимума в негладких задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями.

2. Корректность по расширению. В дальнейшем будем предполагать выполнение следующих общих условий на параметры рассматриваемых задач:

а) область управления U — метрический компакт;

б) множества $G(t)$, $G_N(t)$ замкнуты в $\mathbf{R}^n$ для всех $t\in T$, причем $G(t)$ полунепрерывно сверху во всех точках $t\in (t_0, t_1)$, которые не являются общими для последовательности разбиений $T_N{}^1$, $N \geqslant N_0$;

в) допустимые траектории задач A, A_N, $N \geqslant N_0$ не выходят за пределы некоторого шара $S_r = \{x\in R^n : \|x\| \leqslant r\}$, $0 < r < \infty$ (достаточные для этого условия приведены, например, в [9]);

г) функции $f(x, u, t)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на множествах $Z = S_r \times U \times T$ и S_r соответственно:

д) задача Коши (1.1), (1.2) имеет единственное решение.

Наряду с исходной задачей A рассмотрим вспомогательную задачу B оптимального управления, которая является расширением задачи A в форме Р. В. Гамкрелидзе [9, 11]: минимизировать функционал (1.4) на множестве измеримых управлений $\{\alpha_i(t), u_i(t),\ i = 1, \ldots, n+1\}$ и абсолютно непрерывных траекторий $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, удовлетворяющих ограничениям (1.3) и следующим связям:

$$x^{\cdot} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x, u_i, t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{2.1}$$

$$\alpha_i(t) \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(t) = 1, \quad u_i(t) \in U(t) \tag{2.2}$$

$$t \in T, \ i = 1, \ldots, n+1$$

Обозначим через I_A°, I_B°, I_N°, $N = 1, 2, \ldots$ минимальные значения функционала (1.4) в задачах A, B и A_N соответственно.

Следуя [12], задачу A назовем корректной по расширению, если $I_A^\circ = I_B^\circ$. Корректность по расширению — естественное свойство систем управления, которое нарушается, как правило, лишь в специальных, «плохо поставленных» задачах оптимизации.

Ряд общих условий корректности получен в работах [13, 14] и др. (см. [9]), где выделены широкие классы корректных по расширению задач оптимального управления с невыпуклым множеством допустимых скоростей. В частности, корректными будут задачи A без фазовых ограничений (1.3), с линейной по состоянию или одномерной правой частью, нормальные в смысле принципа максимума [14] и т. д.

Ниже будет доказано, что корректность по расширению служит необходимым и достаточным условием сходимости дискретных аппроксимаций по функционалу.

3. Аппроксимации непрерывных кривых. Докажем возможность равномерной аппроксимации допустимых траекторий задачи A последовательностью соответствующих траекторий дискретных систем.

Пусть $\{x_N(t), u_N(t)\}$ — дискретная пара, удовлетворяющая соотношениям (1.5), (1.6). Для произвольной точки $t \in T$ обозначим через t^N и t_N ближайшие слева и справа элементы разбиения T_N и рассмотрим кусочно-линейное продолжение траектории $x_N(t)$ на весь отрезок T

$$x_N(t) = x_N(t^N) + \frac{1}{t_N - t^N}[x_N(t_N) - x_N(t^N)](t - t^N), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. Пусть выполняются условия а), в) — д). Тогда для любой допустимой в (1.1) — (1.3) траектории $x(t)$ при любом выборе последовательности разбиений $\{T_N\}$, $N = 1, 2, \ldots$ отрезка T найдется подпоследовательность дискретных пар $\{x_N(t), u_N(t)\}$, $N \to \infty$, $N \in \Lambda$, такая, что выполняются соотношения (1.5), (1.6), и продолжения (3.1) равномерно на T сходятся к $x(t)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда управление $u(t)$, соответствующее выбранной траектории $x(t)$ в силу (1.1), (1.2), непрерывно почти во всех точках отрезка T.

По заданной функции $u(t)$ образуем дискретные управления $u_N(t) = u(t)$, $t \in T_N{}^1$, $N = 1, 2, \ldots$ и покажем, что соответствующая последовательность траекторий $x_N(t)$ системы (1.5) равномерно на T сходится к $x(t)$. В силу (1.5), (3.1) имеем

$$x_N^{\boldsymbol{\cdot}}(t) = f(x_N(t^N), \quad u_N(t^N), t^N), \qquad t \in T \diagdown T_N \tag{3.2}$$

Из условий теоремы заключаем, что последовательность $\{x_N(t)\}$, $t \in T$, $N = 1, 2, \ldots$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна, следовательно, содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность. Обозначим через $x^*(t)$ любую предельную в $C(T)$ точку последовательности $\{x_N(t)\}$, $N = 1, 2, \ldots$ и докажем, что $x^*(t) \equiv x(t)$.

Рассмотрим функции $h_N(t) = f(x_N(t^N), u_N(t^N), t^N)$ на всем отрезке T. Из непрерывности почти всюду на T управления $u(t)$ и построения дискретных управлений $u_N(t)$ следует, что последовательность $\{h_N(t)\}$ сходится к функции $f(x^*(t), u(t)\, t)$ почти всюду. Перейдя к пределу в выражении

$$x_N(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} h_N(\tau)\, d\tau, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1$$

и воспользовавшись теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [15], получаем, что функция $x^*(t)$ — решение системы (1.1) при $u = u(t)$.

Требуемое равенство $x^*(t) \equiv x(t)$ вытекает теперь из единственности решения задачи Коши (1.1) при $u = u(t)$, что доказывает теорему в случае, когда управление $u(t)$ почти всюду непрерывно.

Общий случай измеримого управления $u(t)$ сводится к уже рассмотренному с помощью следующего утверждения.

Любая измеримая функция $u(t)$, удовлетворяющая ограничению (1.2), может быть аппроксимирована в смысле сходимости по мере последовательности почти всюду непрерывных на T функций с тем же ограничением. При этом сходимость соответствующих траекторий будет равномерной.

Для доказательства данного утверждения воспользуемся теоремой Лузина (C-свойство измеримых функций) [15]. Рассмотрим произвольную последовательность положительных чисел $\varepsilon_k \to 0$, $k = 1, 2, \ldots$ и найдем замкнутые множества T_{ε_k}, такие, что $\operatorname{mes}(T \diagdown T_{\varepsilon_k}) \leqslant \varepsilon_k$ и сужение функции $u(t)$ на T_{ε_k} непрерывно.

Множества $T \diagdown T_{\varepsilon_k}$ можно представить в виде объединения счетного числа непересекающихся интервалов $(\alpha_{jk}, \beta_{jk})$, $j = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим функции

$$u_k(t) = \begin{cases} u(t), & t \in T_{\varepsilon_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots \\ u(\alpha_{jk}), & t \in (\alpha_{jk}, \beta_{jk}), \quad j = 1, 2 \ldots \end{cases} \tag{3.3}$$

Из построения (3.3) заключаем, что функции $u_k(t)$ могут терпеть разрыв лишь в точках $t = \beta_{jk}$, $j = 1, 2, \ldots$. Кроме того, $\operatorname{mes}\{t: u_k(t) \neq u(t)\} \leqslant \varepsilon_k$, что обеспечивает сходимость $u_k(t) \to u(t)$ по мере.

Таким образом, последовательность $\{u_k(t)\}$, $k = 1, 2, \ldots$ — искомая. Равномерная сходимость соответствующих траекторий следует из теоремы Лебега [15].

4. Сходимость по функционалу. Сформулируем и докажем основной результат — теорему о сходимости дискретных аппроксимаций по функционалу.

Теорема 4.1. Пусть выполняются предположения а) — д). Тогда для последовательности разбиений $\{T_N\}$ отрезка T найдется числовая последовательность $\{\rho_N\}$, $N \to \infty$, $N \in \Lambda$, $\rho_N \to 0$, такая, что при любой ρ_N-аппроксимации $\{G_N(t)\}$ множества $G(t)$ имеют место неравенства

$$I_B{}^\circ \leqslant \liminf_{N\to\infty,\, N\in\Lambda} I_N{}^\circ \leqslant \limsup_{N\to\infty,\, N\in\Lambda} I_N{}^\circ \leqslant I_A{}^\circ \tag{4.1}$$

которые гарантируют сходимость $A_N \to A$ по функционалу при условии корректности по расширению задачи A.

Если функция $f(x, u, t)$ удовлетворяет условию Липшица по x на множестве $Z = S_r \times U \times T$, то справедливо и обратное утверждение: из сходимости $A_N \to A$ по функционалу при любой ρ_N-аппроксимации множества $G(t)$ следует корректность задачи A по расширению.

Доказательство. Пусть $\{x_k(t)\}$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $k = 1, 2, \ldots$ — минимизирующая последовательность допустимых траекторий в задаче A. Из условий теоремы заключаем, что последовательность $\{x_k(t)\}$ относительно компактна в пространстве $C(T)$. Следовательно, найдется подпоследовательность из $\{x_k(t)\}$, $k = 1, 2, \ldots$, которая равномерно на T сходится к абсолютно непрерывной функции $x^\circ(t)$, реализующей инфимум функционала (1.4) в задаче A.

Пусть $\{T_N\}$, $N = 1, 2, \ldots$ — любая последовательность разбиений отрезка T с максимальным шагом разбиения $h_N \to 0$. Воспользовавшись теоремой 3.1, можно подобрать подпоследовательность допустимых в (1.5), (1.6) дискретных траекторий $x_N(t)$, $N \to \infty$, $N \in \Lambda$, непрерывные продолжения которых равномерно на T сходятся к указанному пределу $x^\circ(t)$.

Рассмотрим произвольную последовательность дискретных задач A_N, в которых множества $G_N(t)$ образуют ρ_N-аппроксимацию множества $G(t)$, а числа ρ_N выбраны из условия

$$\rho_N \geqslant \max_{t_0\leqslant t\leqslant t_1} \|x^\circ(t) - x_N(t)\|, \quad \rho_N \to 0, \quad N \to \infty, \quad N \in \Lambda \tag{4.2}$$

Докажем, что для рассматриваемой последовательности задач A_N выполняются соотношения (4.1). Вначале докажем справедливость правого из неравенств (4.1).

Предположим, что это не так, т. е. для некоторой подпоследовательности $\Lambda_1 = \{N\} \subset \Lambda$ выполняется неравенство

$$\lim_{N\to\infty,\, N\in\Lambda_1} \overset{\circ}{I_N} > I_A{}^\circ = \varphi(x^\circ(t_1))$$

В таком случае для достаточно больших $N \in \Lambda_1$ будем иметь

$$I_N{}^\circ > \varphi(x_N(t_1)) \tag{4.3}$$

Из построения задач A_N вытекает, что траектории $x_N(t)$ являются в них допустимыми, так как в силу (1.3), (1.8) и (4.2) справедливы включения

$$x_N(t) \in [G(t)]_{\rho_N} \subset G_N(t), \quad t \in T_N$$

Следовательно, (4.3) не может иметь места, т. е. выполняется правое из неравенств (4.1).

Для доказательства левого из неравенств (4.1) достаточно показать, что равномерный предел последовательности допустимых в задачах A_N траекторий $x_N(t)$, $t \in T$ — допустимая траектория расширенной задачи B.

Из условия б) следует, что предельная функция $x(t)$ удовлетворяет ограничениям (1.3). Докажем, что для почти всех $t \in T$ справедливо включение

$$x^{\cdot}(t) \in R(x(t), t) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{conv} f(x(t), U, t) \tag{4.4}$$

$$f(x, U, t) = \{v \in \mathbf{R}^n\colon v = f(x, u, t), \ u \in U\}$$

Здесь $f(x, U, t)$ — множество допустимых в (1.1), (1.2) скоростей, $\operatorname{conv} V$ означает выпуклую оболочку множества V.

С помощью теорем измеримого выбора [9] можно вывести из (4.4), что траектория $x(t)$ реализуется в (2.1), (2.2) на измеримом управлении $\{\alpha_i(t), u_i(t), i = 1, \ldots, n+1\}$, т. е. будет допустимой в задаче B.

Для доказательства (4.4) возьмем любое $\varepsilon > 0$ и запишем включение

$$x_N^{\cdot}(t) = f(x_N(t^N), \quad u_N(t^N), t^N) \in [f(x(t), U, t)]_\varepsilon$$

которое справедливо для всех $N \geqslant N_0$ и почти всех $t \in T$.

В силу условий теоремы можно заключить, что последовательность $\{x_N^{\cdot}(t)\}$, $N \geqslant N_0$ слабо в $L_2(T)$ сходится к $x^{\cdot}(t)$. Применяя к этой последовательности теорему Мазура о слабом замыкании [15], получаем, что $x^{\cdot}(t) \in$ $\in \operatorname{conv} [f(x(t), U, t)]_\varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$, т. е. для почти всех $t \in T$ справедливо включение

$$x^{\cdot}(t) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \operatorname{conv} [f(x(t), U, t)]_\varepsilon$$

Для доказательства (4.4) достаточно показать, что при условиях теоремы имеет место равенство

$$R(x, t) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \operatorname{conv} [f(x, U, t)]_\varepsilon \tag{4.5}$$

Очевидно, что левая часть (4.5) содержится в правой. Докажем обратное включение.

Пусть v — элемент множества в правой части (4.5). Тогда для любой числовой последовательности $\varepsilon_k \downarrow 0$, $k = 1,2, \ldots$ найдется последовательность векторов $\{\alpha_i^k, v_i^k\}$, $i = 1, \ldots, n+1$; $k = 1,2, \ldots$, такая, что

$$v = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^k v_i^k, \quad v_i^k \in [f(x, U, t)]_{\varepsilon_k}, \quad \alpha_i^k \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^k = 1 \tag{4.6}$$

Обозначим через u_i^k точки множества U, для которых

$$\| f(x, u_i^k, t) - v_i^k \| \leqslant \varepsilon_k, \quad i = 1, \ldots, n+1; \ k = 1, 2, \ldots \tag{4.7}$$

Используя компактность множеств U, $f(x, U, t)$ и $P = \{\alpha_i : \alpha_i \geqslant 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n+1} = 1\}$, выделим подпоследовательность индексов $\{k\}$, $k \to \infty$, для которой

$$u_i^k \to u_i^\circ \in U, \quad \{\alpha_i^k\} \to \{\alpha_i^\circ\} \in P, \quad v_i^k \to v_i^\circ, \quad i = 1, \ldots, n+1$$

В силу (4.6), (4.7) имеем

$$v_i^\circ = f(x, u_i^\circ, t), \quad i = 1, \ldots, n+1, \quad v = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^\circ f(x, u_i^\circ, t)$$

что доказывает включения (4.4), (4.5) и левое из неравенств (4.1).

Таким образом, доказано, что при выборе последовательности $\{\rho_N\}$ в соответствии с (4.2) для любой ρ_N-аппроксимации множества $G(t)$ имеют места неравенства (4.1), и корректность задачи A по расширению служит достаточным условием сходимости $A_N \to A$ по функционалу.

Докажем теперь, что условие корректности задачи A по расширению будет и необходимым для сходимости $A_N \to A$ по функционалу при любой ρ_N-аппроксимации множества $G(t)$.

Предположим, что задача A не является корректной по расширению, т. е. $I_B^\circ < I_A^\circ$. При условиях теоремы в задаче B существует оптимальная траектория $x^\circ(t)$, которая равномерно на T аппроксимируется последовательностью абсолютно непрерывных функций $x_k(t)$, удовлетворяющих вместе с некоторыми измеримыми управлениями $u_k(t)$ связям (2.1), (2.2), $k = 1, 2, \ldots$ [9,11].

Воспользовавшись теоремой 3.1, построим последовательность дискретных траекторий $\{x_N(t)\}$, $N \in \Lambda$, $N \to \infty$, продолжения 3.1 которых равномерно на T сходятся к $x^\circ(t)$. Выберем числа ρ_N из условия (4.2) и рассмотрим соответствующую последовательность задач A_N, которые образуют ρ_N-аппроксимацию задачи A. Используя предыдущие рассуждения, приходим к соотношению

$$\lim_{N\to\infty,\, N\in\Lambda} I_N^\circ = I_B^\circ < I_A^\circ$$

в силу которого рассматриваемые задачи A_N не сходятся к A по функционалу.

Замечания. 4.1. Условие Липшица при доказательстве необходимости в теореме 4.1 потребовалось для того, чтобы допустимые в задаче B траектории могли быть аппроксимированы допустимыми траекториями в (1.1), (1.2). Последнее утверждение справедливо и при более общих предположениях, обеспечивающих единственность решения задачи Коши в (2.1) (2.2).

4.2. Аналогичная теорема о сходимости дискретных аппроксимаций по функционалу справедлива и при других (более точных) способах разностной аппроксимации производной.

5. Оценки аппроксимации и скорости сходимости. Укажем условия, при которых можно эффективно оценить величины ρ_N в теореме 4.1 и скорость сходимости $A_N \to A$ по функционалу. Через $\rho_U(x, y)$ будем обозначать функцию расстояния в пространстве U.

Теорема 5.1. В дополнение к условиям а) — д) предположим, что функция $f(x, u, t)$ удовлетворяет на Z условию Липшица по совокупности переменных с постоянной L_f, и в задаче A существует почти всюду непрерывное оптимальное управление $u^\circ(t)$ со следующим свойством: при заданной последовательности разбиений $\{T_N\}$ отрезка T найдется неубывающая функция $\omega(\eta)$, $0 \leqslant \eta < \infty$, $\lim\limits_{\eta\to 0} \omega(\eta) = \omega(0) = 0$ и номер N_0, такой, что для почти всех $t \in T$ справедливо неравенство

$$\rho_U(u^\circ(t), u^\circ(t^N)) \leqslant \omega(t - t^N), \quad N \geqslant N_0 \tag{5.1}$$

Тогда в качестве $\{\rho_N\}$, $N = 1,2, \ldots$ в теореме 4.1 можно взять любую последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию

$$\rho_N \geqslant M_1 h_N + M_2 \omega(h_N), \quad \rho_N \to 0, \quad N \to \infty \tag{5.2}$$

$$(M_1 = {}^1/_2 L_f T(\mu + 1)\exp[L_f T], \quad M_2 = L_f T \exp[L_f T]$$

$$\mu = \max_{(x,u,t)\in Z} \| f(x, u, t) \|)$$

Если при этом функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица на S_r с постоянной L_φ, то для скорости сходимости $A_N \to A$ по функционалу справедлива следующая оценка сверху:

$$-L_\varphi M_1 h_N \leqslant I_N^\circ - I_A^\circ \leqslant L_\varphi M_1 h_N + L_\varphi M_2 \omega(h_N) \tag{5.3}$$

Оценка снизу в (5.3) заведомо будет выполняться при условиях а), в), $G(t) \equiv \mathbf{R}^n$ и справедливости условия Липшица функций φ и f по (x, t).

Доказательство. Из построений теорем 3.1 и 4.1 следует, что при сделанных предположениях искомые последовательности $\{\rho_N\}$ выбираются из условия (4.2), где в качестве $x^\circ(t)$ можно брать траекторию (1.1), соответствующую рассматриваемому оптимальному управлению $u^\circ(t)$, а в качестве $x_N(t)$ — решения системы (1.5), соответствующие дискретным управлениям $u_N^\circ(t) = u^\circ(t)$, $t \in T_N^1$, $N = 1,2 \ldots$

Оценим разность $\Delta(t) = \| x^\circ(t) - x_N(t) \|$. В силу соотношений (3.2), (5.1) и условий теоремы будем иметь при достаточно больших $N (N \geqslant N_0)$ и всех $t \in T$

$$\Delta(t) \leqslant \int_{t_0}^{t} \| f(x^\circ(\tau), u^\circ(\tau), \tau) - f(x_N(\tau^N), u_N^\circ(\tau^N), \tau^N) \| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant L_f \int_{t_0}^{t} \Delta(\tau)\, d\tau + L_f \int_{t_0}^{t} \rho_U(u^\circ(\tau), u^\circ(\tau^N))\, d\tau +$$

$$+ L_f(\mu + 1) \int_{t_0}^{t} (\tau - \tau^N)\, d\tau \leqslant L_f \int_{t_0}^{t} \Delta(\tau)\, d\tau + L_f T \omega(h_N) +$$

$$+ \frac{1}{2} L_f T(\mu + 1) h_N$$

Используя лемму Беллмана — Гронуолла [4], получим неравенство

$$\Delta(t) \leqslant [{}^1/_2 L_f T(\mu + 1) h_N + L_f T \omega(h_N)] \exp[L_f T]$$

из которого вытекает (5.2).

Ясно, что траектории $x_N(t)$ будут допустимыми в задачах A_N при любом выборе последовательности $\{\rho_N\}$, $N = 1,2, \ldots$ из (5.2). В силу этого имеем неравенство

$$I_N^\circ - I_A^\circ \leqslant \varphi(x_N(t_1)) - \varphi(x^\circ(t_1)) \leqslant L_\varphi \Delta(t_1)$$

которое обеспечивает оценку сверху в (5.3).

Для доказательства левого неравенства в (5.3) рассмотрим последовательность оптимальных в задачах A_N пар $\{x_N^\circ(t),\ u_N^\circ(t)\}$ и траектории $x^N(t)$ непрерывной системы (1.1), соответствующие следующим управлениям:

$$u^N(t) = u_N^\circ(t^N), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad N = 1, 2, \ldots \tag{5.4}$$

В силу (1.1), (1.5), (5.4) имеем

$$\Delta_1(t_1) \overset{\text{def}}{=} \| x_N^\circ(t_1) - x^N(t_1) \| \leqslant \int_{t_0}^{t_1} \| f(x_N^\circ(t^N), u_N^\circ(t^N), t^N) -$$

$$- f(x^N(t), u_N^\circ(t^N), t) \| \, dt \leqslant L_f \int_{t_0}^{t_1} \Delta_1(t)\, dt + \frac{1}{2} L_f T (\mu + 1) h_N$$

Из леммы Беллмана — Гронуолла следует неравенство

$$\Delta_1(t_1) \leqslant {}^1\!/_2 L_f T (\mu + 1)\, h_N \exp[L_f T] \tag{5.5}$$

Оценка снизу в (5.3) вытекает теперь из (5.5) и соотношений

$$I_N^\circ - I_A^\circ \geqslant \varphi(x^N(t_1)) - I_A^\circ - L_\varphi \Delta_1(t_1) \geqslant - L_\varphi \Delta_1(t_1)$$

Замечания. 5.1. В условиях теоремы 5.1 фигурирует предположение о существовании в задаче A почти всюду непрерывного оптимального управления с заданным модулем непрерывности, который входит в оценки (5.2) (5.3). Таким образом, вопрос об оценке сверху скорости сходимости непосредственно через параметры задачи A связан с эффективными условиями существования оптимальных управлений в заданных классах «доступных» функций. (По поводу теорем существования такого типа см. обзор [9].)

5.2. Развитые в данной работе методы позволяют получить аналогичные результаты о сходимости дискретных аппроксимаций для некоторых типов задач со смешанными ограничениями на (x, u). В частности, если область управления $U = U(x, t)$ непрерывно зависит от своих переменных, то аналог теоремы 4.1 справедлив при соответствующей γ_N-аппроксимации множества $U(x, t)$. Если множество $U(x, t)$ удовлетворяет условию Липшица, то по аналогии с теоремой 5.1 можно построить оценки величин γ_N и скорости сходимости $A_N \to A$ по функционалу.

Поступила 29 X 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Об одной задаче оптимального регулирования. ПММ, 1957, т. 21, вып. 5.
2. *Ермольев Ю. М., Гуленко В. П.* Конечно-разностный метод в задачах оптимального управления. Кибернетика, 1967, № 3.
3. *Будак Б. М., Беркович Е. М., Соловьева Е. Н.* О сходимости разностных аппроксимаций для задач оптимального управления. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, т. 9, № 3.
4. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Качественная теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1971.
5. *Моисеев Н. Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. М., «Наука», 1971.
6. *Cullum J.* Finite-dimensional approximations of state-constrained continuous optimal control problems. SIAM J. Control., 1972, vol. 10, No. 4.

7. *Köhler M.* Explicit approximation of optimal control processes In: Lecture Notes Math., 1975, vol. 477, p. 188—201.
8. *Будак Б. М., Васильев Ф. П.* Некоторые вычислительные аспекты задач оптимального управления. Изд-во МГУ, 1975.
9. *Мордухович Б. Ш.* Существование оптимальных управлений. В сб.: Современные проблемы математики, т. 6. Итоги науки и техники. М., ВИНИТИ, 1976.
10. *Мордухович Б. Ш.* Принцип максимума в задаче оптимального быстродействия с негладкими ограничениями. ПММ, 1976, т. 40, вып. 6.
11. *Гамкрелидзе Р. В.* О скользящих оптимальных режимах. Докл. АН СССР, 1962, т. 143, № 6.
12. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи. Успехи матем. наук, 1968, т. 23, вып. 6.
13. *Иоффе А. Д.* Обобщенные решения систем с управлением. Дифференциальные уравнения, 1969, т. 5, № 6.
14. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., «Наука», 1977.
15. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория, ч. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1962.