

МЕТОД ДВУСТОРОННЕГО ПЕРЕНОСА ПАРАМЕТРОВ ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

М. В. Миронов

(Ленинград)

Отмечаются недостатки метода начальных параметров при использовании его для расчета колебаний разветвленных стержневых систем и систем, где проявляется, краевой эффект. Показано, что эти недостатки устраняются, если выбор параметров, определяющих состояние данного участка системы, и уравнений, из которых каждый параметр выражается, подчинить определенным, естественным для данной системы условиям. При этом, как правило, приходится применять двусторонний перенос параметров. Далее указывается, что расчет колебаний стержней переменного сечения существенно упрощается, если методы переноса параметров использовать в сочетании с методом медленно меняющихся коэффициентов. В качестве иллюстрации рассматриваются поперечные колебания стержней переменного сечения.

1. Исследование установившихся колебаний упругих стержневых систем и ряда других явлений сводится к совокупности задач об определении вектор-функций, каждая из которых зависит от одной координаты и определяется либо системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (на участках, где параметры упругой системы непрерывны), либо условиями сопряжения (на границах участков непрерывности). Эти соотношения дополняются условиями на границах задания данной функции. Распространенным приемом решения описанных краевых задач служит сведение их к задачам Коши при помощи метода начальных параметров [1-4]. Однако этот метод приспособлен для цепных систем, в которых число степеней свободы сечений при изменении продольной координаты не меняется. При расчете систем с разветвлениями и промежуточными опорами число условий в начале участка, которые содержат его параметры, могут не совпадать с числом этих параметров. Поэтому приходится использовать приемы, чуждые идее метода начальных параметров [2-6].

Другого вида трудности возникают в системах, где имеется явно выраженный краевой эффект (погранслои) [4, 7, 8]. Решение в этом случае содержит экспоненциально возрастающие и экспоненциально убывающие функции. Если для каждой из них $\lambda_1 l_1 + \dots + \lambda_n l_n \ll 1$ (n — число участков системы, λ_j — модуль показателя данной экспоненциальной функции на j -м участке, l_j — его длина), то сведение решения краевой задачи к задаче Коши неизбежно приводит к появлению плохо обусловленных систем [4-6]. Таким образом, в системах, где проявляется краевой эффект, нельзя пользоваться методами одностороннего переноса параметров [4], при которых все параметры данного участка системы выражаются из условий, составленных в начале этого участка.

Из сказанного следует, что выбор параметров, определяющих состояние данной системы, и уравнений, из которых каждый параметр выражается, должен подчиняться определенным, естественным для данной системы, условиям. Например, в системах, где проявляется краевой эффект, эти параметры должны выбираться так, чтобы предотвратить смешивание краевых эффектов, относящихся к разным границам данного участка системы. При этом параметр, который определяет погранслои, возникающий у данного сечения, не должен выражаться из условий, составленных для какого-либо другого сечения. Идея такого подхода близка к той, которая лежит в основе асимптотического метода, предложенного В. В. Болотиным для расчета колебаний стержней, пластинок и оболочек [7-9].

2. Для иллюстрации предлагаемого подхода, который может быть охарактеризован как метод двустороннего переноса параметров (ср. [4]), приведем порядок расчета свободных колебаний балки, состоящей из трех участков постоянного сечения. Пусть между первым и вторым участками находится сосредоточенный груз, масса и момент инерции которого равны m_1^* и J_1 , а между вторым и третьим — промежуточная опора. Зададим решение на каждом участке в виде [1]

$$(2.1) \quad Y_j(x_j) = \Psi_j(x_j)A_j$$

$$Y_j = \{v_j, L_j, M_j, N_j\}, \quad A_j = \{a_j, b_j, p_j, q_j\}$$

$$(2.2) \quad \Psi_j = \begin{vmatrix} \sin \Lambda & \cos \Lambda & e^{-\Lambda x} & e^{\Lambda x - \Lambda l} \\ \lambda \cos \Lambda & -\lambda \sin \Lambda & -\lambda e^{-\Lambda x} & \lambda e^{\Lambda x - \Lambda l} \\ -c\lambda^2 \sin \Lambda & -c\lambda^2 \cos \Lambda & c\lambda^2 e^{-\Lambda x} & c\lambda^2 e^{\Lambda x - \Lambda l} \\ -c\lambda^3 \cos \Lambda & c\lambda^3 \sin \Lambda & -c\lambda^3 e^{-\Lambda x} & c\lambda^3 e^{\Lambda x - \Lambda l} \end{vmatrix}_j$$

$$\Lambda_j = \Lambda_j(x_j) = \lambda_j x_j + \varphi_j, \quad \Lambda_{jx} = \lambda_j x_j, \quad \Lambda_{jl} = \lambda_j l_j, \quad \lambda_j = \left(\frac{\omega^2 m_j}{c_j} \right)^{1/4}$$

Здесь Y_j — вектор (матрица-столбец) состояния (v_j — прогиб, $L_j = v_j'$ — угол поворота, $M_j = c_j L_j'$ — изгибающий момент, $N_j = M_j'$ — перерезывающая сила), c_j — изгибная жесткость, m_j — погонная масса, Ψ_j — матрица решений, A_j — вектор постоянных интегрирования.

Используя два уравнения, вытекающие из граничных условий на конце $x_1 = 0$, выразим коэффициенты b_1 и p_1 (именно функция $p_1 \exp(-\lambda_1 x_1)$ описывает погранслою у сечения $x_1 = 0$) через a_1 и q_1

$$(2.3) \quad b_1 = \mu_{21} a_1 + \nu_{21} E_1 q_1, \quad p_1 = \mu_{31} a_1 + \nu_{31} E_1 q_1, \quad E_j = \exp(-\lambda_j l_j)$$

Фазу φ_1 выбираем так, чтобы выполнялось неравенство $|\mu_{21}| < 1$. Например, если в сечении $x_1 = 0$ имеется шарнирная опора, то, полагая $\varphi_1 = 0$, получим $\mu_{21} = \nu_{21} = \nu_{31} = 0$, $\mu_{31} = -1$.

Выпишем условия сопряжения соседних участков стержня

$$(2.4) \quad v_1(l_1) - v_2(0) = 0, \quad L_1(l_1) - L_2(0) = 0 \\ M_1(l_1) - J_1 \omega^2 L_1(l_1) - M_2(0) = 0, \quad N_1(l_1) + m_1^* \omega^2 v_1(l_1) - \\ - N_2(0) = 0$$

$$(2.5) \quad v_2(l_2) = 0, \quad v_3(0) = 0, \quad L_2(l_2) - L_3(0) = 0, \quad M_2(l_2) - \\ - M_3(0) = 0$$

Учитывая, что краевой эффект у сечения $x_2 = 0$ описывает функции, содержащие q_1 и p_2 , из условий (2.4) получим ($\varphi_2 = 0$)

$$(2.6) \quad \psi_{11}^q q_1 - b_2 - p_2 = -\psi_{11}^a a_1 + E_2 q_2, \quad \psi_{12}^q q_1 - a_2 + p_2 = \\ = -\psi_{12}^a a_1 + E_2 q_2, \quad \psi_{13}^q q_1 + b_2 - p_2 = -\psi_{13}^a a_1 + E_2 q_2 \\ \psi_{14}^q q_1 + a_2 + p_2 = -\psi_{14}^a a_1 + E_2 q_2 \\ (\psi_{11}^a = S_1 + \mu_{21} C_1 + \mu_{31} E_1, \quad \psi_{11}^q = 1 + \nu_{21} E_1 C_1 + \nu_{31} E_1^2 \\ \psi_{12}^a = \lambda_1 \lambda_2^{-1} (C_1 - \mu_{21} S_1 - \mu_{31} E_1), \dots, S_j = \sin \Lambda_j(l_j), \quad C_j = \cos \Lambda_j(l_j))$$

Из системы (2.6) следует

$$(2.7) \quad q_1 = \mu_{41} a_1 + \nu_{41} E_2 q_2, \quad a_2 = \mu_{12} a_1 + \nu_{12} E_2 q_2 \\ b_2 = \mu_{22} a_1 + \nu_{22} E_2 q_2, \quad p_2 = \mu_{32} a_1 + \nu_{32} E_2 q_2$$

где коэффициенты $\mu_{41}, \dots, \mu_{32}$ и $\nu_{41}, \dots, \nu_{32}$ — решения системы (2.6) при подстановке в ее правую часть соответственно $-\psi_{11}^a, \dots, -\psi_{14}^a$ и $1, \dots, 1$.

Краевой эффект у сечения $x_3 = 0$ описывают функции, содержащие q_2 и p_3 . Поэтому из условий (2.5) с учетом соотношений (2.7) получим ($\varphi_3 = 0$)

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \psi_{21}^a q_2 &= -\psi_{21}^a a_1, \quad b_3 + p_3 = -E_3 q_3 \\ \psi_{22}^a q_2 - a_3 + p_3 &= -\psi_{22}^a a_1 + E_3 q_3 \\ \psi_{23}^a q_2 + b_3 - p_3 &= -\psi_{23}^a a_1 + E_3 q_3 \\ (\psi_{21}^a &= \mu_{12} S_2 + \mu_{22} C_2 + \mu_{32} E_2) \\ \psi_{21}^a &= 1 - \nu_{12} E_2 S_2 + \nu_{22} E_2 C_2 + \nu_{32} E_2^2 \\ \psi_{22}^a &= \lambda_2 \lambda_3^{-1} (\mu_{12} C_2 - \mu_{22} S_2 - \mu_{32} E_2), \dots \end{aligned}$$

Из уравнений (2.8) следует

$$(2.9) \quad \begin{aligned} q_2 &= \mu_{42} a_1 + \nu_{42} E_3 q_3, \quad a_3 = \mu_{13} a_1 + \nu_{13} E_3 q_3 \\ b_3 &= \mu_{23} a_1 + \nu_{23} E_3 q_3, \quad p_3 = \mu_{33} a_1 + \nu_{33} E_3 q_3 \end{aligned}$$

где $\mu_{42}, \dots, \mu_{33}$ и $\nu_{42}, \dots, \nu_{33}$ — решения системы (2.8) при подстановке в ее правую часть соответственно $-\psi_{21}^a, 0, \psi_{22}^a, \psi_{23}^a$ и $0, -1, 1, 1$.

Учитывая соотношения (2.9), из граничных условий на конце $x_3 = l_3$ получим два уравнения вида

$$(2.10) \quad \psi_{31}^a a_1 + \psi_{31}^q q_3 = 0, \quad \psi_{32}^a a_1 + \psi_{32}^q q_3 = 0$$

Частоты ω , для которых определитель этой системы обращается в нуль, соответствуют одному из главных колебаний системы, формы колебаний могут быть найдены из выражений (2.10), (2.9), (2.7), (2.3).

При использовании описанной схемы возрастание номера главных колебаний не приводит к появлению каких-либо вычислительных трудностей, ибо при возрастании частоты коэффициенты μ_{rj}, ν_{rj} сохраняют порядок своей величины. Более того, для достаточно больших частот, когда числа $E_j \ll 1$, можно пренебречь содержащими их слагаемыми, что приводит к существенному упрощению расчетов (ср. [9]). Отметим еще, что в отличие от метода начальных параметров при изложенном подходе присутствие промежуточной опоры лишь упрощает расчет.

При расчете колебаний низкой частоты, когда появление плохо обусловленных систем не вызывает опасений, нет нужды выделять краевой эффект. В этом случае более простые уравнения получим, используя фундаментальные системы решений. Как известно, при поперечных колебаниях стержней такую систему составляют функции Крылова [1].

Обратимся опять к трехпролетной балке, рассмотренной выше. На каждом участке имеем

$$v_j = a_{j1} S(\lambda_j x_j) + a_{j2} T(\lambda_j x_j) + a_{j3} U(\lambda_j x_j) + a_{j4} V(\lambda_j x_j)$$

Предполагая, что на левом конце балки имеется шарнирная опора, и используя условия сопряжения первого и второго участков, получим линейные соотношения вида

$$a_{2r} = \sigma_{2r} a_{12} + \rho_{2r} a_{14} \quad (r = 1, 2, 3, 4)$$

Уравнения, вытекающие из условий (2.3), запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}\psi_{11}^{(4)} a_{14} &= -\psi_{11}^{(2)} a_{12}, \quad a_{31} = 0 \\ \psi_{12}^{(4)} a_{14} - a_{32} &= -\psi_{12}^{(2)} a_{12}, \quad \psi_{13}^{(4)} a_{14} - a_{33} = -\psi_{13}^{(2)} a_{12} \\ (\psi_{11}^{(2)} &= \sigma_{21} S_2 + \dots + \sigma_{24} V_2, \quad \psi_{11}^{(4)} = \rho_{21} S_2 + \dots + \rho_{24} V_2 \\ \psi_{12}^{(2)} &= \lambda_2 \lambda_3^{-1} (\sigma_{21} V_2 + \sigma_{22} S_2 + \sigma_{23} T_2 + \sigma_{24} U_2), \dots)\end{aligned}$$

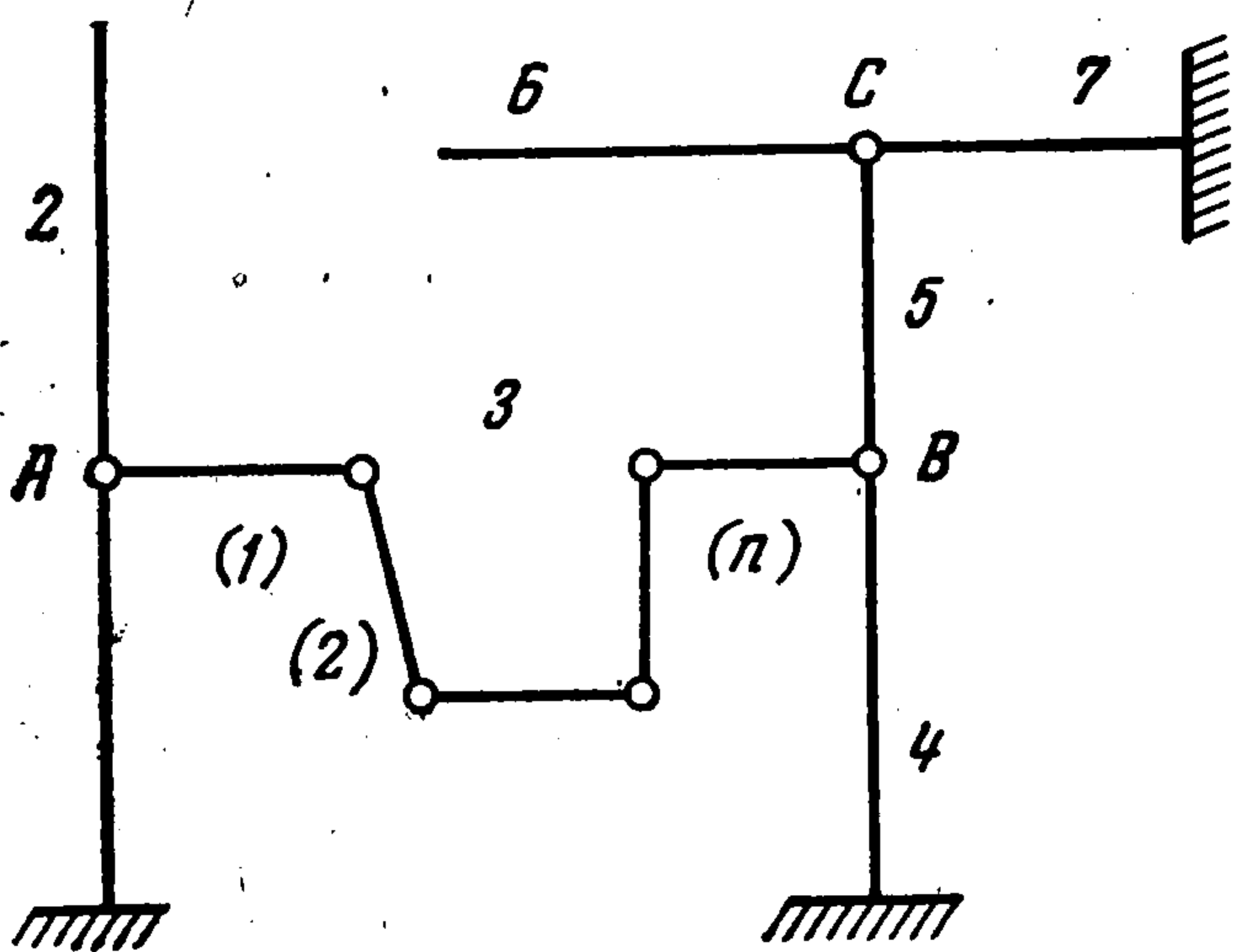
Параметр a_{34} остается произвольным. Итак, состояние третьего участка определяется двумя параметрами a_{12} и a_{34} . (К аналогичным результатам приводит способ учета промежуточных опор для метода начальных параметров, описанный в книге [3]. Однако он требует пространственных дополнительных пояснений.)

Из граничных условий на конце $x_3 = l_3$ получим систему

$$\psi_{31}^{(2)} a_{12} + \psi_{31}^{(4)} a_{34} = 0, \quad \psi_{32}^{(2)} a_{12} + \psi_{32}^{(4)} a_{34} = 0$$

позволяющую найти частоты и формы главных колебаний.

3. При расчете разветвленных систем следует, во-первых, рассмотреть ветви между узлами. Одна из таких ветвей — ветвь AB стержневой системы, изображенной на фигуре. Пред-



полагается, что возмущающее воздействие приложено лишь на границах участков.

Пусть вектор состояния $Y_j(x_j)$ каждого из n участков ветви AB выражается формулой (2.1), содержащей вектор постоянных параметров $A_j = \{a_{j1}, \dots, a_{jm}\}$. Если крайовой эффект отсутствует или проявляется слабо, то нужно, пользуясь

условиями сопряжения участков, получить соотношения

$$(3.1) \quad A_j = K_j A_1 + A_j^F \quad (j = 2, \dots, n)$$

(или $A_j = K_j^* A_n + A_j^F$, $j = 1, \dots, n-1$), где $K_j^{(*)}$ — квадратная матрица переноса, вектор A_j^F возникает при наличии возмущения.

При наличии краевого эффекта для определенности предположим, что на левом и правом концах j -го участка он характеризуется параметрами $a_{j, m-1}$ и a_{jm} . В этом случае, используя условия сопряжения участков, следует найти соотношения

$$(3.2) \quad A_j = K_j' \{A_1^{m-1}, a_{nm}\} + A_j^F \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Здесь и далее $A_j^{m-1} = \{a_{j1}, \dots, a_{j, m-1}\}$. Квадратные матрицы K_j' могут быть построены следующим образом. Пусть система уравнений, выражающая условия сопряжения j - и $j+1$ -го участков, имеет вид: $\Psi_j^l A_j + \Psi_{j+1}^o A_{j+1} = F_j$ или подробнее

$$\psi_{j1}^l a_{j1} + \dots + \psi_{jm}^l a_{jm} + \psi_{j+1,1}^o a_{j+1,1} + \dots + \psi_{j+1,m}^o a_{j+1,m} = F_j$$

где ψ_{jr}^l и $\psi_{j+1,r}^o$ — столбцы матриц Ψ_j^l и Ψ_{j+1}^o (последние, вообще говоря, не совпадают с $\Psi_j(l_j)$ и $\Psi_j(0)$, вектор F_j выражает возмущающее воздей-

стве). Запишем полученную систему следующим образом:

$$(3.3) \quad \Psi_{j+1}^{0, m-1} A_{j+1}^{m-1} + \Psi_{jm}^l a_{jm} = - \Psi_j^{l, m-1} A_j^{m-1} - \Psi_{j+1, m}^o a_{j+1, m} + F_j$$

$$(j = 1, \dots, n-1)$$

$$\Psi_j^{n, m-1} = \|\Psi_{j1}^h, \dots, \Psi_{j, m-1}^h\| \quad (h = 0, l)$$

Системы (3.3) решаются последовательно. При $j = 1$ получим

$$(3.4) \quad A_2^{m-1} = M_2 A_1^{m-1} + v_2 a_{2m} + A_2^{F, m-1}$$

$$(3.5) \quad a_{1m} = \mu_2 A_1^{m-1} + v_{2m} a_{2m} + a_{1m}^F$$

где M_2 — матрица порядка $(m-1) \times (m-1)$, v_2 и μ_2 — матрица-столбец и матрица-строка порядка $m-1$, v_{2m} — число.

Очевидно, соотношения, подобные (3.4), (3.5), можно получить для произвольного номера j .

Действительно, пусть имеются равенства

$$(3.6) \quad A_j^{m-1} = M_j A_1^{m-1} + v_j a_{jm} + A_j^{F, m-1}$$

$$(3.7) \quad a_{j-1, m} = \mu_j A_1^{m-1} + v_{jm} a_{jm} + a_{j-1}^F$$

Тогда, преобразовав j -ю систему (3.3) к виду

$$\begin{aligned} & \Psi_{j+1}^{0, m-1} A_{j+1}^{m-1} + (\Psi_{jm}^l + \Psi_j^{l, m-1} v_j) a_{jm} = \\ & = - \Psi_j^{l, m-1} M_j A_1^{m-1} - \Psi_{j+1, m}^o a_{j+1, m} + F_j - \Psi_j^{l, m-1} A_j^{F, m-1} \end{aligned}$$

сможем вычислить

$$(3.8) \quad A_{j+1}^{m-1} = M_{j+1} A_1^{m-1} + v_{j+1} a_{j+1, m} + A_{j+1}^{F, m-1}$$

$$(3.9) \quad a_{jm} = \mu_{j+1} A_1^{m-1} + v_{j+1, m} a_{j+1, m} + a_{jm}^F$$

Решая уравнения (3.9) в обратном порядке, начиная с $j = n-1$, получим

$$(3.10) \quad a_{jm} = \mu_{j+1}^* A_1^{m-1} + v_{j+1, m}^* a_{j+1, m} + a_{jm}^{F*} \quad (j = n-1, \dots, 1)$$

$$\mu_{j+1}^* = \mu_{j+1} + v_{j+1, m} \mu_{j+2}^*, \quad v_{j+1, m}^* = v_{j+1, m} v_{j+2, m}^*$$

$$a_{jm}^{F*} = a_{jm}^F + v_{j+1, m} a_{j+1, m}^{F*}$$

Подставив выражения (3.10) в равенства (3.6), будем иметь

$$(3.11) \quad A_j^{m-1} = M_j^* A_1^{m-1} + v_j^* a_{jm} + A_j^{F, m-1} \quad (j = 2, \dots, n)$$

$$M_j^* = M_j + v_j \mu_{j+1}^*, \quad v_j^* = v_j v_{j+1, m}^*, \quad A_j^{F, m-1} = A_j^{F, m-1} + v_j a_{jm}^{F*}$$

Объединяя соотношения (3.10), (3.11), получим равенство (3.2), где, очевидно

$$(3.12) \quad K_j' = \begin{vmatrix} M_j^* & v_j^* \\ \mu_{j+1}^* & v_{j+1, m}^* \end{vmatrix}, \quad A_j^F = \begin{vmatrix} A_j^{F, m-1} \\ a_{jm}^{F*} \end{vmatrix}$$

Хотя при наличии краевого эффекта алгоритм получился сложнее, это не связано с увеличением количества вычислений. Наоборот, так как величины v_j , v_{jm} пропорциональны $\exp(-\lambda_j l_j)$, при расчете высокочастотных колебаний объем вычислений может быть сокращен.

Соотношения (3.1) и (3.2) позволяют составить разрешающую систему для замкнутой системы. Соотношения (3.1) применяются так же, как это описано для метода начальных параметров [2,3]. Использование выражений (3.2) столь же просто.

Пусть замкнутая система состоит из n участков. При отсутствии возмущения найдем

$$A_1 = K_1' \{A_1^{m-1}, a_{nm}\}, \quad A_n = K_n' \{A_1^{m-1}, a_{nm}\}$$

Из условий сопряжения n -го и первого участков получим систему m уравнений

$$\Psi_n' A_n + \Psi_1' A_1 = (\Psi_n' K_n' + \Psi_1' K_1') \{A_1^{m-1}, a_{nm}\} = 0$$

которая и служит для определения собственных частот и форм колебаний.

В качестве примера разветвленной системы рассмотрим порядок расчета свободных колебаний плоской стержневой системы, изображенной на фигуре. Предполагая, что система совершает продольно-изгибные или крутильно-изгибные колебания, состояние k -й ветви системы выразим шестью параметрами $A^{(k)} = \{a_1^{(k)}, \dots, a_6^{(k)}\}$ ($k = 1, \dots, 7$). Если каждая из ветвей состоит из нескольких участков, то в отсутствие краевого эффекта $A^{(k)} = A_1^{(k)}$ ($A_1^{(k)}$ — вектор параметров первого участка k -й ветви), а при наличии краевого эффекта $A^{(k)} = \{A_1^{(k)5}, a_{n6}^{(k)}\} \equiv \{a_{11}^{(k)}, \dots, a_{15}^{(k)}, a_{n6}^{(k)}\}$, где параметры $a_{15}^{(k)}, a_{n6}^{(k)}$ выражают краевые эффекты у начала первого участка и у конца последнего участка. Для каждой из ветвей 1, 2, 4, 6, 7, пользуясь граничными условиями, можно исключить три параметра.

Например, при учете краевого эффекта выразим параметры $a_2^{(k)}, a_4^{(k)}, a_5^{(k)}$ через $a_1^{(k)}, a_3^{(k)}, a_6^{(k)}$ ($k = 1, 2, 4, 6, 7$). Используя девять условий сопряжения в узле A , представим девять параметров $a_1^{(1)}, a_3^{(1)}, a_6^{(1)}, a_1^{(2)}, a_3^{(2)}, a_6^{(2)}, a_2^{(3)}, a_4^{(3)}, a_5^{(3)}$ через три $a_1^{(3)}, a_3^{(3)}, a_6^{(3)}$. Точно так же при помощи условий в узле B выразим параметры $a_1^{(3)}, a_3^{(3)}, a_6^{(3)}, a_1^{(4)}, a_3^{(4)}, a_6^{(4)}, a_2^{(5)}, a_4^{(5)}, a_5^{(5)}$ через $a_1^{(5)}, a_3^{(5)}, a_6^{(5)}$. Девять уравнений, следующих из условий сопряжения в узле C , будут содержать девять параметров $a_1^{(k)}, a_3^{(k)}, a_6^{(k)}$ ($k = 5, 6, 7$). Таким образом, получим систему, из которой обычным путем можно найти частоты и формы главных колебаний.

4. В ряде случаев, например для стержней переменного сечения, когда из-за большого числа участков, на которые приходится делить систему, описанный выше подход усложняется, существенного упрощения можно добиться, сочетая этот подход с методом медленно меняющихся параметров [10,11] или каким-либо другим вариантом метода возмущений. В результате удастся представить стержень в виде совокупности малого числа частей, в пределах которых параметры стержня изменяются, но вектор состояния с достаточной точностью выражается соотношением

$$(4.1) \quad Y_i(x_i) = H_i(x_i) A_i + Y_i^F(x_i), \quad A_i = \{a_{i1}, \dots, a_{im}\}$$

Здесь i — номер части стержня, $x_i \in [0, l_i]$ — ее продольная координата, A_i — вектор постоянных для данной части коэффициентов, Y_i^F — вектор, возникающий при наличии возмущающего воздействия. Матрица H_i , зависящая от частоты и свойств данной части стержня, строится так, что в ней выделены функции, описывающие погранслои на границах этой части. При переходе от одной части к другой с соотношениями (4.1) производятся те же операции, которые были описаны в п. 2, 3 для соотношений (2.1).

Ниже на примере прямого стержня переменного сечения, совершающего поперечные колебания, излагается один из способов построения соотношения (4.1).

Итак, пусть имеется часть прямого стержня (ее номер для краткости опускаем), в пределах которой параметры стержня — кусочно-непрерывные функции продольной координаты x , имеющие достаточно малые относительные изменения. Учитывая, что для вычислений суммы удобнее, чем интегралы, аппроксимируем рассматриваемую часть стержня ступенчатым стержнем, состоящим из достаточно большого числа участков постоянного сечения. Внешнюю нагрузку заменим системой сосредоточенных сил $f(x)$, приложенных на стыках участков. На каждом участке стержня имеют место соотношения (2.1), (2.2). Однако здесь координата x берется общей для всей рассматриваемой части, и номера участков j опускаются. При этом полагаем

$$\Lambda_x = \int_0^x \lambda(\zeta) d\zeta, \quad \Lambda = \Lambda(x) = \Lambda_x + \varphi, \quad \lambda(x) = \left[\frac{\omega^2 m(x)}{c(x)} \right]^{1/4}$$

где m, c, λ — ступенчатые функции. Очевидно, что вектор A в данном случае — также ступенчатая функция. Его изменение по длине стержня определяется условиями сопряжения в сечениях $x = x^*$, где параметры стержня изменяются скачком и приложены сосредоточенные силы. Эти условия сопряжения имеют вид

$$Y^+ = Y^- + F^*, \quad F^* = \{0, 0, 0, f(x^*)\}$$

$$(z^\pm = z(x^\pm), \quad x^\pm = x^* \pm 0)$$

Учитывая выражение (2.1), получим $\Psi^+ A^+ = \Psi^- A^- + F^*$, или

$$(4.2) \quad \Delta A = -(\Psi^+)^{-1} \Delta \Psi^- A^- + (\Psi^+)^{-1} F^* \quad (\Delta z = z^+ - z^-)$$

Используя соотношение (2.2), представим равенство (4.2) в развернутой форме

$$(4.3) \quad \Delta a = -1/2 (\beta + \gamma) a^- + 1/2 (\beta - \gamma) (a^- \cos 2\Lambda^* - b^- \sin 2\Lambda^*) + \beta (P^- + Q^-) \sin \Lambda^* + [\beta' (-P^- + Q^-) + f_*] \cos \Lambda^*$$

$$\Delta b = -1/2 (\beta + \gamma) b^- - 1/2 (\beta - \gamma) (a^- \sin 2\Lambda^* + b^- \cos 2\Lambda^*) + \beta (P^- + Q^-) \cos \Lambda^* - [\beta' (-P^- + Q^-) + f_*] \sin \Lambda^*$$

$$\Delta p = -1/2 (\beta + \gamma) p^- + 1/2 [(\gamma - \beta) Q^- + \beta v_1^- - \beta' u_1^- + f_*] e^{\Lambda^*}$$

$$\Delta q = -1/2 (\beta + \gamma) q^- + 1/2 [(\gamma - \beta) P^- + \beta v_1^- + \beta' u_1^- - f_*] e^{\Lambda_1 - \Lambda^*}$$

$$\beta = \langle c\lambda^2 \rangle, \quad \gamma = \langle c\lambda^3 \rangle + \langle \lambda \rangle, \quad \beta' = \langle c\lambda^3 \rangle - \langle \lambda \rangle$$

$$\langle z \rangle = \Delta z / 2z^+$$

$$f_* = f(x_*) / 2 (c\lambda^3)^+, \quad \Lambda^* = \Lambda(x^*), \quad \Lambda_* = \Lambda_{x^*},$$

$$P = p \exp(-\Lambda_x)$$

$$Q = q \exp(\Lambda_x - \Lambda_l), \quad v_1 = a \sin \Lambda + b \cos \Lambda$$

$$u_1 = a \cos \Lambda - b \sin \Lambda$$

В полученных уравнениях можно исключить слагаемые, стоящие справа на первом месте. Этим удастся выделить асимптотическую (т. е. главную при $\omega \rightarrow \infty$) часть функций $a(x)$, $b(x)$, $P(x)$, $Q(x)$. Положим $y = \eta y_\eta$ ($y = a, b, p, P, \dots$), где ступенчатая функция $\eta(x)$ определяется разностным уравнением

$$(4.4) \quad \Delta \eta = -1/2 (\beta + \gamma) \eta^-$$

Учитывая соотношение $\Delta(\rho\sigma) = \rho^+ \Delta\sigma + \sigma^- \Delta\rho$, вместо уравнений (4.3) получим

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \Delta a_\eta &= \chi [1/2 (\beta - \gamma) (a_\eta^- \cos 2\Lambda^* - b_\eta^- \sin 2\Lambda^*) + \\ &+ \beta (P_\eta^- + Q_\eta^-) \sin \Lambda^* + \beta' (-P_\eta^- + Q_\eta^-) \cos \Lambda^*] + \Delta a_\eta^f \\ \Delta b_\eta &= \chi [-1/2 (\beta - \gamma) (a_\eta^- \sin 2\Lambda^* + b_\eta^- \cos 2\Lambda^*) + \\ &+ \beta (P_\eta^- + Q_\eta^-) \cos \Lambda^* - \beta' (-P_\eta^- + Q_\eta^-) \sin \Lambda^*] + \Delta b_\eta^f \\ \Delta p_\eta &= \frac{\chi}{2} [(\gamma - \beta) Q_\eta^- + \beta v_{1\eta}^- - \beta' u_{1\eta}^-] e^{\Lambda^*} + \frac{f_*}{2\eta^+} e^{\Lambda^*} \\ \Delta q_\eta &= \frac{\chi}{2} [(\gamma - \beta) P_\eta^- + \beta v_{1\eta}^- + \beta' u_{1\eta}^-] e^{\Lambda_l - \Lambda^*} - \frac{f_*}{2\eta^+} e^{\Lambda_l - \Lambda^*} \\ \chi &= \frac{\eta^-}{\eta^+}, \quad \Delta a_\eta^f = \frac{f_*}{\eta^+} \cos \Lambda^*, \quad \Delta b_\eta^f = -\frac{f_*}{\eta^+} \sin \Lambda^* \end{aligned}$$

Согласно сделанному выше предположению, величины β , γ , β' , характеризующие относительные изменения параметров стержня, малы. Из уравнений (4.5) следует, что при свободных и резонансных колебаниях соответственно малы будут и относительные приращения элементов вектора A_η . Поэтому, ограничиваясь приближенным результатом, положим в правых частях уравнений (4.5) $c_\eta^- = \bar{c}_\eta \equiv c_\eta(0)$ ($c = a, b, p$), $q_\eta^- = \bar{q}_\eta \equiv q_\eta(l)$. Произведя суммирование и заменив для удобства вычислений функции p, q на P, Q , придем к приближенному соотношению

$$(4.6) \quad \begin{aligned} A_{e\eta}(x) &= K(x) \bar{A}_\eta + A_{e\eta}^f(x) \\ \bar{A}_\eta &= \{\bar{a}_\eta, \bar{b}_\eta, \bar{p}_\eta, \bar{q}_\eta\}, \quad A_{e\eta} = \{a_\eta, b_\eta, P_\eta, Q_\eta\} \\ A_{e\eta}^f &= \left\{ \sum_0^x \Delta a_\eta^f, \sum_0^x \Delta b_\eta^f, \sum_0^x \frac{f_*}{2\eta^+} e^{\Lambda^* - \Lambda x}, -\sum_x^l \frac{f_*}{2\eta^+} e^{\Lambda x - \Lambda^*} \right\} \\ K(x) &= \|k_{ij}(x)\|; \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \\ k_{11} &= 1 + \varepsilon, \quad k_{22} = 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon = \sum_0^x \frac{\chi}{2} (\beta - \gamma) \cos 2\Lambda^* \\ k_{12} &= k_{21} = \sum_0^x \frac{\chi}{2} (\gamma - \beta) \sin 2\Lambda^*, \quad k_{33} = e^{-\Lambda x}, \quad k_{44} = e^{\Lambda x - \Lambda l} \\ k_{13} &= \sum_0^x \chi e^{-\Lambda^*} (\beta \sin \Lambda^* - \beta' \cos \Lambda^*), \quad k_{14} = \sum_0^x \chi e^{\Lambda^* - \Lambda l} (\beta \sin \Lambda^* + \\ &+ \beta' \cos \Lambda^*), \quad k_{23} = \sum_0^x \chi e^{-\Lambda^*} (\beta \cos \Lambda^* + \beta' \sin \Lambda^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{24} &= \sum_0^x \chi e^{\Lambda_* - \Lambda_l} (\beta \cos \Lambda^* - \beta' \sin \Lambda^*) \\
k_{31} &= \sum_0^x \frac{\chi}{2} e^{\Lambda_* - \Lambda_x} (\beta \sin \Lambda^* - \beta' \cos \Lambda^*) \\
k_{32} &= \sum_0^x \frac{\chi}{2} e^{\Lambda_* - \Lambda_x} (\beta \cos \Lambda^* + \beta' \sin \Lambda^*) \\
k_{34} &= \sum_0^x \frac{\chi}{2} (\gamma - \beta) e^{2\Lambda_* - \Lambda_x - \Lambda_l} \\
k_{41} &= \sum_x^l \frac{\chi}{2} e^{\Lambda_x - \Lambda_*} (\beta \sin \Lambda^* + \beta' \cos \Lambda^*) \\
k_{42} &= \sum_x^l \frac{\chi}{2} e^{\Lambda_x - \Lambda_*} (\beta \cos \Lambda^* - \beta' \sin \Lambda^*) \\
k_{43} &= \sum_x^l \frac{\chi}{2} (\gamma - \beta) e^{\Lambda_x - 2\Lambda_*}
\end{aligned}$$

Суммы от 0 до x и от x до l распространяются на все стоящие под знаками суммы величины, которые возникают на промежутках $[0, x)$ и $(x, l]$.

Обозначим Ψ_e матрицу, отличающуюся от матрицы Ψ заменой величин $\exp(-\Lambda_x)$ и $\exp(\Lambda_x - \Lambda_l)$ на единицу. Тогда можно положить

$$Y = \Psi A = \Psi \eta A_\eta = \eta \Psi_e A_{e\eta}$$

Учитывая соотношения (4.6), получим искомые выражения

$$\begin{aligned}
(4.7) \quad Y &= \eta \Psi_e (K \bar{A}_\eta + A_{e\eta}^f) = H \bar{A}_\eta + Y^f \\
H &= \eta \Psi_e K, \quad Y^f = \eta \Psi_e A_{e\eta}^f
\end{aligned}$$

Замечания. 1. Предположим, что параметры стержня являются непрерывными функциями продольной координаты. В этом случае, устремив к бесконечности число участков аппроксимирующего ступенчатого стержня, вместо уравнения (4.4) получим

$$\frac{d\eta}{\eta} = -\frac{d(c\lambda^2)}{4c\lambda^2} - \frac{d(c\lambda^3)}{4c\lambda^3} - \frac{d\lambda}{4\lambda} = -\frac{d(c\lambda^3)}{2c\lambda^3}$$

Отсюда следует, что $\eta \sqrt{c\lambda^3} = \text{const}$, или при $\eta(0) = 1$ (ср. [11])

$$\eta(x) = \left[\frac{c_0 \lambda_0^3}{c(x) \lambda^3(x)} \right]^{1/2} = \left[\frac{c_0 m_0^3}{c(x) m^3(x)} \right]^{1/2}$$

Этим выражением можно пользоваться, когда достаточно малы относительные приращения параметров аппроксимирующего стержня на каждой его ступеньке. При этом же предположении имеет место соотношение $\beta' = \beta$.

2. При расчете свободных и резонансных колебаний степень точности формулы (4.7) можно оценить, пользуясь результатами работы [11]. Рассуждая подобно тому, как это сделано в работе [10], можно показать, что точность формулы (4.7) увеличивается с ростом номера главного колебания. Это, вообще говоря, не имеет места, если в качестве элементов матрицы (2.2) выбрать гиперболические функции или функции Крылова.

Хотя основные результаты данной работы иллюстрируются примерами колебаний стержневых систем, они могут найти применение и при решении других краевых задач механики (колебания пластин и оболочек, теория упругой устойчивости, изгиб балок на упругом основании и т.д.).

Поступила 4 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаков И. М. Теория колебаний. М., «Наука», 1968.
2. Троицкий В. А. Матричные методы расчета колебаний стержневых систем. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1960, № 210.
3. Дондошанский В. К. Расчеты колебаний упругих систем на электронных вычислительных машинах. М.—Л., «Машиностроение», 1965.
4. Чувиковский В. С. Численные методы расчетов в строительной механике корабля. Л., «Судостроение», 1976.
5. Пальмов В. А., Первоозванский А. А. О вычислительных особенностях матричных методов расчета колебаний. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1960, № 210.
6. Бидерман В. Л. Некоторые вычислительные методы решения задач строительной механики, приводимых к обыкновенным дифференциальным уравнениям. В сб.: Расчеты на прочность, вып. 17. М., «Машиностроение», 1976.
7. Болотин В. В. Динамический краевой эффект при колебаниях упругих пластинок. Инж. сб., 1961, т. 31.
8. Болотин В. В. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
9. Болотин В. В. Обобщение асимптотического метода решения задач о собственных значениях для прямоугольных областей. Инж. сб., 1961, т. 1, вып. 3.
10. Миронов М. В. О расчете свободных колебаний стержней переменного сечения методом медленно меняющихся параметров. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 2.
11. Миронов М. В. Применение метода медленно меняющихся параметров для приближенного расчета поперечных колебаний стержней. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 6.