Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 531.36

О СВОЙСТВЕ ЖЕСТКОСТИ ДВИЖЕНИЯ

В. Н. Скимель

(Казань)

Известно, что ось быстро вращающегося гироскопа мало податлива к воздействию больших возмущающих сил — обладает «жесткостью» [1]. Обращалось внимание на то, что при определенных условиях свойство жесткости присуще и системам с гироскопами [2]. Свойством, в некотором смысле сходным с гироскопической жесткостью, обладают многие механические системы.

В работе жесткость интерпретируется как своеобразная устойчивость. Формулируются теоремы, устанавливающие признаки жесткости аналогично теоремам прямого метода Ляпунова.

Описание свойства жесткости связано с разделением переменных подобно тому, как это имеет место в задачах устойчивости по части переменных (см. [3, 4] и др.).

Отдельные вопросы жесткости движения рассматривались в работах [5, 6].

1. Основные определения. Уравнения движения механической системы запишем в виде

$$dy/dt = Y(t, y, g) \tag{1.1}$$

где $t \geqslant 0$ — время, y — n-мерный вектор состояния системы, g — постоянный векторный физический параметр.

В качестве невозмущенных рассмотрим движения (частное решение (1.1))

$$y = f(t, y_0, g) \tag{1.2}$$

некоторого семейства, удовлетворяющие начальным условиям: $y = y_0$ при $t = t_0$. Заметим, что значения y_0 и параметры g могут быть связаны соотношениями, представляющими собой условия существования движений (1.2).

Положив в (1.1) $y = f + x$, получим уравнение возмущенного движения

$$dx/dt = Y(t, f + x, g) - Y(t, f, g) \tag{1.3}$$

в котором y_0, g — параметры.

Уравнение (1.3) будем рассматривать зависящим от существенных для задачи жесткости движения параметров $a_1, \ldots, a_r$, записывая его в виде

$$dx/dt = X(t, x, a), \quad X(t, 0, a) \equiv 0 \tag{1.4}$$
$$a = (a_1, \ldots, a_r)$$

Будем исследовать жесткость движения $x = 0$ по отношению к части переменных x_α ($\alpha = 1, \ldots, m$; $m < n$). Положим, что вектор-функция

$X(t, x, a)$ (1.4) определена непрерывно и удовлетворяет условиям единственности решения в области

$$\Gamma_0 = \{x: |x_\alpha| < H, |x_\beta| < \infty \ (\alpha = 1, \ldots, m; \ \beta = m + 1, \ldots, n)\}, \quad t \geqslant t^* \tag{1.5}$$

при всех $a \in D$, где D — некоторая область пространства рассматриваемых параметров. Решение уравнения (1.4) обозначим $x(t, t_0, x_0, a)$ и введем в пространстве переменных $\{x_1, \ldots, x_n\}$ параллелепипеды, определенные неравенствами

$$\overline{\Pi}_\varepsilon = \{x: |x_\alpha| \leqslant \varepsilon_1, \ |x_\beta| \leqslant \varepsilon_2\}, \quad \overline{\Pi}_\delta = \{x: |x_\alpha| \leqslant \delta_1 < \varepsilon_1, \ |x_\beta| \leqslant \delta_2 < \varepsilon_2\} \tag{1.6}$$

обозначая в дальнейшем через $\overline{\Pi} \setminus \Pi$ множество точек границы.

Определение 1. Движение $x = 0$ обладает жесткостью по переменным x_α, если для любых чисел $\varepsilon_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ (первое может быть сколь угодно мало, а второе — велико) и момента $t_0 \geqslant t^*$ можно указать параметр $a^* \in D$ и числа $\varepsilon_2 > 0$, $\delta_1 > 0$, определяющие области (1.6), такие, что $x(t, t_0, x_0, a^*) \in \Pi_\varepsilon$ при $t \geqslant t_0$, если только $x_0 \in \overline{\Pi}_\delta$. Жесткость называется равномерной по t_0, если a^*, ε_2, δ_1 от t_0 не зависят.

Определение 2. Движение $x = 0$ обладает сильной жесткостью по переменным x_α, и область $\overline{\Pi}_\delta$ лежит в области его притяжения, если оно обладает жесткостью по этим переменным, и, сверх того, имеет место условие

$$\lim_{t \to \infty} x(t, t_0, x_0, a^*) = 0, \quad x_0 \in \overline{\Pi}_\delta$$

Если в определении 1 положить $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, то получим свойство движения, близкое к практической устойчивости, обсуждаемой в монографии [7]. Используя этот термин, приходим к следующему определению, обозначая $\| x \| = \max (| x_i |)$.

Определение 3. Движение $x = 0$ практически устойчиво, если для любого $\varepsilon > 0$ и момента $t_0 \geqslant t^*$ можно указать параметр $a^* \in D$ и число $\delta > 0$, такие, что $\| x(t, t_0, x_0, a^*) \| < \varepsilon$ при $t \geqslant t_0$, если только $\| x_0 \| \leqslant \delta$.

Свойства жесткости движения и его устойчивости (также и по части переменных) представляют собой, вообще говоря, независимые свойства движения.

Пример 1. Жесткость оси симметричного гироскопа в случае Эйлера. Пусть, как обычно, $Oxyz$ — главные оси инерции в точке закрепления, $A = B$, C — соответствующие им моменты инерции. Для описания движения воспользуемся переменными γ_1, γ_2, γ_3, p, q, r, где γ_i — косинусы углов, образуемых какой-либо фиксированной осью z_1 соответственно с осями x, y, z.

В невозмущенном движении положим

$$\gamma_1^\circ = \gamma_2^\circ = 0, \quad \gamma_3^\circ = 1, \quad p^\circ = q^\circ = 0, \quad r^\circ = \omega = \text{const} \tag{1.7}$$

В возмущенном движении обозначим

$$\gamma_1 = \eta_1, \quad \gamma_2 = \eta_2, \quad \gamma_3 = 1 - \eta_3 \quad (\eta_3 \geqslant 0)$$
$$p = \xi_1, \quad q = \xi_2, \quad r = \omega + \xi_3, \quad (\xi_3 = \text{const}) \tag{1.8}$$

Из соотношения $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ можно вывести, что

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 2\eta_3 \tag{1.9}$$

Будем рассматривать жесткость по переменным η_α ($\alpha = 1, 2, 3$), приняв $a = \omega$. Обращаясь к определению 1, заметим, что в связи с соотношением (1.9) удобнее вместо (1.6) воспользоваться соответствующими областями вида (β-1,2,3)

$$\overline{Q}_\varepsilon = \{x:\ \eta_1^2 + \eta_2^2 \leqslant \varepsilon_1^2 < 1,\ \eta_3 \leqslant 1 - \sqrt{1-\varepsilon_1^2} < \varepsilon_1;\ |\xi_\beta| \leqslant \varepsilon_2\} \tag{1.10}$$

Зададим числа $\varepsilon_1 < 1$, δ_2 и рассмотрим прежде возмущенные движения при следующих начальных условиях:

$$\eta_{\alpha 0} = 0, \quad |\xi_{\beta 0}| \leqslant \delta_2 \tag{1.11}$$

В возмущенном движении ось гироскопа z, совпадавшая в начальный момент с осью z_1, описывает вокруг вектора кинетического момента L круговой конус, угол при вершине которого равен 2θ, где

$$\sin\theta = A\omega_{10} / L, \quad \omega_{10} = (\xi_{10}^2 + \xi_{20}^2)^{1/2}, \quad L = (A^2\omega_{10}^2 + C^2r^2)^{1/2}$$

Отсюда вытекает, что $\cos 2\theta \leqslant \gamma_3(t) \leqslant 1$, и, следовательно (см. (1.8)), $\eta_3 \leqslant 1 - \cos 2\theta$, или

$$\eta_3 \leqslant 2\,(A\omega_{10} / L)^2 \tag{1.12}$$

Выберем теперь величину $|\omega|$ таким образом, чтобы для рассматриваемых возмущенных движений (1.11) имело место условие $\eta_1^2 + \eta_2^2 < \varepsilon_1^2$, тогда $\eta_3 < 1 - \sqrt{1-\varepsilon_1^2}$. Принимая во внимание (1.12), положим

$$2\,(A\omega_{10} / L)^2 < 1 - \sqrt{1-\varepsilon_1^2}$$

откуда следует неравенство

$$|\omega| > \delta_2\,(1 + \sqrt{2}\,A\varepsilon_1 / C\,(1 - \sqrt{1-\varepsilon_1^2})) \tag{1.13}$$

Из постоянства кинетической энергии гироскопа вытекает, что $|\xi_\beta| < \varepsilon_2$, если $\varepsilon_2 > \sqrt{2}\delta_2$. Таким образом, для возмущенных движений с начальными условиями (1.11) при $t > t_0$ имеют место неравенства $\eta_1^2 + \eta_2^2 < \varepsilon_1^2$, $|\xi_\beta| < \varepsilon_2$ если величина параметра удовлетворяет (1.13). Можно, однако, убедиться в существовании столь малого δ_1, зависящего от выбранного согласно (1.13) значения параметра, что и неравенства будут иметь место и для $\eta_{10}^2 + \eta_{20}^2 \leqslant \delta_1^2$, $|\xi_{\beta 0}| \leqslant \delta_2$.

2. Применение метода функций Ляпунова к задаче жесткости движения. 1°. Будем рассматривать вещественные однозначные функции $v = v(t, x, b)$, вообще говоря, зависящие от части параметров $b = (a_1, \ldots, a_p)$, $p \leqslant r$, содержащихся в уравнении (1.4). Положим, что функции v определены, непрерывны вместе с производными $\partial v / \partial t$, $\partial v / \partial x_s$ ($s = 1, \ldots, n$) в области

$$\Gamma = \{x : |x_\alpha| \leqslant h < H,\ |x_\beta| < \infty\} \subset \Gamma_0, \quad t \geqslant t^*, \quad b \in D_1 \tag{2.1}$$

Определение 4. Функция $v(x, b)$ обладает свойством (A) по x_α, если для любых $\varepsilon_1 \in (0, h)$, $\delta_2 > 0$ можно указать зависящие от них $b^* \in D_1$, $\varepsilon_2 > 0$, $\delta_1 > 0$, такие, что

$$\inf\,[v(x, b^*) : x \in \overline{\Pi}_\varepsilon \setminus \Pi_\varepsilon] > \sup\,[v(x, b^*) : x \in \overline{\Pi}_\delta] \tag{2.2}$$

Функция $v(t, x, b)$ обладает свойством (A), если в области (2.1)

$$v(t, x, b) \geqslant w(x, b) \tag{2.3}$$

и для всяких ε_1, δ_2, $t_0 \geqslant t^*$ существуют такие b^*, ε_2, δ_1, что

$$\inf\,[w(x, b^*) : x \in \overline{\Pi}_\varepsilon \setminus \Pi_\varepsilon] > \sup\,[v(t_0, x, b^*) : x \in \overline{\Pi}_\delta] \tag{2.4}$$

Функция $v(t, x, b)$ обладает свойством (A) равномерно по $t \in [t^*, \infty)$, если в области (2.1)

$$W(x, b) \geqslant v(t, x, b) \geqslant w(x, b) \tag{2.5}$$

и для всяких ε_1, δ_2 существуют такие b^*, ε_2, δ_1, что

$$\inf [w(x, b^*): x \in \overline{\Pi}_\varepsilon \setminus \Pi_\varepsilon] > \sup [W(x, b^*): x \in \overline{\Pi}_\delta] \tag{2.6}$$

Обозначив $r_1 = \max(|x_\alpha|)$, $r_2 = \max(|x_\beta|)$, рассмотрим для какого-либо $\varepsilon \in (0, h)$ область $G_\varepsilon = \{x: 0 \leqslant r_1 \leqslant \varepsilon, 0 \leqslant r_2 < \infty\}$ и множество ее граничных точек $R_\varepsilon = \{x: r_1 = \varepsilon, 0 \leqslant r_2 < \infty\}$.

Лемма. Для того чтобы функция $v(x, b)$ обладала свойством (A) по x_α, достаточно выполнения следующих условий:

а) $v = v^*(x_\beta)$, если $x_\alpha = 0$;

б) для всякого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ и большого $M > 0$ существует параметр $b^* \in D_1$, такой, что $\inf v(x, b^*) > M$ на множестве $x \in R_\varepsilon$;

в) $v(x, b) \to +\infty$ при $r_2 \to +\infty$ равномерно относительно x_α в области G_ε.

Доказательство. Покажем, что для функций, удовлетворяющих условиям леммы, можно построить области $\overline{\Pi}_\varepsilon$, $\overline{\Pi}_\delta$, для которых будет выполняться неравенство (2.2). Действительно, пусть заданы ε_1, δ_2. Тогда

$$\sup [v(x, b): x_\alpha = 0, \quad |x_\beta| \leqslant \delta_2] = M(\delta_2)$$

Выберем $b^* \in D_1$ таким, чтобы

$$\inf v(x, b^*) > M(\delta_2), \quad x \in R_{\varepsilon_1}$$

Можно указать достаточно большое $\varepsilon_2 > \delta_2$, такое, что

$$\inf [v(x, b^*): x \in \overline{\Pi}_\varepsilon \setminus \Pi_\varepsilon] > M(\delta_2)$$

Наконец, в силу равномерной непрерывности функции $v/x, b^*$ в области $\overline{\Pi}_\varepsilon$ существует достаточно малое δ_1, определяющее $\overline{\Pi}_\delta$ в неравенстве (2.2).

Очевидно, что функция $v(t, x, b)$ обладает свойством (A), если $v = v^*(t, x_\beta)$ при $x_\alpha = 0$ и существует функция $w(x, b)$, удовлетворяющая неравенству (2.3) и условиям леммы.

Если существуют функции $W(x, b)$, $w(x, b)$, удовлетворяющие неравенствам (2.5) и условиям леммы, то функция $v(t, x, b)$ обладает свойством (A) равномерно по $t \in [t^*, \infty)$.

Замечание 1. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ и $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. Будем говорить, что функция $v(x, b)$, удовлетворяющая в этом случае условию (2.2) определения 4, обладает свойством (B). В соответствии с леммой можно заключить, что $v(x, b)$ обладает свойством (B), если $v(0, b) \equiv 0$ и для всякого ε (сколь бы мало оно ни было) существует b^*, при котором $\inf [v(x, b^*): \|x\| = \varepsilon] > 0$.

2°. *Некоторые признаки жесткости движения. Теорема* 1. Если система (1.4) такова, что:

а) существует функция $v(t, x, b)$, обладающая свойством (A) по x_α;

б) функция v и ее производная $v^\cdot$ (в силу системы (1.4)) удовлетворяют условию: для всяких наперед заданных ε_1, δ_2, $t_0 \geqslant t^*$ возможно указать

$a^* \in D$, ε_2, δ_1, такие, что наряду с неравенством (2.4) имеет место $v^\cdot$ $(t, x, a^*) \leqslant 0$ для всех $t \geqslant t_0$, $x \in \overline{\Pi}_\varepsilon$, то движение $x = 0$ обладает жесткостью по x_α.

Доказательство. Положим, что условия теоремы выполнены: для произвольных ε_1, δ_2, t_0 определен параметр a^* и построены области $\overline{\Pi}_\varepsilon$, $\overline{\Pi}_\delta$. Тогда решения $x(t, t_0, x_0, a^*) \in \Pi_\varepsilon$, если только $x_0 \in \overline{\Pi}_\delta$. Действительно, рассуждая от противного, положим, что при $a = a^*$ существует решение $x(t)$, достигающее в момент времени $t_1 > t_0$ границы $\overline{\Pi}_\varepsilon$, несмотря на то, что при $t = t_0$ имело место условие $x_0 \in \overline{\Pi}_\delta$. Так как решение $x(t) \in \in \overline{\Pi}_\varepsilon$ при $t \in [t_0, t_1]$, то вдоль него функция v не возрастает и, следовательно, $v(t_1, x(t_1), b^*) \leqslant v(t_0, x_0, b^*)$, что противоречит (2.4). Свойство жесткости движения $x = 0$ имеет место.

Следствие 1. Если существует функция $v(t, x, b)$, обладающая свойством (A) по x_α, а $v^\cdot$ $(t, x, a) \leqslant 0$, для всех $t \geqslant t^*$, $x \in \Gamma$, $a \in D$, то движение $x = 0$ обладает жесткостью по x_α.

Теорема 2. Если система (1.4) такова, что:

а) существует функция $v(t, x, b)$, обладающая свойством (A) по x_α равномерно по $t \in [t^*, \infty)$;

б) функция v и ее производная $v^\cdot$ удовлетворяют условию: для всяких наперед заданных ε_1, δ_2 возможно указать $a^* \in D$, ε_2, δ_1, такие, что наряду с неравенством (2.6) имеет место $v^\cdot$ $(t, x, a^*) \leqslant 0$ для всех $t \geqslant t^*$, $x \in \in \overline{\Pi}_\varepsilon \setminus \overline{\Pi}_\delta$, то движение $x = 0$ обладает жесткостью по x_α, равномерной по $t_0 \in [t^*, \infty)$.

Доказательство. Рассуждая от противного, положим, что при $a = a^*$ существует решение $x(t)(x(t_0) = x_0, x_0 \in \overline{\Pi}_\delta, t_0 \geqslant t^*)$, достигающее границы $\overline{\Pi}_\varepsilon$ в момент времени $t_1 > t_0$. Пусть t' $(t_0 \leqslant t' < t_1)$ — момент времени, для которого $x(t') \in \overline{\Pi}_\delta \setminus \Pi_\delta$, и если $t \in [t', t_1]$, то $x(t) \in \overline{\Pi}_\varepsilon \setminus \setminus \Pi_\delta$. На указанном отрезке времени вдоль решения $x(t)$ функция v не возрастает, а поэтому $v(t_1, x(t_1), b^*) \leqslant v(t', x(t'), b^*)$. Последнее, однако, противоречит условию (2.6). Следовательно, $x(t) \in \Pi_\varepsilon$, если $x_0 \in \in \overline{\Pi}_\delta$, $t_0 \geqslant t^*$.

Теорема 3. Если система (1.4) такова: что:

а) существует функция $v(t, x, b)$, обладающая свойством (A) по x_α и допускающая в точке $x = 0$ бесконечно малый высший предел;

б) функция v и ее производная $v^\cdot$ удовлетворяют условию: для всяких наперед заданных ε_1, δ_2, $t_0 \geqslant t^*$ можно указать $a^* \in D$, ε_2, δ_1, такие, что выполняется неравенство (2.4) и в области $\overline{\Pi}_\varepsilon$ при $t \geqslant t_0$ $v_1^\cdot(t, x, b^*)$ — определенно-положительна, а $v^\cdot$ (t, x, a^*) — определенно-отрицательна, то движение $x = 0$ обладает сильной жесткостью по x_α.

Доказательство. Функция v и ее производная $v^\cdot$ удовлетворяют условиям теоремы 1, а потому движение $x = 0$ обладает жесткостью по x_α. Следовательно, всякое решение $x(t, t_0, x_0, a^*) \in \Pi_\varepsilon$ при $t \geqslant t_0$, если $x_0 \in \in \overline{\Pi}_\delta$. Остается показать, что $x(t, t_0, x_0, a^*) \to 0$ при $t \to \infty$. Последнее можно установить, пользуясь, например, схемой доказательства теоремы II [7].

Следствие 2. Если существует функция $v(t, x, b)$, обладающая свойством (A) по x_α, определенно-положительная и допускающая в точке $x = 0$ бесконечно малый высший предел, а $v^{\cdot}(t, x, a)$ — определенно-отрицательна для всех $t \geqslant t^*$, $x \in \Gamma$, $a \in D$, то движение $x = 0$ обладает сильной жесткостью по x_α.

Замечание 2. Теорема 1 может быть распространена на практическую устойчивость, если воспользоваться функциями, обладающими свойством (B).

3°. Рассмотрим систему (1.4) при постоянно действующих возмущениях

(2.7) $$dx/dt = X(t, x, a) + \mu R(t, x, a) \quad (\mu = \mathrm{const} > 0)$$

Заметим, что необходимость исследования подобных систем с малым параметром μ возникает, например, в теории колебаний и других задачах.

Помимо обычных требований, предъявляемых к функциям $R_s(t, x, a)$ $(s = 1, \ldots, n)$, будем полагать их равномерно ограниченными в каждой области $\overline{\Pi}_\varepsilon \subset \Gamma_0$ (1.5) при $t \geqslant t^*$.

Движение $x = 0$ обладает жесткостью по x_α при постоянно действующих возмущениях, если для любых ε_1, δ_2, t_0 можно указать зависящие от них a^*, μ^* и такие ε_2, δ_1, определяющие области (1.6), что решения уравнения (2.7) $x(t, t_0, x_0, a^*, \mu^*) \in \Pi_\varepsilon$ $(t \geqslant t_0)$, если только $x_0 \in \overline{\Pi}_\delta$, каковы бы ни были функции R_s.

Положим, что для системы (1.4) построена функция $v(t, x, b)$, удовлетворяющая условиям теоремы 2 при следующих дополнениях: $v^{\cdot}(t, x, a^*) < -l$ $(l = \mathrm{const} > 0)$, $x \in \overline{\Pi}_\varepsilon \setminus \Pi_\delta$, $t \geqslant t^*$, производные $\partial v(t, x, b^*)/\partial x_s$ $(s = 1, \ldots, n)$ равномерно ограничены в области $\overline{\Pi}_\varepsilon$ при $t \geqslant t^*$. Тогда движение $x = 0$ обладает жесткостью при постоянно действующих возмущениях.

Действительно, движение $x = 0$ системы (1.4) обладает жесткостью по x_α равномерно по $t_0 \in [t^*, \infty)$. Положим, что зафиксирован параметр a^* и построены области $\overline{\Pi}_\varepsilon$, $\overline{\Pi}_\delta$, для которых имеет место (2.6), а также $v^{\cdot}(t, x, a^*) < -l$ $(x \in \overline{\Pi}_\varepsilon \setminus \Pi_\delta$, $t \geqslant t^*)$. При этом $|\partial v(t, x, b^*)/\partial x_s| < N$, $|R_s(t, x, a^*)| < M$. Составим выражение производной функции $v(t, x, b^*)$ в силу системы (2.7). Получим

$$v^{\cdot}(t, x, a^*, \mu)_{(2.7)} = v^{\cdot}(t, x, a^*) + \mu \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial v(t, x, b^*)}{\partial x_s} R_s(t, x, a^*)$$

откуда следует, что если $x \in \overline{\Pi}_\varepsilon \setminus \Pi_\delta$, $t \geqslant t^*$, то

$$v^{\cdot}(t, x, a^*, \mu)_{(2.7)} < -l + \mu n N M$$

и для $\mu^* < l / nNM$ будет $v^{\cdot}(t, x, a^*, \mu^*)_{(2.7)} < 0$. Последнее означает, что решения системы (2.7) с начальными условиями $x_0 \in \overline{\Pi}_\delta$, $t_0 \geqslant t^*$ не покидают при $t > t_0$ области Π_ε.

Как видно, приведенные теоремы представляют собой в известном смысле аналоги теорем об устойчивости движения. Подобным же образом могут быть установлены признаки нежестких движений, на обсуждении которых здесь не останавливаемся.

Пример 2. Жесткость оси вертикально выпрямленного гироскопа Лагранжа. При вертикально вверх направленной оси z_1 невозмущенному движению отвечают значения переменных (1.7), а возмущенному — с (1.8). Так как переменная η_3 может быть выражена через η_1, η_2 (1.9), то зависящие от параметра r уравнения возмущенного движения могут быть записаны для переменных ξ_i, η_i $(i = 1, 2)$. Пользуясь известными в случае Лагранжа интегралами уравнений движения, можно записать и интегралы уравнений возмущенного движения

$$(2.8)\qquad v_1 = A(\xi_1^2 + \xi_2^2) - 2mgz\eta_3, \quad v_2 = A(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2) - Cr\eta_3$$
$$(\eta_3 = 1 - (1 - \eta_1^2 - \eta_2^2)^{1/2})$$

здесь z — координата центра тяжести.

Рассмотрим связку интегралов (2.8)

$$(2.9)\qquad v(x, r) = v_1 - \lambda v_2 = A(\xi_1^2 + \xi_2^2) - A\lambda(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2) + (\lambda Cr - 2mgz)\eta_3$$

где λ — неопределенная пока постоянная.

Покажем, что функция v (2.9) обладает свойством (A) по η_1, η_2, удовлетворяя условиям приведенной выше леммы. С этой целью выполним требуемые построения, используя области (1.10).

Пусть заданы $\varepsilon_1 < 1$, δ_2. Так как $v^*(\xi) = A(\xi_1^2 + \xi_2^2)$, то

$$M = \sup[v(x, r): \eta_1 = \eta_2 = 0, \ |\xi_1| \leqslant \delta_2, \ |\xi_2| \leqslant \delta_2] = 2A\delta_2^2$$

На множестве $\eta_1^2 + \eta_2^2 = \varepsilon_1^2$ функция v имеет минимум

$$(2.10)\qquad \min v = (\lambda Cr - 2mgz)(1 - \sqrt{1 - \varepsilon_1^2}) - {}^1/_4 A\lambda^2\varepsilon_1^2$$

зависящий от параметра связки λ. Выбрав величину этого параметра из условия максимума выражения (2.10), получим

$$(2.11)\qquad \max\min v = C^2r^2(1 - \sqrt{1 - \varepsilon_1^2})^2 / A\varepsilon_1^2 - 2mgz(1 - \sqrt{1 - \varepsilon_1^2})$$

Потребуем, чтобы $\max\min v > M$. Согласно (2.11) получим следующее условие для выбора величины параметра r:

$$(2.12)\qquad C^2r^2 > 2A\varepsilon_1^2[A\delta_2^2 + mgz(1 - \sqrt{1 - \varepsilon_1^2})] / (1 - \sqrt{1 - \varepsilon_1^2})^2$$

Функция (2.9) удовлетворяет и последнему условию леммы. Действительно, $v(x, r) \to +\infty$ при $\xi_1^2 + \xi_2^2 \to \infty$ равномерно в области $\eta_1^2 + \eta_2^2 \leqslant \varepsilon_1^2$.

Положив теперь (2.12) $r = \omega + \xi_3$, где $|\xi_3| \leqslant \delta_2$, получим

$$(2.13)\qquad |\omega| > \delta_2 + \sqrt{2A}\varepsilon_1[A\delta_2^2 + mgz(1 - \sqrt{1 - \varepsilon_1^2})]^{1/2} / C(1 - \sqrt{1 - \varepsilon_1^2})$$

Заметим, что числа δ_1, ε_2, определяющие для переменных ξ_i, η_i $(i = 1, 2)$ области (1.10), будут зависеть от ξ_3. Имея в виду, что $|\xi_3| \leqslant \delta_2$, можно принять $\delta_1 = \inf \delta_1(\xi_3)$, $\varepsilon_2 = \sup \varepsilon_2(\xi_3)$.

Таким образом функция v (2.9), будучи интегралом уравнений возмущенного движения, обладает свойством (A) по η_1, η_2. Тогда на основании следствия 1 можно сделать вывод о жесткости движения (1.7) по этим переменным.

Заключая рассмотрение примера, заметим, что при $z = 0$ неравенство (2.13) переходит в (1.13). Можно также показать, что неравенство (2.12) выполняется при достаточно малых ε_1, δ_2, если имеет место условие устойчивости $C^2\omega^2 > 4\,Amgz$ [8]. Действительно, полагая $\delta_2 / \varepsilon_1 \to 0$ при $\varepsilon_1 \to 0$, получим, что предел правой части неравенства (2.12) будет равен $4Amgz$.

Пример 3. Свойство жесткости равновесия консервативной системы. Положение равновесия системы, стесненной голономными и стационарными связями, определим обобщенными координатами q_i $(i = 1, \ldots, n)$. Рассмотрим случай, когда потенциальная энергия системы $\Pi = \Pi(q_1, \ldots, q_n, a_1, \ldots, a_r)$ зависит от параметров, и положим, что $q_i = 0$ — изолированное при каждом $a \in D$ положение равновесия. Примем, что $\Pi(0, a) \equiv 0$.

Обозначим

$$\varphi(\varepsilon, a) = \inf [\Pi(q, a) : q \in K_\varepsilon \setminus \overline{K}_\varepsilon], \quad \overline{K}_\varepsilon = \{q : |q_i| \leqslant \varepsilon\}$$

где ε достаточно мало.

Положение равновесия $q = 0$ обладает жесткостью по координатам, если, каковы бы ни были положительные ε, N (первое сколь угодно мало, а второе велико), существует зависящий от них параметр $a^* \in D$, такой, что $\varphi(\varepsilon, a^*) > N$.

Действительно, при сделанных предположениях полная энергия системы

$$v(q, q^{\cdot}, a) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(q) q_i^{\cdot} q_j^{\cdot} + \Pi(q, a)$$

обладает свойством (A) по q, удовлетворяя условиям леммы. Так как в силу уравнений движения $v^{\cdot} \equiv 0$, то интеграл v удовлетворяет и условиям следствия 1.

Поступила 1 VIII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булгаков Б. В.* Прикладная теория гироскопов. М., Гостехиздат, 1955.
2. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М., «Наука», 1974.
3. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., астрон. физ., хим., 1957, № 4.
4. *Румянцев В. В.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения по отношению к части переменных. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
5. *Скимель В. Н.* О свойстве жесткости некоторых движений консервативных систем. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1974, вып. 171.
6. *Скимель В. Н.* О свойстве жесткости движений и приемлемости приближенных решений. В сб.: Проблемы аналитической механики, теорий устойчивости и управления. М., «Наука», 1975.
7. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
8. *Четаев Н. Г.* Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа. ПММ, 1954, т. 18, вып. 1.