

## НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ ОДНОЗНАЧНЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В. В. Козлов

(Москва)

Исследования Ковалевской, Ляпунова и других авторов в динамике твердого тела показали, что общее решение уравнений движения представляется однозначными функциями времени только в классических случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской как раз тогда, когда существует дополнительный однозначный интеграл. Оставалось неясным, является ли это обстоятельство случайным совпадением или же в его основе лежат какие-то глубокие причины. В работе методом малого параметра Пуанкаре доказано, что именно существование бесконечного числа неоднозначных решений препятствует появлению нового однозначного аналитического интеграла в общем случае.

1. Теорема о несуществовании однозначных интегралов. Рассмотрим каноническую систему дифференциальных уравнений с гамильтонианом

$$(1.1) \quad \begin{aligned} H(I, \varphi, \mu) &= H_0(I) + \mu H_1(I, \varphi) + \dots \\ I &= (I_1, I_2), \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \end{aligned}$$

Функция  $H(I, \varphi, \mu)$  предполагается действительной аналитической функцией в прямом произведении  $D \times T^2 \{\varphi \bmod 2\pi\} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  ( $D$  — область в  $R^2 \{I_1, I_2\}$ ).

Предположим, что при фиксированных  $I \in D$ ,  $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  гамильтониан (1.1) продолжается до однозначной аналитической функции по переменным  $\varphi_1, \varphi_2$  в прямом произведении комплексных плоскостей  $C \times C$ . При этом не исключается наличие особых точек у функции (1.1) при комплексных значениях  $\varphi_1, \varphi_2$ .

Введем некоторые обозначения. Пусть  $V$  — компактная подобласть  $D$  и  $\nu > 0$ . Тогда  $\Delta(V, \nu) = \{I : I = I' + iI'', I' \in V, |I''| < \nu\}$ . Если  $V' \subset V$ , и  $\nu' < \nu$ , то  $\Delta(V', \nu') \subset \Delta(V, \nu)$ . Положим  $\Pi(\rho) = \{(\varphi_1, \varphi_2) \in C \times C : |\operatorname{Im} \varphi_k| < \rho; k = 1, 2\}$ .

Все решения невозмущенной системы

$$I = I^0, \quad \varphi = \varphi^0 + \omega t \quad (\omega = (\omega_1, \omega_2), \quad \omega_k(I) = \partial H_0 / \partial I_k; k = 1, 2)$$

являются однозначными функциями комплексного переменного  $t \in C$ . Однако решения возмущенных уравнений, когда  $\mu \neq 0$ , в общем случае неоднозначны.

Рассмотрим на комплексной плоскости времени  $t \in C$  замкнутый непрерывный контур  $\Gamma$  и его образ  $\gamma$  при отображении  $t \rightarrow C \times C (t \in \Gamma)$  со-

Согласно формуле

$$\varphi(t) = \varphi^\circ + \omega(I^\circ)t \quad (I^\circ \in D, \varphi^\circ \in T^2)$$

Предположим, что функция Гамильтона  $H(I, \varphi, \mu)$  аналитична в прямом произведении  $V \times \Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ , где  $V$  — некоторая компактная окрестность точки  $I^\circ \in D$ ,  $\Omega$  — связная область в  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ,  $\Pi(s) \subset \Omega \subset \subset \Pi(S)$  ( $0 < s < S$ ), содержащая непрерывную кривую  $\gamma$ .

Если  $\varphi \in \Omega$ , то

$$H(I, \varphi + 2\pi, \mu) = H(I, \varphi, \mu)$$

В самом деле, это равенство справедливо для действительных значений  $\varphi$ . В общем случае, когда  $\varphi \in \Omega$ , оно вытекает из связности  $\Omega$  и единственности аналитического продолжения.

Заметим, что когда  $\varphi \in \Omega$ ,  $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , функция  $H(I, \varphi, \mu)$  аналитична по переменным  $I_1, I_2$  в области  $\Delta(V, \nu)$ , если  $\nu$  достаточно мало.

Согласно теореме Пуанкаре [1,2] решения возмущенных уравнений можно разложить в степенные ряды по  $\mu$

$$(1.2) \quad \begin{aligned} I &= I^\circ + \mu I^1(t; I^\circ, \varphi^\circ) + \dots \\ \varphi &= \varphi^\circ + \omega(I^\circ)t + \mu \varphi^1(t; I^\circ, \varphi^\circ) + \dots \end{aligned}$$

Если  $t \in \Gamma$ , то эти ряды сходятся при малых значениях параметра  $\mu$ .

Будем говорить, что аналитическая вектор-функция  $f(t)$ ,  $t \in \Gamma$  неоднозначна вдоль  $\Gamma$ , если она испытывает скачок  $\xi \neq 0$  после обхода контура  $\Gamma$ . Если функция  $I^1(t; I^\circ, \varphi^\circ)$  неоднозначна вдоль  $\Gamma$ , то при малых значениях параметра  $\mu$  возмущенное решение (1.2) тоже неоднозначно вдоль контура  $\Gamma$ .

Зафиксируем начальные данные  $I^\circ, \varphi^\circ$  и будем непрерывно деформировать контур  $\Gamma$  так, что при этом контур  $\gamma$  не пересечет ни одной особой точки функции Гамильтона  $H(I, \varphi, \mu)$ . Используя теорему Коши, можно показать, что функция  $I^1(t; I^\circ, \varphi^\circ)$  при обходе деформированного контура будет снова изменяться на ту же величину  $\xi = (\xi_1, \xi_2) \neq 0$ . Так как решения (1.2) непрерывны по начальным данным [1,2], то неоднозначность функции  $I^1(t; I^\circ, \varphi^\circ)$  вдоль контура  $\Gamma$  будет иметь место при всех  $I = I^\circ$  из некоторой малой области  $U \subset D$ . При этом скачок  $\xi = \xi(I^\circ) \neq 0$ , если  $I^\circ \in U$ .

Будем говорить, что система канонических уравнений с гамильтонианом (1.1) имеет однозначный интеграл  $F(I, \varphi, \mu)$ , если эта функция

- 1) есть первый интеграл;
- 2) является действительной аналитической функцией в области  $D \times T^2 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ ;
- 3) при фиксированных значениях  $I, \mu$  однозначна по переменным  $\varphi_1, \varphi_2$  в прямом произведении  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ .

Очевидно, что одним из однозначных интегралов служит функция  $H$ . Подчеркнем, что не исключается наличие особых точек функции  $F$  при комплексных значениях переменных  $\varphi_1, \varphi_2$ .

**Теорема 1.** Предположим, что невозмущенная система невырождена, т. е. гессиян

$$|\partial^2 H_0 / \partial I^2| \neq 0$$

в области  $D$ , и при некоторых  $I^0 \in D$ ,  $\varphi^0 \in T^2$  функция  $I^1(t; I^0, \varphi^0)$  неоднозначна вдоль контура  $\Gamma$ . Тогда каноническая система дифференциальных уравнений с гамильтонианом (1.1) не имеет однозначного интеграла  $F(I, \varphi, \mu)$ , независимого от функции (1.1) и аналитического в прямом произведении  $W \times \Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ , где  $W$  — некоторая окрестность точки  $I = I^0$ .

2. Доказательство теоремы 1 (ср. с [1], гл. V). Разложим функцию  $F(I, \varphi, \mu)$  в ряд по степеням  $\mu$

$$(2.1) \quad F = F_0(I, \varphi) + \mu F_1(I, \varphi) + \dots$$

Если  $(I, \varphi) \in \Delta(V, \nu) \times \Omega$  ( $V \subset W$ ,  $\nu$  достаточно мало), то этот ряд сходится при малых значениях параметра  $\mu$ .

*Лемма 1.* Функция  $F_0$  не зависит от  $\varphi$ .

Действительно, если  $(I, \varphi) \in D \times T^2$ , то из невырожденности невозмущенной системы вытекает, что  $F_0$  не зависит от  $\varphi$  (см. [1], гл. V). Если же  $\varphi \in \Omega$ , то это утверждение следует из связности области  $\Omega$ .

*Лемма 2.* Функции  $H_0(I)$  и  $F_0(I)$  зависимы в области  $W$ , т. е. якобиан

$$(2.2) \quad \frac{\partial(H_0, F_0)}{\partial(I_1, I_2)} \equiv 0$$

когда  $I \in W$ .

*Доказательство.* Так как  $F(I, \varphi, \mu)$  — первый интеграл канонической системы уравнений с гамильтонианом (1.1), то эта функция постоянна вдоль решений (1.2). Следовательно, ее значения в момент времени  $\tau \in \Gamma$  и после обхода контура  $\Gamma$  совпадают. Отсюда

$$F_0(I^0 + \mu I^1(\tau) + \dots) + \mu F_1(I^0 + \mu I^1(\tau) + \dots, \varphi^0 + \omega t + \mu \varphi^1(\tau) + \dots) + \dots \equiv F_0(I^0 + \mu(I^1(\tau) + \xi(I^0)) + \dots) + \mu F_1(I^0 + \dots, \varphi^0 + \omega t + \dots) + \dots$$

Разлагая это тождество в степенной ряд по  $\mu$  и приравнявая нулю коэффициент при первой степени  $\mu$ , получим

$$\frac{\partial F_0}{\partial I_1} \xi_1 + \frac{\partial F_0}{\partial I_2} \xi_2 = 0$$

Так как  $H(I, \varphi, \mu)$  — тоже первый однозначный интеграл, то

$$\frac{\partial H_0}{\partial I_1} \xi_1 + \frac{\partial H_0}{\partial I_2} \xi_2 = 0$$

Сравнивая последние два соотношения, заключаем, что при  $I^0 \in W \cap U$  справедливо тождество (2.2), т. е. функции  $H_0$  и  $F_0$  зависимы в области  $W \cap U$ , а значит, и во всей области  $W$ .

Предположим теперь, что функции (1.1) и (2.1) независимы. Пусть  $J$  — ненулевой минор второго порядка матрицы Якоби

$$\frac{\partial(H, F)}{\partial(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2)}$$

Функция  $J(I, \varphi, \mu)$  аналитична, и её можно разложить в сходящийся степенной ряд по  $\mu$ . Предположим, что в этом разложении коэффициент при  $\mu^p$  ( $p \geq 0$ ) отличен от нуля. Из леммы 2 вытекает, что  $p \geq 1$ .

Так как гессиан  $|\partial^2 H_0 / \partial I^2| \neq 0$ , то в некоторой малой области  $V \subset W \subset D$  производная  $\partial H_0 / \partial I_1 \neq 0$ . Следовательно, в этой области уравнение  $H_0(I_1, I_2) = H_0$  можно разрешить относительно  $I_1$  и подставить полученное выражение в функцию  $F_0(I_1, I_2)$ . Тогда  $F_0 = F_0(I_1(H_0, I_2), I_2)$ . Так как  $H_0$  и  $F_0$  зависимы, то  $F_0 = \Psi(H_0)$ , где  $\Psi(x)$  — аналитическая функция в интервале  $(\min_V H_0, \max_V H_0)$ . Заметим, что  $\Psi(z)$  аналитична в малой комплексной окрестности этого интервала.

Если  $\mu$  достаточно мало, то функция  $\Psi(H)$  аналитична по  $I, \varphi$  в области  $V' \times \Omega$ , где  $V'$  — компактная область, лежащая внутри  $V$ . Так как разложение функции  $F - \Psi(H)$  в ряд по степеням  $\mu$  не содержит свободного члена, то  $F - \Psi(H) = \mu F'$ . Функция  $F'(I, \varphi, \mu)$  — первый однозначный интеграл, аналитический в области  $\Delta(V', \nu') \times \Omega \times (-\varepsilon', \varepsilon')$ , где  $\nu', \varepsilon'$  достаточно малы. По леммам 1 и 2 функция  $F_0'$  не содержит  $\varphi$  и  $H_0(I)$  и  $F_0'(I)$  зависимы в области  $V' \subset D$ . Так как  $F = \Psi(H) + \mu F_0' + \mu^2 F_1' + \dots$ , то разложение минора  $J$  в ряд по степеням  $\mu$  начинается с членов порядка  $\mu^2$ .

Повторяя эту операцию  $r$  раз, приходим к заключению, что разложение функции  $J$  начинается с членов порядка  $\mu^{p+1}$ , а не  $\mu^p$ , как предполагалось выше. Полученное противоречие доказывает теорему 1.

**3. Приложение к задаче о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.** Функцию Гамильтона этой задачи можно представить в виде (см. [1], п. 86)

$$(3.1) \quad H = H_0 + \mu H_1$$

где  $H_0$  — кинетическая энергия системы (гамильтониан задачи Эйлера — Пуансо),  $\mu H_1$  — потенциальная энергия ( $\mu$  — произведение веса тела на расстояние от точки подвеса до центра тяжести). Будем считать параметр  $\mu$  малым. Другими словами, задача о вращении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой рассматривается как возмущение интегрируемого случая Эйлера — Пуансо.

Используя интеграл площадей, понизим число степеней свободы до двух. Всюду ниже предполагается, что постоянная площадей зафиксирована.

Невозмущенная задача, когда  $\mu = 0$ , интегрируема. В переменных действие — угол  $I, \varphi$  функция  $H_0$  зависит только от  $I = (I_1, I_2)$ . Эта зависимость определяется из следующего неявного соотношения [3]:

$$I_1(H_0, I_2) = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{\frac{2H_0 - I_2^2(A^{-1} \sin^2 x + B^{-1} \cos^2 x)}{C^{-1} - A^{-1} \sin^2 x - B^{-1} \cos^2 x}} dx$$

Здесь  $A \geq B \geq C$  — главные моменты инерции твердого тела. Функция  $H_0(I_1, I_2)$ , определенная в области  $\Delta = \{I_1, I_2 : I_2 \geq 0, |I_1| \leq I_2\}$ , аналитична всюду, за исключением точек, лежащих на прямых линиях  $I_1 = 0, |I_1| = I_2, 2H_0 = B^{-1}I_2^2$  [3]. Обозначим через  $\Delta_a$  одну из связных компонент области аналитичности функции  $H_0$ .

При фиксированном  $I \in \Delta_a$  возмущающая функция  $H_1(I, \varphi)$  аналитична на двумерном торе  $T^2\{\varphi \bmod 2\pi\}$  и является однозначной мероморфной функцией в  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  [4,5]. Следовательно, в рассматриваемой задаче можно поставить вопрос о существовании новых однозначных аналитиче-

ских интегралов. Будем рассматривать случай, когда твердое тело несимметрично, т. е.  $A > B > C$ .

Невозмущенная интегрируемая задача Эйлера — Пуансо невырожденная, так как гессиан  $|\partial^2 H_0 / \partial I^2|$  отличен от нуля во всей области  $\Delta_a$  [3]. Возникает вопрос: существует ли контур  $\Gamma$  и начальные условия  $(I^0, \varphi^0) \in \Delta_a \times T^2$ , при которых соответствующая функция  $I^1(t; I^0, \varphi^0)$  неоднозначна вдоль  $\Gamma$ .

Возмущающую функцию  $H_1(I, \varphi)$  можно представить в следующем виде [5]:

$$H_1 = f_+(I, \varphi_1) \exp(i\varphi_2) + f_-(I, \varphi_1) \exp(-i\varphi_2) + f_0(I, \varphi_1)$$

При фиксированном значении  $I \in \Delta_a$  комплексно-сопряженные мероморфные функции  $f_+(I, z)$  и  $f_-(I, z)$  имеют действительный период  $2\pi$  и чисто мнимый «квазипериод»  $i\alpha(I)$  (подробности см. в [5]). Например, если центр тяжести лежит на большей оси эллипсоида инерции, то

$$f_{\pm}(I, z + i\alpha) = f_{\pm}(I, z) \exp[\mp \sigma(I)]$$

Приведем явные выражения для функций  $\alpha(I)$  и  $\sigma(I)$  [5]:

$$(3.2) \quad \alpha = \frac{K'}{K}, \quad \sigma = \frac{\pi}{K} F\left(\arctg \frac{\kappa}{\lambda}, \lambda'\right), \quad K'(\lambda) = K(\lambda')$$

$$\kappa^2 = \frac{C(A-B)}{A(B-C)}, \quad \lambda^2 = \kappa^2 \frac{2CH_0 - I_2^2}{I_2^2 - 2AH_0}, \quad \lambda' = \sqrt{1 - \lambda^2}$$

Здесь  $K(\lambda)$  — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем  $\lambda$ ,  $F$  — эллиптический интеграл первого рода.

Функция  $f_0(I, z)$  — эллиптическая, с действительным периодом  $2\pi$  и мнимым периодом  $i\alpha$ .

Пусть при  $I = I^0$  отношение частот  $\omega_2/\omega_1$  равно целому числу  $n$ . Если величина  $|n|$  достаточно велика, то такие значения переменных «действие»  $I^0$  существуют [3]. В этом случае действительная функция

$$h(I^0, t) = f_+(I^0, \omega_1 t) \exp(i\omega_2 t) + f_-(I^0, \omega_1 t) \exp(-i\omega_2 t)$$

периодична по  $t$  с некоторым периодом  $T$ . Положим

$$h_n(I^0) = \frac{1}{T} \int_0^T h(I^0, t) dt$$

Заметим, что при фиксированных значениях  $A, B, C$  средние  $h_n$  зависят лишь от  $n$ , но не от  $I^0$  [3, 6]. Используя разложения функций  $f_+$  и  $f_-$  в тригонометрические ряды [5], можно показать, что бесконечно много средних величин  $h_n$  отличны от нуля (ср. с [6]). Обозначим через  $V_n$  множество точек  $I \in \Delta_a$ , удовлетворяющих условиям  $\omega_2(I) / \omega_1(I) = n$  и  $h_n(I) \neq 0$ .

Пусть  $I^0$  принадлежит некоторому  $V_n$  и  $\varphi^0 = 0$ . Рассмотрим на комплексной плоскости  $t \in \mathbb{C}$  замкнутый контур  $\Gamma$  — границу прямоугольника ABCD (фигура). Число  $\tau$  выберем так, чтобы мероморфные функции  $f_{\pm}(I^0, \omega_1 z)$ ,  $f_0(I^0, \omega_1 z)$  не имели полюсов на  $\Gamma$ . Обозначим через  $\gamma$  замкнутую непрерывную кривую в  $\mathbb{E} \times \mathbb{C}$ , являющуюся образом следующего отображения:

$$\varphi = \omega(I^0)t, \quad t \in \Gamma \quad (\varphi = (\varphi_1, \varphi_2), \quad \omega = (\omega_1, \omega_2))$$

Обозначим через  $U$  малую окрестность точки  $I^\circ \in \mathbb{V}_n$ . Пусть  $\Omega$  — связная окрестность контура  $\gamma$  в  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ,  $\Pi(s) \subset \Omega \subset \Pi(S)$  ( $0 < s < S$ ), такая, что при всех  $I \in U$  мероморфные функции  $f_\pm(I, \varphi_1)$ ,  $f_0(I, \varphi_1)$  не имеют полюсов в области  $\Omega$ .

**Теорема 2.** Для любого несимметричного твердого тела существует  $N(A, B, C)$ , такое, что если точка

$$I^\circ \in \mathbb{V} = \bigcup_{|n| \geq N} \mathbb{V}_n \subset \Delta_\alpha$$

то канонические уравнения движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой не имеют независимого от функции (3.1) однозначного интеграла  $F(I, \varphi, \mu)$ , аналитического в прямом произведении  $U \times \Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

4. Доказательство теоремы 2. Так как невозмущенная задача невырождена, то, согласно теореме 1, достаточно установить неоднозначность функции  $I^1(t; I^\circ, 0)$ . Ограничимся случаем, когда центр тяжести лежит на большей оси эллипсоида инерции. Общий случай рассматривается аналогично.

Положим

$$\Phi(I^\circ, t) = -\frac{\partial H_1}{\partial \varphi^2} = -i [f_+(I^\circ, \omega_1 t) \exp(i\omega_2 t) - f_-(I^\circ, \omega_1 t) \exp(-i\omega_2 t)]$$

Так как

$$I_2^\circ = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_2} = -\mu \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_2}$$

то

$$(4.1) \quad \xi_2 = \oint_{\Gamma} \Phi(I^\circ, t) dt$$

Функция  $\Phi(I^\circ, t)$  периодична по  $t$  с действительным периодом  $T$ , следовательно

$$(4.2) \quad \int_B^C \Phi(I^\circ, t) dt + \int_{D_1}^A \Phi(I^\circ, t) dt = 0$$

Положим

$$\sigma_\pm = \mp i \int_A^B f_\pm(I^\circ, \omega_1 t) \exp(\pm i\omega_2 t) dt$$

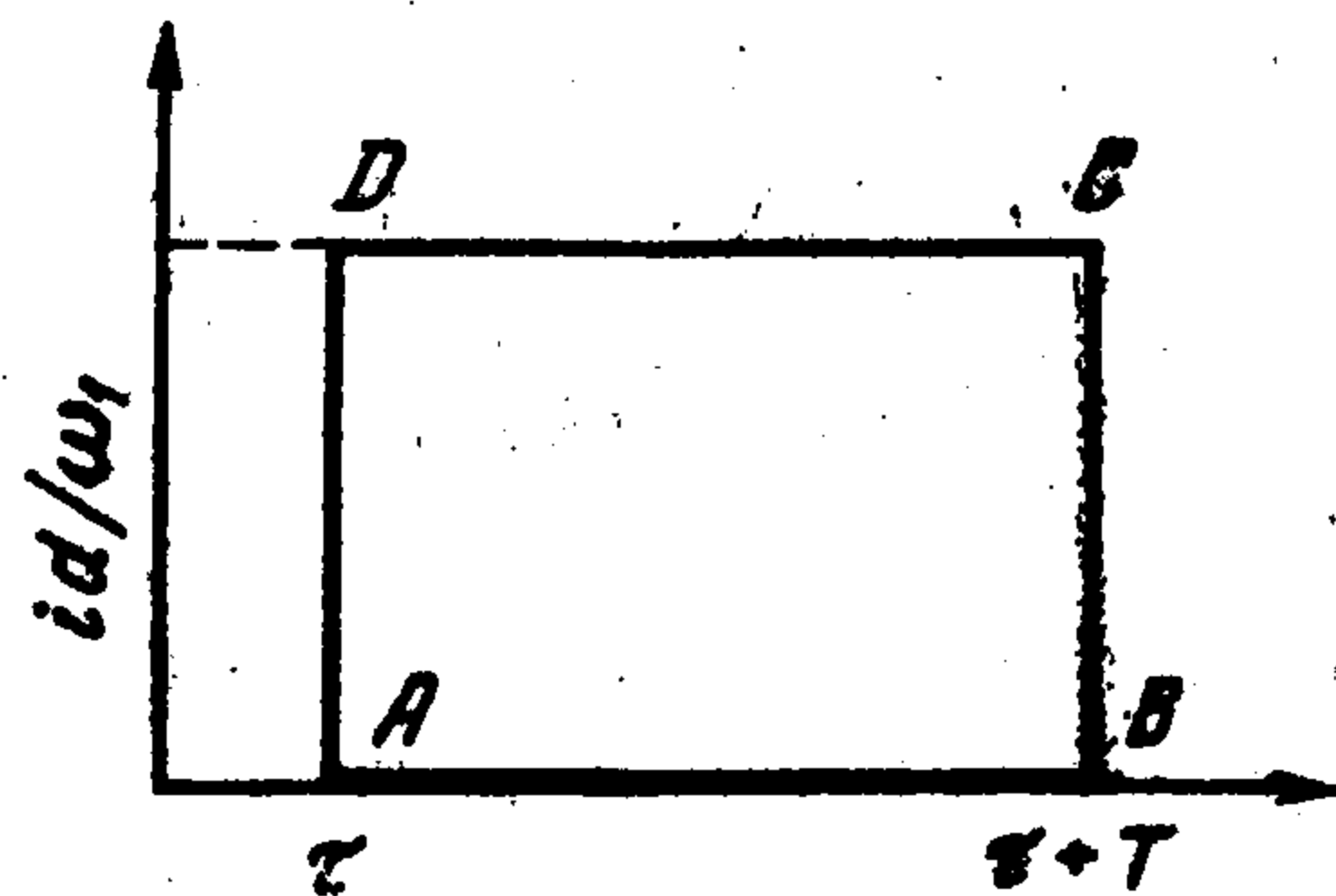
$$\Sigma_\pm = \mp i \int_C^D f_\pm(I^\circ, \omega_1 t) \exp(\pm i\omega_2 t) dt$$

Покажем, что

$$(4.3) \quad \Sigma_\pm = -\sigma_\pm \exp[\mp(n\alpha + \sigma)]$$

Действительно, заменяя переменные по формуле  $t = z + i\alpha / \omega_1$ , получим

$$\begin{aligned} \Sigma_\pm &= \mp \exp[\mp(n\alpha + \sigma)] \int_{\tau+T}^{\tau} f_\pm(I^\circ, \omega_1 z) \exp(\pm i\omega_2 z) dz = \\ &= -\sigma_\pm \exp[\mp(n\alpha + \sigma)] \end{aligned}$$



Интеграл (4.1) с учетом формул (4.2) и (4.3) равен

$$\xi_2 = \sigma_+ [1 - \exp(-n\alpha - \sigma)] + \sigma_- [1 - \exp(n\alpha + \sigma)]$$

Очевидно, что  $h_n = i(\sigma_+ - \sigma_-) / T$ . Функции  $f_+$  и  $f_-$  комплексно сопряжены, следовательно,  $\bar{\sigma}_+ = \sigma_-$ . Так как  $h_n \neq 0$ , то интегралы  $\sigma_+$  и  $\sigma_-$  отличны от нуля.

Покажем, что  $\xi_2(I^\circ) \neq 0$ . Действительно, в противном случае

$$\left| \frac{1 - \exp(-n\alpha - \sigma)}{1 - \exp(n\alpha + \sigma)} \right| = \left| \frac{\sigma_-}{\sigma_+} \right| = 1$$

и, следовательно,  $n\alpha(I^\circ) + \sigma(I^\circ) = 0$ . Используя формулы (3.2), это соотношение можно записать в следующем виде:

$$(4.4) \quad nK'(\lambda) + \pi F\left(\operatorname{arctg} \frac{\kappa}{\lambda}, \sqrt{1 - \lambda^2}\right) = 0$$

Устремим  $|n|$  к бесконечности. Тогда  $\omega_2 / \omega_1 \rightarrow \infty$  и  $2H_0 / I_2^2 \rightarrow \rightarrow B^{-1}$  [3]. Значит,  $\lambda \rightarrow C / A < 1$  и функции  $K'$  и  $F$  стремятся к определенным пределам. Так как

$$\lim_{\lambda \rightarrow C/A} K'(\lambda) \neq 0$$

и функция  $\lambda$  постоянна на множествах  $B_n$ , то соотношение (4.4) не имеет места при  $|n| > N$ ,  $N(A, B, C)$ .

Теорема 2 доказана.

Можно показать, что аналогичное утверждение справедливо также в случае, когда начальные фазы  $\varphi^\circ$  равны не  $(0, 0)$ , а  $(0, \pi)$ . В работе [6] доказано, что периодические решения невозмущенной задачи с начальными данными  $I^\circ \in B_n$ ,  $\varphi_1^\circ = 0$ ,  $\varphi_2^\circ = 0$ ,  $\pi$  не исчезают при добавлении возмущения, а при малых значениях параметра  $\mu \neq 0$  переходят в невырожденные периодические решения возмущенной системы уравнений. Таким образом, вычисления, проведенные в п. 4, показывают, что, начиная с некоторого номера  $n$ , найденные в работе [6] невырожденные периодические решения при малых значениях  $\mu \neq 0$  — неоднозначные функции на комплексной плоскости времени.

Автор благодарит В. В. Румянцева и Ю. А. Архангельского за внимание к работе. †

Поступила 10 V 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пуанкаре А. Избранные тр., т. 1. Новые методы небесной механики. М., «Наука», 1971.
2. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
3. Козлов В. В. Геометрия переменных «действие — угол» задачи Эйлера — Пуансо. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1974, № 5.
4. Jacobi C. G. J. Gesammelte Werke. Berlin, Reimer, 1882, Bd 2, S. 289—352.
5. Архангельский Ю. А. Аналитическая динамика твердого тела. М., «Наука», 1977.
6. Козлов В. В. Новые периодические решения в задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.