Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 531.01

О ПРИНЦИПЕ ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

В. В. Румянцев

(Москва)

Известны три формы вариационного принципа Гамильтона для неголономных систем, принадлежащие соответственно Гельдеру [1], Воронцу [2] и Суслову [3]. В статье для общего случая нелинейных и, в частности, линейных связей проанализированы условия, при которых они выводятся. Показано, что эти три формы принципа Гамильтона равносильны и преобразуются одна в другую. В общем случае принцип Гамильтона для неголономных систем не является принципом стационарного действия, однако при определенных условиях действительные движения неголономной системы могут находиться среди решений уравнений Эйлера вариационной задачи Лагранжа. Найдены условия, при выполнении которых принцип Гамильтона для соответствующих движений неголономной системы носит характер принципа стационарного действия. Этот вопрос тесно связан с задачей о применимости к неголономным системам обобщенного метода Гамильтона — Якоби интегрирования уравнений движения [4]. Условия [5], необходимые и достаточные для применимости этого метода к неголономным системам, оказались эквивалентными упомянутым выше условиям. Показано, что метод применим тогда и только тогда, когда принцип Гамильтона для неголономной системы можно трактовать как принцип стационарного действия. Приводятся примеры.

1. Рассмотрим систему материальных точек, независимые лагранжевы координаты которой обозначим через q_i $(i = 1, \ldots, n)$. Пусть система находится под действием сил, обладающих силовой функцией $U(q_i, t)$, и стеснена идеальными неинтегрируемыми связями вида

$$f_l(q_i, q_i^{\cdot}, t) = 0 \quad (l = 1, \ldots, r < n) \tag{1.1}$$

в общем случае нелинейными относительно обобщенных скоростей $q_i^{\cdot} \equiv dq_i / dt$ $(i = 1, \ldots, n)$; через t обозначено время. Связи (1.1) предполагаются независимыми, т. е.

$$\operatorname{rank}\left\| \frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}} \right\| = r \tag{1.2}$$

При условии (1.2) уравнения (1.1) можно разрешить относительно некоторых r зависимых скоростей и представить уравнения (1.1), например, в виде

$$f_l(q_i, q_i^{\cdot}, t) = q_{k+l}^{\cdot} - \varphi_l(q_1, \ldots, q_n, q_1^{\cdot}, \ldots, q_k^{\cdot}, t) = 0 \tag{1.3}$$

принимая за независимые скорости $q_s^{\cdot}$ $(s = 1, \ldots, k = n - r)$.

Общее уравнение динамики, выражающее принцип Даламбера — Лагранжа, запишем в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}}\right)\delta q_i=0 \tag{1.4}$$

где $L(q, q^{\cdot}, t) = T + U$ — функция Лагранжа, $T(q, q^{\cdot}, t)$ — кинетическая энергия, δq_i — возможные (виртуальные) перемещения, удовлетворяющие условиям Четаева

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}}\delta q_i=0 \quad (l=1,\ldots,r) \tag{1.5}$$

Для связей вида (1.3) эти условия принимают вид

$$\delta q_{k+l}=\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial \varphi_l}{\partial q_s^{\cdot}}\delta q_s \quad (l=1,\ldots,r) \tag{1.6}$$

Как известно, принцип Гамильтона можно получить интегрированием по t уравнения (1.4) в некоторых постоянных пределах t_0 и t_1

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}}\right)\delta q_i\,dt=0$$

предполагая, что принадлежащие классу C^2 функции δq_i удовлетворяют на пределах условиям

$$\delta q_i=0 \quad \text{при} \quad t=t_0,\ t_1 \quad (i=1,\ldots,n) \tag{1.7}$$

Интегрируя по частям члены вида

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}}\delta q_i$$

и учитывая условия (1.7), предыдущее равенство приведем к виду

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}}\frac{d}{dt}\delta q_i\right)dt=0 \tag{1.8}$$

В этом равенстве в отличие от (1.4) появились производные по времени от вариаций координат, стесненных условиями (1.5). Так как последние не определяют однозначно δq_i, то существует, очевидно, известный произвол в определении производных от δq_i. В аналитической механике сложились две равноправные точки зрения по вопросу о связи этих производных с вариациями $\delta q_i^{\cdot}$ обобщенных скоростей [6].

Согласно первой из них, принадлежащей Гельдеру [1] и берущей начало из правил вариационного исчисления, для всех координат справедливы перестановочные соотношения

$$\frac{d}{dt}\delta q_i=\delta q_i^{\cdot} \quad (i=1,\ldots,n) \tag{1.9}$$

При данном определении $\delta q_i^{\cdot}$ изменения функций (1.1) на возможных перемещениях представляются с учетом (1.5) в виде

$$(1.10)\qquad \delta f_l = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_l}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}}\right)\delta q_i \quad (l = 1, \ldots, r)$$

Выражения (1.10) равны тождественно нулю в случае интегрируемых связей (1.1), в случае же неинтегрируемых связей (1.1) они не равны тождественно нулю, однако могут обращаться в нуль в силу уравнений движения системы, если связи нелинейны [7].

Отметим, что тождества

$$(1.11)\qquad \delta f_l = 0 \quad (l = 1, \ldots, r)$$

и условия (1.9) совместны лишь в случае интегрируемости уравнений (1.1), т. е. для голономных систем.

Для связей вида (1.3) соотношения (1.10) принимают с учетом равенств (1.6) вид

$$(1.12)\qquad \delta f_l = \delta q_{k+l}^{\cdot} - \delta\varphi_l = \sum_{s=1}^{k} A_s^{k+l}\delta q_s \quad (l = 1, \ldots, r)$$

где введены обозначения

$$(1.13)\qquad A_s^{k+l} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_l}{\partial q_s^{\cdot}} - \frac{\partial\varphi_l}{\partial q_s} - \sum_{\nu=1}^{r}\frac{\partial\varphi_l}{\partial q_{k+\nu}}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial q_s^{\cdot}}$$

Если в силу уравнений движения неголономной системы $\delta f_l = 0$, то, как следует из (1.12), все $A_s^{k+l} = 0$ $(s = 1, \ldots, k)$, и наоборот.

Согласно второй точке зрения, принадлежащей Аппелю и Суслову [8], имеют место тождества (1.11), в связи с чем соотношения (1.9) справедливы лишь для независимых скоростей

$$(1.14)\qquad \frac{d}{dt}\delta q_s = \delta q_s^{\cdot} \quad (s = 1, \ldots, k)$$

Что касается зависимых скоростей $q_{k+l}^{\cdot}$ $(l = 1, \ldots, r)$, определяемых уравнениями (1.3), то выражения их вариаций получаются из условий (1.11) в виде равенств

$$\bar{\delta} q_{k+l}^{\cdot} = \delta\varphi_l = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_l}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{s=1}^{k}\frac{\partial\varphi_l}{\partial q_s^{\cdot}}\delta q_s^{\cdot}$$

из которых с учетом соотношений (1.6), (1.13) получаем [7]

$$(1.15)\qquad \frac{d}{dt}\delta q_{k+l} - \bar{\delta} q_{k+l}^{\cdot} = \sum_{s=1}^{k} A_s^{k+l}\delta q_s \quad (l = 1, \ldots, r)$$

Символ $\bar{\delta}$ обозначает вариацию в смысле Аппеля — Суслова функции, содержащей зависимые скорости.

Заметим, что если в силу уравнений движения неголономной системы все $A_s^{k+l} = 0$ $(s = 1, \ldots, k)$, то из (1.15) следует равенство $d\delta q_{k+l}/dt =$

$= \delta q_{k+l}^{\cdot}$, и наоборот. Следовательно, если в силу уравнений движения имеют место равенства (1.11) или, что то же самое, равенства $A_s^{k+l} = 0$ ($s = 1, \ldots, k$, $l = 1, \ldots, r$), то для обоих подходов справедливы соотношения (1.9) для всех координат.

Отметим, что в случае линейных связей (1.3), когда

$$\varphi_l(q, q^{\cdot}, t) = \sum_{s=1}^{k} a_{ls}(q, t)\, q_s^{\cdot} + a_l(q, t) \tag{1.16}$$

коэффициенты (1.13) имеют вид [2]

$$A_s^{k+l} = \frac{da_{ls}}{dt} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial a_{li}}{\partial q_s} q_i^{\cdot} - \frac{\partial a_l}{\partial q_s} - \sum_{j=1}^{r} a_{js} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial a_{li}}{\partial q_{k+j}} q_i^{\cdot} + \frac{\partial a_l}{\partial q_{k+j}} \right)$$

так что правая часть равенства (1.15) может быть представлена в форме [3]

$$\sum_{s=1}^{k} A_s^{k+l} \delta q_s = \sum_{s=1}^{k} (a_{ls}^{\cdot}\, \delta q_s - q_s^{\cdot}\, \delta a_{ls}) - \delta a_l = \delta B_l$$

Пример 1.1. В примере Аппеля [6] нелинейная связь представляется уравнением

$$f(q_1^{\cdot}, q_2^{\cdot}, q_3^{\cdot}) = q_3^{\cdot} \mp a \sqrt{q_1^{\cdot 2} + q_2^{\cdot 2}} = 0$$

Если принять условия (1.9) для всех $i = 1, 2, 3$, то согласно (1.10)

$$\delta f = \pm a \sum_{s=1}^{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{q_s^{\cdot}}{\sqrt{q_1^{\cdot 2} + q_2^{\cdot 2}}} \right) \delta q_s$$

Если же принять условия (1.14) для $s = 1, 2$ и условие $\bar{\delta} f = 0$, то согласно (1.15) будем иметь

$$\frac{d}{dt} \delta q_3 - \bar{\delta} q_3^{\cdot} = \pm a \sum_{s=1}^{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{q_s^{\cdot}}{\sqrt{q_1^{\cdot 2} + q_2^{\cdot 2}}} \right) \delta q_s$$

т. е.

$$A_s^3 = \pm a \frac{d}{dt} \frac{q_s^{\cdot}}{\sqrt{q_1^{\cdot 2} + q_2^{\cdot 2}}} \qquad (s = 1, 2)$$

Пример 1.2. В случае диска радиуса a, катящегося по шероховатой горизонтальной плоскости, уравнения неголономных связей имеют вид [6]

$$f_1(\varphi, x^{\cdot}, \psi^{\cdot}) = x^{\cdot} + a \cos \varphi \psi^{\cdot} = 0, \quad f_2(\varphi, y^{\cdot}, \psi^{\cdot}) = y^{\cdot} + a \sin \varphi \psi^{\cdot} = 0$$

Если принять условия (1.9) для всех координат $x, y, \varphi, \theta, \psi$, то

$$\delta f_1 = a \sin \varphi\, (\varphi^{\cdot} \delta\psi - \psi^{\cdot} \delta\varphi), \quad \delta f_2 = a \cos \varphi\, (\psi^{\cdot} \delta\varphi - \varphi^{\cdot} \delta\psi)$$

В случае выполнения условий (1.14) для $q_1 = \theta$, $q_2 = \psi$, $q_3 = \varphi$ и условий (1.11) имеем согласно (1.15)

$$\frac{d}{dt} \delta x - \bar{\delta} x^{\cdot} = a \sin \varphi\, (\varphi^{\cdot} \delta\psi - \psi^{\cdot} \delta\varphi), \quad \frac{d}{dt} \delta y - \bar{\delta} y^{\cdot} =$$
$$= a \cos \varphi\, (\varphi^{\cdot} \delta\varphi - \varphi^{\cdot} \delta\psi)$$

т. е. для $q_4 = x$, $q_5 = y$ коэффициенты (1.13) суть

$$A_1^4 = A_1^5 = 0, \quad A_2^4 = a \sin \varphi \varphi^{\cdot}, \quad A_3^4 = -a \sin \varphi \psi^{\cdot},$$
$$A_2^5 = -a \cos \varphi \varphi^{\cdot}, \quad A_3^5 = a \cos \varphi \psi^{\cdot}$$

2. Перейдем к рассмотрению форм принципа Гамильтона для неголономных систем, получаемых при той или иной из двух изложенных выше

точек зрения на соотношения между вариациями скоростей и производными от вариаций координат.

Пусть перестановочные соотношения (1.9) выполняются для всех координат. Подставляя (1.9) в соотношение (1.8), получаем форму Гёльдера [1] принципа Гамильтона [7]

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L\, dt = 0 \tag{2.1}$$

В этом вариационном принципе производится сравнение положений системы на действительной траектории $q_i(t)$ с одновременными положениями, получаемыми из положений в действительном движении смещением на возможные перемещения δq_i, определяющие мгновенно фиксируемую конфигурацию системы. Последовательность смещенных положений $q_i(t) + \delta q_i$ можно рассматривать как варьированный или окольный путь, который в общем случае не удовлетворяет, однако, уравнениям связей (1.1).

В самом деле, если варьированный путь удовлетворяет уравнениям (1.1), то справедливы равенства

$$f_l(q + \delta q, q^{\cdot} + \delta q^{\cdot}, t) = f_l(q, q^{\cdot}, t) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_l}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}} \delta q_i^{\cdot} \right) + \ldots = 0$$

из которых с точностью до малых первого порядка включительно следуют равенства (1.11). Однако эти условия не выполняются, вследствие чего принцип Гамильтона (2.1) для неголономных систем в общем случае не представляет собой принцип стационарного действия [8]

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt = 0 \tag{2.2}$$

как в случае голономных систем.

Из принципа Гамильтона (2.1) выводятся уравнения движения неголономных систем, например, в форме уравнений Лагранжа с множителями μ_l

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{l=1}^{r} \mu_l \frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.3}$$

которые вместе с уравнениями (1.1) образуют замкнутую систему $n + r$ уравнений с таким же числом неизвестных. Заметим, что с помощью уравнений (1.1) множители Лагранжа можно выразить в виде функций $\mu_l(q_i, q_i^{\cdot}, t)$, подставляя которые в уравнения (2.3), получим систему уравнений второго порядка каждое относительно q_i. Общее решение такой системы уравнений зависит от $2n$ произвольных постоянных. Так как должны удовлетворяться и уравнения (1.1), то число произвольных постоянных в общем решении уравнений (2.3), (1.1) равно $2n - r$. Эти постоянные можно выразить через начальные данные

$$q_i = q_{i0}, \quad q_i^{\cdot} = q_{i0}^{\cdot}, \quad t = t_0 \tag{2.4}$$

если произвольно задать n чисел q_{i0}, определяющих положение начальной точки, и $n - r$ чисел $q_{i0}^{\cdot}$, определяющих вместе с уравнениями (1.1) начальную скорость. Отсюда, в частности, следует известный факт, что действительная траектория неголономной системы не может проходить через две произвольно заданные точки пространства. Если произвольно задать начальную точку q_{i0} $(i = 1, \ldots, n)$, то вторая точка не может быть задана произвольно, а должна находиться на многообразии $n - r$ измерений, динамически достижимом из заданной конфигурации, в то время как множество конфигураций, кинематически достижимых из данной конфигурации, имеет размерность n для случая линейных связей [8].

Выясним связь с принципом (2.1) вариационного принципа

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta(\Theta + U) + \sum_{l=1}^{r} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+l}} (\delta \dot{q}_{k+l} - \delta\varphi_l)\right] dt = 0 \tag{2.5}$$

использованного Воронцом [2] при условиях (1.9) для одного из способов вывода установленных им для случая линейных связей уравнений движения неголономных систем вида

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial q_s^{\cdot}} - \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial q_s} = \sum_{l=1}^{r} \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial q_{k+l}} \frac{\partial\varphi_l}{\partial q_s^{\cdot}} + \sum_{l=1}^{r} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+l}} A_s^{k+l} \tag{2.6}$$

Здесь Θ $(q_1, \ldots, q_n, q_1^{\cdot}, \ldots, q_k^{\cdot}, t)$ — кинетическая энергия системы T $(q, q^{\cdot}, t)$, в которой зависимые скорости исключены с помощью соотношений (1.3). Так как справедливы равенства

$$\frac{\partial\Theta}{\partial q_s^{\cdot}} = \frac{\partial T}{\partial q_s^{\cdot}} + \sum_{l=1}^{r} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+l}} \frac{\partial\varphi_l}{\partial q_s^{\cdot}} \quad (s = 1, \ldots, k) \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + \sum_{l=1}^{r} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+l}} \frac{\partial\varphi_l}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots n)$$

то имеет место соотношение [6]

$$\delta T = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}}\delta q_i^{\cdot}\right) = \delta\Theta + \sum_{l=1}^{r} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+l}} (\delta \dot{q}_{k+l} - \delta\varphi_l) \tag{2.8}$$

полученное без использования условий (1.6). Заменяя в выражении (2.1) величину δT, входящую в $\delta L = \delta T + \delta U$, правой частью равенства (2.8), получаем соотношение (2.5). Это соотношение по существу представляет собою форму Воронца принципа Гамильтона для неголономных систем. В работе [2] не дано ни обоснования, ни какого-либо названия принципа (2.5).

Отметим, что уравнения (2.6) Воронца представляют собою дифференциальные уравнения второго порядка каждое; они дополняются уравнениями (1.3) первого порядка, так что общее решение системы уравнений (2.6), (1.3), как и общее решение системы (2.3), (1.1), зависит от $2k + r = 2n - r$ произвольных постоянных.

Воспользуемся теперь соотношениями (1.14), (1.15) и подставим их в выражение (1.8). В результате интегрирования по частям и учета условий

(1.7) получаем принцип Гамильтона в форме Суслова [7].

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\bar{\delta}L+\sum_{l=1}^{r}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+l}}\sum_{s=1}^{k}A_s^{k+l}\delta q_s\right)dt=0 \tag{2.9}$$

Соотношение (2.9) было получено Сусловым для случая линейных связей вида (1.3), (1.16) и названо видоизменением начала Даламбера. При этом он подчеркнул, что оно «отнюдь не представляет собою начала Гамильтона» [3], имея в виду, по-видимому, принцип стационарного действия.

Сравнивая соотношения (2.9) и (2.1), следует помнить, что фигурирующие в них вариации функции Лагранжа вычисляются по-разному: в (2.1) — с учетом равенств (1.9), в (2.9) — с учетом равенств (1.14), (1.15). Заметим также, что в (2.9) варьированные пути $q_i(t)+\delta q_i$ удовлетворяют в первом приближении условиям связей (1.3), так как при данном способе варьирования выполняются условия (1.11).

Отметим, наконец, что если воспользоваться соотношением (2.8), в котором при принятом Сусловым способе варьирования теперь следует учесть равенства (1.11), (1.3), так что оно принимает вид $\bar{\delta T}=\delta\Theta$, то соотношение (2.9) приводится к виду

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta(\Theta+U)+\sum_{l=1}^{r}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+l}}\sum_{s=1}^{k}A_s^{k+l}\delta q_s\right]dt=0 \tag{2.10}$$

Соотношение (2.10) представляет собою принцип Гамильтона в форме Воронца (2.5), что очевидно с учетом равенств (1.12). Напомним, что Суслов отметил, имея в виду (2.9), что «на эту формулу (в несколько измененном виде) .... указывает П. В. Воронец» [3].

Таким образом, доказано, что формы (2.1), (2.5), (2.9), (2.10) принципа Гамильтона для неголономных систем, стесненных связями (1.3), равносильны и переходят одна в другую при преобразованиях (2.8), (1.12) с учетом уравнений связей и способа варьирования.

Пример 2.1. Для примера Аппеля

$$L=\frac{m}{2}(q_1^{\cdot 2}+q_2^{\cdot 2}+q_3^{\cdot 2})-mgq_3$$

$$\Theta+U=\frac{m(1+a^2)}{2}(q_1^{\cdot 2}+q_2^{\cdot 2})-mgq_3$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_3^{\cdot}}(\delta q_3^{\cdot}-\delta\varphi)=ma\sqrt{q_1^{\cdot 2}+q_2^{2}}\,(\delta q_3^{\cdot}-a\delta\sqrt{q_1^{\cdot 2}+q_2^{\cdot 2}})$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_3^{\cdot}}\sum_{s=1}^{2}A_s^{3}\delta q_s=ma^2\sqrt{q_1^{\cdot 2}+q_2^{\cdot 2}}\sum_{s=1}^{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{q_s^{\cdot}}{\sqrt{q_1^{\cdot 2}+q_2^{\cdot 2}}}\right)\delta q_s$$

Видно, что соотношения, соответствующие формам (2.1), (2.5), (2.9), (2.10) принципа Гамильтона, преобразуются одно в другое при учете уравнения связи и очевидных равенств

$$q_1^{\cdot}\delta q_1^{\cdot}+q_2^{\cdot}\delta q_2^{\cdot}=\sqrt{q_1^{\cdot 2}+q_2^{\cdot 2}}\,\delta\sqrt{q_1^{\cdot 2}+q_2^{\cdot 2}},\quad \sqrt{q_1^{\cdot 2}+q_2^{\cdot 2}}\,\bar{\delta}q_3^{\cdot}=$$
$$=a(q_1^{\cdot}\delta q_1^{\cdot}+q_2^{\cdot}\delta q_2^{\cdot})$$

3. Сравним принцип Гамильтона (2.1) с задачей Лагранжа о стационарном значении интеграла действия (2.2) в классе кривых, удовлетворяю-

щих уравнениям связей (1.1). Введением неопределенных множителей $\varkappa_l(t)$ эта задача об условном экстремуме приводится, как известно [9], к вариационной задаче

$$(3.1)\qquad \delta\int_{t_0}^{t_1}\Big(L+\sum_l \varkappa_l f_l\Big)\,dt=0$$

Уравнения Эйлера для задачи (3.1)

$$(3.2)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i^{\boldsymbol\cdot}}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=\sum_l \varkappa_l\left(\frac{\partial f_l}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\boldsymbol\cdot}}\right)-$$

$$-\sum_l \varkappa_l^{\boldsymbol\cdot}\,\frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\boldsymbol\cdot}}\qquad (i=1,\ldots,n)$$

представляют собою дифференциальные уравнения второго порядка относительно q_i и первого порядка относительно $\varkappa_l$. Общее решение системы уравнений (3.2), (1.1) в случае неинтегрируемых связей (1.1) зависит от $2n$ произвольных постоянных, вследствие чего уравнения движения (2.3), (1.1) неголономной системы не эквивалентны [10,11] уравнениям (3.2), (1.1) вариационной задачи (3.1). Неэквивалентность двух систем уравнений не означает, однако, невозможности совпадения некоторых их решений.

Пусть общее или некоторое частное решение $q_i(t)$ уравнений (2.3), (1.1) является решением также уравнений (3.2), (1.1) при одинаковых начальных условиях (2.4). При этом справедливы, очевидно, равенства

$$(3.3)\qquad \sum_l(\mu_l+\varkappa_l^{\boldsymbol\cdot})\frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\boldsymbol\cdot}}=\sum_l \varkappa_l\left(\frac{\partial f_l}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\boldsymbol\cdot}}\right)\qquad (i=1,\ldots,n)$$

Умножая уравнения (3.3) на возможные перемещения δq_i и суммируя по всем i, получаем с учетом (1.5) условие

$$(3.4)\qquad \sum_{l,i}\varkappa_l\left(\frac{\partial f_l}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\boldsymbol\cdot}}\right)\delta q_i=0$$

необходимое, для того, чтобы обе системы уравнений имели одно и то же решение $q_i(t)$. Это условие также и достаточное. В самом деле, пусть некоторое решение уравнений (3.2), (1.1) удовлетворяет условию (3.4) для всяких δq_i, совместных с условиями (1.5). Умножая уравнения (3.2) на возможные перемещения δq_i, уравнения (1.5) — на неопределенные множители μ_l, суммируя по всем i и l, получаем с учетом (3.4) и (1.5) соотношение

$$\sum_i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i^{\boldsymbol\cdot}}-\frac{\partial L}{\partial q_i}-\sum_l \mu_l\frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\boldsymbol\cdot}}\right)\delta q_i=0$$

из которого следует, что рассматриваемое решение $q_i(t)$ удовлетворяет и уравнениям (2.3), (1.1).

Итак, условие (3.4) необходимо и достаточно для того, чтобы решение $q_i(t)$ уравнений (2.3), (1.1) находилось среди решений уравнений (3.2) (1.1) [5].

Отметим, что из условия (3.4) следуют равенства (3.3). Действительно, если условия (1.5) умножить на множители $\mu_l + \varkappa_l^*$, где μ_l — неопределенные множители, просуммировать по всем l, вычесть из (3.4) и в полученном равенстве надлежащим выбором множителей μ_l обратить в нули коэффициенты при зависимых вариациях, то в конечном итоге получим равенства (3.3).

Таким образом, при условиях (3.4) уравнения движения (2.3) неголономной системы принимают вид уравнений Эйлера (3.2). В силу этого будем говорить, что для движений неголономной системы, описываемых такими решениями, принцип Гамильтона (2.1) имеет характер принципа стационарного действия (2.2).

Заметим также, что если в задаче (3.1) под символом δ понимать вариации в классе возможных перемещений (1.5) неголономной системы, то (2.2) совпадает с (3.1) при условии

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_l \varkappa_l \delta f_l \, dt = 0$$

которое, при учете равенств (1.10), выполняется тогда и только тогда, когда выполняется условие (3.4).

Для связей вида (1.3) равенство (3.4) приводится к условиям

$$\sum_l \varkappa_l A_s^{k+l} = 0 \quad (s = 1, \ldots, k) \tag{3.5}$$

Частный вид условий (3.5) для задачи о качении тяжелого твердого тела по горизонтальной абсолютно шероховатой плоскости приведен в статье [11].

Таким образом, доказано, что для того, чтобы принцип Гамильтона (2.1) для неголономной системы имел характер принципа стационарного действия, необходимо и достаточно выполнение условия (3.4) или, что то же самое, условий (3.5).

Отметим также, что из формы Суслова (2.9) принципа Гамильтона видно, что (2.9) имеет характер принципа стационарного действия (2.2) тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{l,s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+l}} A_s^{k+l} \delta q_s \, dt = 0$$

Так как в этом соотношении δq_s произвольны и независимы, то оно выполняется лишь при условиях [12]

$$\sum_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+l}} A_s^{k+l} = 0 \quad (s = 1, \ldots, k) \tag{3.6}$$

Для движений, удовлетворяющих условиям (3.6), уравнения (2.6) Воронца принимают вид уравнений движения голономной системы.

Подчеркнем, что условия (3.4) — (3.6) для неголономных систем выполняются лишь в редких случаях. Ниже приводятся два примера, в первом из которых эти условия выпоняются для общего решения, а во втором — лишь для некоторых частных решений уравнений движения неголономной системы (в последнем случае принцип Гамильтона имеет характер принципа стационарного действия не для всех, а лишь для соответствующих движений неголономной системы). Можно привести также примеры [8] неголономных систем, для которых эти условия вообще не выполняются.

Пример 3.1. Для примера Аппеля (см. пример 1.1) из уравнений вида (2.3), (1.1)

$$mq_1^{\cdot\cdot} = -\mu a \frac{q_1^{\cdot}}{\sqrt{q_1^{\cdot 2} + q_2^{\cdot 2}}}, \qquad mq_2^{\cdot\cdot} = -\mu a \frac{q_2^{\cdot}}{\sqrt{q_1^{\cdot 2} + q_2^{\cdot 2}}},$$

$$mq_3^{\cdot\cdot} = -mg + \mu$$

находим, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{q_s^{\cdot}}{\sqrt{q_1^{\cdot 2} + q_2^{\cdot 2}}}\right) = 0 \quad (s = 1, 2)$$

т. е. условия (3.4) — (3.6) выполняются для всех движений точки.

Пример 3.2. Для диска (см. пример 1.2) функция Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}\{[x^{\cdot} - a(\cos\theta\sin\varphi\theta^{\cdot} + \sin\theta\cos\varphi\varphi^{\cdot})]^2 +$$
$$+ [y^{\cdot} + a(\cos\theta\cos\varphi\theta^{\cdot} - \sin\theta\sin\varphi\varphi^{\cdot})]^2\} +$$
$$+ \frac{1}{2}A(\theta^{\cdot 2} + \varphi^{\cdot 2}\cos^2\theta) + \frac{1}{2}C(\psi^{\cdot} + \varphi^{\cdot}\sin\theta)^2 - mga\cos\theta$$

Условия (3.6) принимают с учетом связей вид

$$\sum_{l=1}^{2}\frac{\partial T}{\partial q_{3+l}^{\cdot}} A_2^{3+l} = -ma^2\theta^{\cdot}\varphi^{\cdot}\cos\theta = 0, \qquad \sum_{l=1}^{2}\frac{\partial T}{\partial q_{3+l}^{\cdot}} A_3^{3+l} = ma^2\theta^{\cdot}\psi^{\cdot}\cos\theta = 0$$

Эти условия выполняются или при $\theta^{\cdot} = 0$ или при $\varphi^{\cdot} = \psi^{\cdot} = 0$. Можно показать [11], что при этих условиях выполняются также условия (3.5). Следовательно, для движений диска с постоянным наклоном его плоскости к вертикали, как и для весьма частных движений, для которых $\varphi^{\cdot} = \psi^{\cdot} = 0$, принцип Гамильтона носит характер принципа стационарного действия, а в общем случае — нет.

4. С вопросом о стационарности действия по Гамильтону для действительного движения тесно связана задача обобщения [4] на неголономные системы метода Гамильтона — Якоби интегрирования канонических уравнений движения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_l \mu_l \frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.1}$$

эквивалентных уравнениям (2.3), и уравнений связей (1.1).

Здесь, как обычно, обобщенные импульсы

$$p_i = \partial L / \partial q_i^{\cdot} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

и функция Гамильтона

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i^{\cdot} - L \tag{4.2}$$

Суть обобщенного метода Гамильтона — Якоби состоит в следующем [4,5]. Вводятся переменные

$$\pi_i = p_i + \sum_{l=1}^{r} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.3}$$

с помощью которых соотношение (4.2) принимает вид

$$L = \sum_{i=1}^{n} \pi_i q_i^{\cdot} - H_1 \tag{4.4}$$

где функция

$$H_1(q, \pi, t) = H(q, p, t) + \sum_{l,i} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}} q_i^{\cdot} \tag{4.5}$$

находится подстановкой в правую часть (4.5) функций $p_i(q, \pi, t)$ и $\lambda_l(q, \pi, t)$, получаемых с помощью уравнений (1.1), (4.3) и первой группы уравнений (4.1).

Отметим, что функцию (4.5) целесообразно строить следующим способом. С помощью (1.3) функцию Лагранжа представляем в виде функции $L^*(q_1, \ldots, q_n, q_1^{\cdot}, \ldots, q_k^{\cdot}, t) = \Theta + U$ и вводим в рассмотрение обобщенные импульсы и функцию Гамильтона

$$P_s = \frac{\partial L^*}{\partial q_s^{\cdot}} = p_s + \sum_{l=1}^{r} p_{k+l} \frac{\partial \varphi_l}{\partial q_s^{\cdot}} \quad (s = 1, \ldots, k) \tag{4.6}$$

$$H^*(q, P, t) = \sum_{s=1}^{k} P_s q_s^{\cdot} - L^* \tag{4.7}$$

Функция (4.7) связана с функцией (4.2) соотношением

$$H^*(q, P, t) = H(q, p, t) + \sum_{l=1}^{r} p_{k+l} \left(\sum_{s=1}^{k} \frac{\partial \varphi_l}{\partial q_s^{\cdot}} q_s^{\cdot} - \varphi_l \right) \tag{4.8}$$

Так как для связей (1.3) из равенств (4.3) следуют равенства

$$\lambda_l = \pi_{k+l} - p_{k+l}, \quad P_s = \pi_s + \sum_l \pi_{k+l} \frac{\partial \varphi_l}{\partial q_s^{\cdot}}$$

то функция (4.5) с учетом (4.8) принимает вид

$$H_1(q, \pi, t) = H^*(q, P, t) + \sum_l \pi_{k+l} \left(\varphi_l - \sum_s \frac{\partial \varphi_l}{\partial q_s^{\cdot}} q_s^{\cdot} \right)$$

Обобщенное уравнение Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_1\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = 0 \tag{4.9}$$

представляет собою уравнение в частных производных первого порядка. Для уравнения (4.9) уравнения характеристик имеют вид канонических уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \pi_i}, \quad \frac{d\pi_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.10}$$

Согласно теореме Якоби соотношения

$$\partial S / \partial q_i = \pi_i, \quad \partial S / \partial \alpha_i = \beta_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

представляют собою $2n$ интегралов уравнений (4.10), если $S(q_i, \alpha_i, t)$ — полный интеграл уравнения (4.12); α_i и β_i — произвольные постоянные.

В работе [5] доказано, что решение уравнений (4.10) является также решением уравнений движения (4.1) тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию

$$\sum_{l,\, i} \lambda_l \left(\frac{\partial f_l}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}} \right) \delta q_i = 0 \tag{4.11}$$

Таким образом, условие (4.11) необходимо и достаточно для применения к неголономным системам рассматриваемого обобщенного метода Гамильтона — Якоби.

Отметим, что иная форма необходимых и достаточных условий применимости к неголономным системам потенциального метода интегрирования предложена И. С. Аржаных [13].

Условие (4.11) с учетом (1.5) вытекает из уравнений [5]

$$\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_l \lambda_l \left(\frac{\partial f_l}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}} \right) - \sum_l \lambda_l^{\cdot} \frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.12}$$

получаемых дифференцированием по t соотношений (4.3) в силу уравнений (4.10). Очевидно, уравнения (4.12) совпадают с уравнениями Эйлера (3.2) вариационной задачи (3.1) при $\lambda_l = \varkappa_l$ $(l = 1, \ldots, r)$.

Следовательно, обобщенный метод Гамильтона — Якоби интегрирования уравнений (4.1) движения неголономных систем применим тогда и только тогда, когда принцип Гамильтона (2.1) носит характер принципа стационарного действия.

Движения неголономной системы, для которых выполняется условие (4.11), описываются каноническими уравнениями Гамильтона (4.10), из которых как следствие вытекает принцип стационарного действия

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_i \pi_i q_i^{\cdot} - H_1 \right) dt = 0$$

равносильный с учетом (4.4) принципу (2.2).

Пример 4.1. Обобщенным методом Гамильтона — Якоби проинтегрированы уравнения движения в примере Аппеля [4] и уравнения движения диска для случая $\theta^{\cdot} = 0$ в работе [14]. Можно показать, что в примере 3 работы [4] приведенное выше условие (4.11) не выполняется для гироскопа в кардановом подвесе, стесненного связью (3.86) из [4], в связи с чем предложенное в [4] решение задачи не удовлетворяет уравнениям движения гироскопа.

Поступила 6 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельдер О.* О принципах Гамильтона и Мопертюи. В сб: Вариационные принципы механики. М., Физматгиз, 1959.
2. *Воронец П. В.* Об уравнениях движения для неголономных систем. Матем. сб., 1901, т. 22, вып. 4.
3. *Суслов Г. К.* Об одном видоизменении начала Даламбера. Матем. сб., 1901, т.22, вып. 4.
4. *R. van Dooren.* Generalized methods for nonholonomic systems with applications in various fields of classical mechanics. In: Theoretical and Applied Mechanics. Proc. 14th IUTAM Congress, Delft, 1976. Amsterdam, North Holland, 1977.
5. *Румянцев В. В.* О некоторых задачах аналитической динамики. Теоретична и приложна механика, 1978, т. 9, № 1.
6. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967.
7. *Новоселов В. С.* Вариационные методы в механике. Изд-во ЛГУ, 1966.
8. *Парс Л.* Аналитическая динамика. М., «Наука», 1971.
9. *Гюнтер Н. М.* Курс вариационного исчисления. Л.— М., Гостехиздат, 1941.
10. *Kerner M.* Le principe de Hamilton et l'holonomisme. Prace Mat.-Fiz., Warszawa, 1931, vol. 38.
11. *Capon R. S.* Hamilton principe in relation to nonholonomic mechanical systems. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1952, vol. 5, pt 4.
12. *Сумбатов А. С.* О принципе Гамильтона для неголономных систем. Вестн. МГУ, № 1. Сер. матем., механ., 1970.
13. *Аржаных И. С.* Поле импульсов. Ташкент, «Наука», 1965.
14. *Навиев Э. Х.* О методе Гамильтона — Якоби для неголономных систем. ПММ, 1972, т. 36, вып. 6.