ЛИТЕРАТУРА

1. *Крейн М. Г.* Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. Докл. АН СССР, 1955, т. 100, № 3.
2. *Bellman R.* Functional equations in the theory of dynamic programming. Proc. Amer. Math. Soc., 1957, vol. 8, No. 3.
3. *Kagiwada H., Kalaba R.* Integral equations via imbedding methods. Reading Massachusetts, Addison-Wesley Publ. Co., 1974.
4. *Соболев В. В.* Рассеяние света в атмосферах планет. М., «Наука», 1972.
5. *Fymat A. L., Kalaba R. E., Zagustin E.* Anisotropic scattering in inhomogeneous media. I. A new representation formula for the solution of the auxiliary integral equation for the source function. J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, 1975, vol. 15, No. 3.
6. *Соболев С. Л.* Успехи матем. наук, 1954, т. 9, № 3.

УДК 539.374

О ТЕОРЕМЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ДВУХЗВЕННЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

С. Неджеску-Клежа

(Румыния)

Дана постановка квазистатической краевой задачи для двухзвенных упругопластических процессов и задачи об отыскании начальных скоростей точек тела после момента излома для произвольного упругопластического процесса с изломом после простой деформации. Для упругопластических процессов с точкой излома при некоторых предположениях относительно физических функций, описывающих свойства материала, доказано, что изменение внешних нагрузок единственным образом определяет начальные скорости частиц тела, а следовательно, и угол излома траектории деформации в каждой точке. Доказана теорема единственности решения краевой задачи при нагрузках, реализующих двухзвенные упругопластические процессы. При этом в теле могут появляться как области активных деформаций, так и области разгрузки.

1. Анализ соотношений напряжения — деформации. Для двухзвенного упругопластического процесса с изломом траектории деформации на угол θ $(0 < \theta < \pi)$ в момент t соотношения между тензорами напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} имеют вид [1, 2]

$$S_{ij} = \frac{2}{3}\frac{\Phi(\text{Э}_u)}{\text{Э}_u}\text{Э}_{ij}, \quad t \leqslant t_0 \tag{1.1}$$

$$S_{ij} = \frac{2}{3}\frac{\sigma_u}{\sin\theta}\left[p_{ij}\sin(\theta - \vartheta) + p_{ij}^{\circ}\sin\vartheta\right], \quad t > t_0$$

$$\sigma = 3K\varepsilon \tag{1.2}$$

Здесь

$$\sigma = {}^1\!/_3\sigma_{ii}, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}, \quad \sigma_u = ({}^3\!/_2 S_{ij}S_{ij})^{1/2}$$

$$\varepsilon = {}^1\!/_3\varepsilon_{ii}, \quad \text{Э}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}, \quad \text{Э}_u = ({}^2\!/_3\text{Э}_{ij}\text{Э}_{ij})^{1/2}$$

$$p_{ij} = (\text{Э}_{ij} - \text{Э}_{ij}^{\circ})/(s - s^{\circ}), \quad p_{ij}^{\circ} = \text{Э}_{ij}^{\circ}/\text{Э}_u^{\circ}, \quad \text{Э}_{ij}^{\circ} = \text{Э}_{ij}(t_0)$$

$$s = \begin{cases} \text{Э}_u, & t \leqslant t_0 \\ s^{\circ} - s^{\circ}\cos\theta + \sqrt{\text{Э}_u^2 - (s^{\circ}\sin\theta)^2}\,\operatorname{sign}\cos\theta, & t > t_0 \end{cases}$$

$$\vartheta = \arccos\left(\mathbf{p}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sigma_u}\right) = \arccos\left(p_{ij}\frac{S_{ij}}{\sigma_u}\right)$$

$$s^{\circ} \equiv \text{Э}_u(t_0) = \text{Э}_u^{\circ}, \quad s^{\circ} \in [\varepsilon_s, \lambda]$$

где s — длина дуги траектории деформации, s° — длина участка простой деформации, причем (ε_s — предел текучести, λ — величина порядка нескольких ε_s), $p_{ij}{}^\circ$ — направляющий тензор на участке простой деформации, $\Phi(s)$ — интенсивность напряжений при простой деформации; p_{ij} при $s > s^\circ$ — направляющий тензор траектории деформации после точки излома, K — модуль объемной упругости, ϑ — угол сближения, т. е. текущий угол между вектором напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и вектором касательной к траектории деформации $\mathbf{p}$, соответствующим тензору p_{ij} [3].

Согласно постулату изотропии [4] $\sigma_u = \sigma_u(s^\circ, \theta; s)$, $\vartheta = \vartheta(s^\circ, \theta; s)$.

Соотношения (1.1) имеют место при любых значениях угла излома θ, но материальные функции σ_u и ϑ различны для направлений активной деформации и разгрузки. Обычно допускается [1, 4], что в области разгрузки связь между приращениями напряжений и деформаций линейна, причем при пренебрежении деформационной анизотропией (G — модуль сдвига)

$$S_{ij} - S_{ij}{}^\circ = 2G(\text{Э}_{ij} - \text{Э}_{ij}{}^\circ) \tag{1.3}$$

Относительно σ_u и ϑ примем следующие допущения, согласующиеся с данными опытов:

1.° $\sigma_u \in C^1(s^\circ, s^\circ + h)$ при любых значениях s°, θ, причем $\sigma_u(s^\circ, \theta; s^\circ) = \Phi(s^\circ)$; $\sigma_u(s^\circ, \theta; s) \to \Phi(s)$ при $\theta \to 0$, $s > s^\circ$; существует $\sigma_u'(s^\circ + 0, \theta) = \lim \partial\sigma_u(s^\circ, \theta; s)/\partial s$ при $s \to s^\circ$, $s > s^\circ$.

В опытах установлено [5, 6], что величина $\partial\sigma_u(s^\circ, \theta; s)/\partial s$ конечна при любых $s \in (s^\circ, s^\circ + h)$, $\theta \in (0, \pi/2]$. Здесь h — след запаздывания векторных свойств. Для малого $\Delta s = s - s^\circ$ при больших $\theta \in (0, \pi/2]$ требуются более точные эксперименты. Имеющиеся опытные данные допускают две возможности: $\sigma_u'(s^\circ + 0, \pi/2) = 0$ (опыты [5, 6]), или $\sigma_u'(s^\circ + 0, \theta) < 0$ (опыты [7, 8]). Для упрочняющихся материалов приемлема аппроксимация [9]

$$\sigma_u'(s^\circ + 0, \theta) = \Phi'(s^\circ)\cos\theta \tag{1.4}$$

где $\Phi'(s)$ — модуль упрочнения при простой деформации; а согласно работе [7] — аппроксимация (B, n — материальные константы)

$$\sigma_u'(s^\circ + 0, \theta) = \Phi'(s^\circ) - B\theta^n \tag{1.5}$$

2°. $\vartheta \in C^1(s^\circ, s^\circ + h)$ при любых s°, θ; $\vartheta(s^\circ, \theta; s) = \theta$ при $s = s^\circ$; $\vartheta(s^\circ, \theta; s) \to 0$ при $\theta \to 0$ и любых $s > s^\circ$; $-\infty < M < \partial\vartheta(s^\circ, \theta; s)/\partial s < 0$ при $s \in (s^\circ, s^\circ + h)$; существует $\vartheta'(s^\circ + 0, \theta) = \lim \partial\vartheta(s^\circ, \theta; s)/\partial s$ при $s \to s^\circ$, $s > s^\circ$, $\vartheta(s^\circ, \theta; s) \equiv 0$ при $s > s^\circ + h$ для любых $s^\circ \in [\varepsilon_s, \lambda]$ и $\theta \in (0, \pi/2]$.

В частности, в работе [7] использована аппроксимация

$$\vartheta'(s^\circ + 0, \theta) = -C\theta/\Phi(s^\circ) \tag{1.6}$$

где C — константа материала.

3°. Функция $U = \sigma_u \cos\vartheta$ при фиксированных s° и θ возрастает по s (см. опыты [6] [1]).

При $\theta \to 0$ для любых $s > s^\circ$, из вторых соотношений (1.1) получаются соотношения теории малых упругопластических деформаций [1].

При допущениях 1° и 2° вытекает существование

$$S_{ij}^{\cdot +} = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} \frac{S_{ij}(t) - S_{ij}(t_0)}{t - t_0} = 2G^1(s^\circ, \theta)V_{ij} + 2G^\circ(S^\circ, \theta)v_u p_{ij}{}^\circ \tag{1.7}$$

Здесь

$$V_{ij} = \frac{d\text{Э}_{ij}}{dt}(s^\circ, \theta; s^\circ + 0) \qquad G^1(s^\circ, \theta) = -\frac{\Phi(s^\circ)\vartheta'(s^\circ + 0, \theta)}{3\sin\theta} \tag{1.8}$$

$$G^\circ(s^\circ, \theta) = {}^1/_3\,[\sigma_u'(s^\circ + 0, \theta) + \Phi(s^\circ)\vartheta'(s^\circ + 0, \theta)\operatorname{ctg}\theta] \tag{1.9}$$

---

[1] *Ленский В. С.* Исследование пластичности металлов при сложном нагружении. Докт. диссертация, МГУ, 1960.

где V_{ij} — девиатор тензора скорости деформаций в момент t_0, v_u — соответствующая ему интенсивность.

Из формул (1.3), (1.7), (1.9) следует, что $G^1(s^\circ, \theta) \equiv G$, $G^\circ(s^\circ, \theta) \equiv 0$ в области разгрузки, т. е. при $\theta \in [\pi/2, \pi]$ и, следовательно

$$(1.10) \qquad \sigma_u'(s^\circ + 0, \theta) = 3G\cos\theta \qquad \vartheta'(s^\circ + 0, \theta) = -3G\sin\theta/\Phi(s^\circ)$$

Предполагая непрерывность функции $S_{ij}'^{+}$ по θ, получим $\sigma_u'(s^\circ + 0, \pi/2) = 0$

2. Используемые классы функций. Пусть D — множество непрерывно-дифференцируемых вектор-функций $\mathbf{u}$, заданных в некоторой ограниченной области $\Omega \subset R^3$, которые удовлетворяют [10] условиям

$$(2.1) \qquad \int_\Omega \mathbf{u}\,dx = 0, \qquad \int_\Omega [\mathbf{u} \times \mathbf{r}]\,dx = 0$$

В пространстве D имеет место [10] неравенство Корна

$$(2.2) \qquad I_1 \leqslant C_1 I_\varepsilon \qquad I_1 = \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}\,dx, \qquad I_\varepsilon = \int_\Omega \varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\,\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\,dx$$

где C_1 — постоянная, которая зависит только от Ω. Для функций из D справедливо неравенство Пуанкаре [11]

$$(2.3) \qquad I_2 \leqslant C_2 I_1 + C_3 \left|\int_\Omega \mathbf{u}\,dx\right|^2 \qquad I_2 = \int_\Omega |\mathbf{u}|^2\,dx$$

где C_2, C_3 — постоянные, которые зависят только от Ω. Поэтому в силу (2.2) и (2.3) получим, что нормы С. Л. Соболева $|\mathbf{u}|^2_{(1)} = I_1$, $\|\mathbf{u}\|^2_{(1)} = I_1 + I_2$ и норма [12]

$$(2.4) \qquad \|\mathbf{u}\|^2 = I_\varepsilon$$

эквивалентны.

Пусть $H(\Omega)$ — гильбертово пространство, получающееся при замыкании пространства D по норме (2.4).

3. Теорема единственности. Для двухзвенных упругопластических процессов задача о равновесии тела, занимающего область Ω с границей Γ, формулируется в виде следующей краевой задачи: необходимо определить вектор-функцию перемещения $\mathbf{u}$, тензор деформаций ε_{ij} и тензор напряжений σ_{ij}, которые в области Ω удовлетворяют требованиям при каждом $t \in [0, T]$

$$\mathbf{u} \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma)$$

$$\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij} \in C^1(\Omega) \cap C^\circ(\Omega \cup \Gamma) \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

соотношениям (1.1), (1.2) и соотношениям Коши $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ уравнениям равновесия и граничным условиям

$$(3.1) \qquad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \quad \text{в } \Omega$$

$$(3.2) \qquad u_i = \psi_i \ \text{ на } \Gamma_u \qquad \sigma_{ij}\nu_j = T_{\nu i} \ \text{ на } \Gamma_\sigma \ (\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma).$$

Массовые силы $\mathbf{F}$, напряжения $\mathbf{T}_\nu$ и перемещение $\boldsymbol{\psi}$ на границе—заданные функции. Предположим, что $\mathbf{F}$, $\mathbf{T}_\nu$ и $\boldsymbol{\psi}$ изменяются так, что в интервале $[0, t_0]$ в любой точке тела осуществляется траектория простой деформации [1, 13]. Пусть $\mathbf{u}^0$ — вектор перемещения в момент t_0, соответствующий решению задачи о простой деформации [14], Продифференцировав соотношения (3.1), (3.2) по t ($t > t_0$) и устремив $t \to t_0 + 0$, с учетом формул (1.7) — (1.9) и (1.2) получим систему дифференциальных уравнений для определения начальной скорости частиц после точки излома

$$G^1(s^\circ, \theta)\left(\Delta V_i - \frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}\mathbf{V}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}(2G^1(s^\circ, \theta))V_{ij} + \tag{3.3}$$

$$+K\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}\mathbf{V} + G^\circ(s^\circ, \theta)\frac{v_u}{\text{Э}_u^\circ}\left(\Delta u_i^\circ - \frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}\mathbf{u}^\circ\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(2G^\circ(s^\circ, \theta)\frac{v_u}{\text{Э}_u^\circ}\right)\text{Э}_{ij}^\circ + F_i^{\cdot+} = 0$$

$$V_i = \psi_i^{\cdot+} \text{ на } \Gamma_u, \quad \sigma_{ij}^{\cdot+}\nu_j = T_{\nu i}^{\cdot+} \text{ на } \Gamma_\sigma \tag{3.4}$$

где

$$F_i^{\cdot+} = \lim\frac{dF_i}{dt}, \quad T_{\nu i}^{\cdot+} = \lim\frac{dT_{\nu i}}{dt}, \quad \psi_i^{\cdot+} = \lim\frac{d\psi_i}{dt}$$

$$(t \to t_0), \quad (t > t_0)$$

Для простоты будем рассматривать вторую краевую задачу, когда на границе Г тела заданы лишь поверхностные силы $\mathbf{T}_\nu$, т. е. когда $\Gamma_\sigma = \Gamma$, $\Gamma_u = 0$. Умножив систему уравнений (3.3) скалярно на произвольную непрерывно-дифференцируемую в Ω вектор-функцию φ и проинтегрировав по всему объему, с учетом (3.4) получим интегральное тождество.

Назовем обобщенным решением краевой задачи (3.3), (3.4) вектор-функцию $\mathbf{V} \in H(\Omega)$, удовлетворяющую этому интегральному тождеству для любой непрерывно-дифференцируемой вектор-функции φ.

Приведем краевую задачу (3.3), (3.4) к операторному уравнению.

Из предположений о том, что функции $G^1(s^\circ, \theta)$ и $G^\circ(s^\circ, \theta)$ непрерывны по $(s^\circ, \theta) \in [\varepsilon_s, \lambda] \times [0, \pi]$, следует их ограниченность. Тогда в рассматриваемом интегральном тождестве для любого $\mathbf{V} \in H(\Omega)$ можно выделить линейный ограниченный функционал по $\varphi \in H(\Omega)$ и по теореме Рисса [15] определить оператор $a(\mathbf{V})$, действующий из $H(\Omega)$ в $H(\Omega)$. Имеем

$$(a(\mathbf{V}), \varphi) \equiv \int\limits_\Omega [2G^1(s^\circ, \theta)V_{ij} + 2G^\circ(s^\circ, \theta)v_u p_{ij}^\circ + \tag{3.5}$$

$$+ 3K\delta_{ij}\operatorname{div}\mathbf{V}]\,\varepsilon_{ij}(\varphi)\,dx = \int\limits_\Omega F_i^{\cdot+}\varphi_i dx + \int\limits_\Gamma T_{\nu i}^{\cdot+}\varphi_i dx, \quad \forall\varphi \in H(\Omega)$$

Оператор $a(\mathbf{V})$ назовем основным оператором краевой задачи (3.3), (3.4).

Будем считать, что интегралы в правой части (3.5) определяют линейные ограниченные функционалы в пространстве $H(\Omega)$. В работе [16] указаны различные условия, при которых нужное требование имеет место, например, $F_i \in L_p(\Omega)$ ($\forall p \geqslant {}^6/_5$) и $T_{\nu i}^{\cdot+} \in L_q(\Gamma)$ ($\forall q \geqslant {}^4/_3$). По теореме Рисса существует $\mathbf{f} \in H(\Omega)$, такое, что

$$(\mathbf{f}, \varphi) = \int\limits_\Omega F_i^{\cdot+}\varphi_i dx + \int\limits_\Gamma T_{\nu i}^{\cdot+}\varphi_i dx, \quad \forall\varphi \in H(\Omega)$$

Найдем достаточные условия, которым должны удовлетворять функции $\sigma_u'(s^\circ + 0, \theta)$ и $\vartheta'(s^\circ + 0, \theta)$, для того, чтобы оператор $a(\mathbf{V})$ на множестве $H(\Omega)$ был строго монотонным [17], т. е. чтобы при любых $\mathbf{V}^1$, $\mathbf{V}^2 \in H(\Omega)$ имело место неравенство

$$(a(\mathbf{V}^1) - a(\mathbf{V}^2),\ \mathbf{V}^1 - \mathbf{V}^2) \geqslant 0 \tag{3.6}$$

обращающееся в равенство лишь при $\mathbf{V}^1 = \mathbf{V}^2$ в $H(\Omega)$.

Пусть $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ — векторы пятимерного пространства [3] Э^5, соответствующие девиаторам V_{ij} и $\text{Э}_{ij}(\varphi)$. Обозначим

$$A(\mathbf{v}) = -\frac{\Phi(s^\circ)\,\vartheta'(s^\circ + 0, \theta)}{\sin\theta}\mathbf{v} + [\sigma_u'(s^\circ + 0, \theta) + \tag{3.7}$$

$$+ \Phi(s^\circ)\operatorname{ctg}\theta\,\vartheta'(s^\circ + 0, \theta)]\,v_u\mathbf{p}^\circ$$

С учетом (3.5), (1.7) — (1.9), (3.7) получим равенство

$$(a(\mathbf{V}), \varphi) = \int\limits_{\Omega} A(\mathbf{v})\, \mathbf{w}dx + \int\limits_{\Omega} K \operatorname{div} \mathbf{V} \operatorname{div} \varphi dx \tag{3.8}$$

Так как $\mathbf{p}^\circ$ — известный вектор пятимерного пространства, любой вектор $\mathbf{v}$ допускает представление

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_u (\mathbf{p}^\circ \cos\theta + \mathbf{n} \sin\theta), \quad \theta \in [0, \pi] \tag{3.9}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор, ортогональный к вектору $\mathbf{p}^\circ$ и принадлежащий плоскости $(\mathbf{v}, \mathbf{p}^\circ)$.

Для произвольных $\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^2 \in D$ на основании (3.7) и (3.9) получим

$$\begin{aligned} &[A(\mathbf{v}^1) - A(\bar{\mathbf{v}}^2)][\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2] = \{\Phi(s^\circ)[-\mathbf{n}^1\vartheta'(s^\circ + 0, \theta^1)v_u{}^1 + \mathbf{n}^2\vartheta' \times \\ &\times (s^\circ + 0, \theta)v_u{}^2] + \mathbf{p}^\circ[\sigma_u'(s^\circ + 0, \theta^1)v_u{}^1 - \sigma_u'(s^\circ + 0, \theta^2)v_u{}^2]\} \times \\ &\times [\mathbf{p}^\circ(v_u{}^1 \cos\theta^1 - v_u{}^2\cos\theta^2) + \mathbf{n}^1 \sin\theta^1 v_u{}^1 - \mathbf{n}^2 \sin\theta^2 v_u{}^2] \end{aligned} \tag{3.10}$$

Индексы 1, 2 в (3.10) относятся к значениям функций, соответствующим векторам $\mathbf{V}^1$ и $\mathbf{V}^2$. Так как $-1 \leqslant \mathbf{n}^1 \mathbf{n}^2 \leqslant 1$ и $\vartheta'(s^\circ + 0, \theta) < 0$, то на основании (3.8) и (3.10) приходим к неравенству

$$\begin{aligned} &(a(\mathbf{V}^1) - a(\mathbf{V}^2), \mathbf{V}^1 - \mathbf{V}^2) \geqslant \\ &\geqslant \int\limits_{\Omega} \{[\sigma_u'(s^\circ + 0, \theta^1)v_u{}^1 - \sigma_u'(s^\circ + 0, \theta^2)v_u{}^2](v_u{}^1 \cos\theta^1 - v_u{}^2\cos\theta^2) + \\ &+ \Phi(s^\circ)[-\vartheta'(s^\circ + 0, \theta^1)v_u{}^1 + \vartheta'(s^\circ + 0, \theta^2)v_u{}^2](v_u{}^1 \sin\theta^1 - \\ &- v_u{}^2 \sin\theta^2)\}dx + K\int\limits_{\Omega}(\operatorname{div}\mathbf{V}^1 - \operatorname{div}\mathbf{V}^2)^2 dx \end{aligned} \tag{3.11}$$

В декартовых координатах $x = v_u \sin\theta$, $y = v_u \cos\theta$ при $\theta \in [0, \pi]$, $v_u \in R$ функция под знаком первого интеграла в правой части неравенства (3.11) принимает вид

$$(f_1(x_1, y_1) - f_1(x_2, y_2))(x_1 - x_2) + (f_2(x_1, y_1) - f_2(x_2, y_2))(y_1 - y_2) \tag{3.12}$$

Здесь

$$f_1(\theta, v_u) = -\Phi(s^\circ)\vartheta'(s^\circ + 0, \theta)v_u \qquad f_2(\theta, v_u) = \sigma_u'(s^\circ + 0, \theta)v_u \tag{3.13}$$

Перепишем выражение (3.12) с учетом теоремы Лагранжа следующим образом;

$$(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\begin{Vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^*, y_2) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_1, y^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x^{**}, y_2) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_1 y^{**}) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{Vmatrix} \tag{3.14}$$

где x^*, x^{**} находятся между x_1 x_2, а y^*, y^{**} — между y_1, y_2.

Для положительной определенности квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\zeta_i\zeta_j$$

где a_{ij} — компоненты матрицы из формулы (3.14), необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_1}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} > 0 \\ &\frac{\partial f_1}{\partial x}(z_1)\frac{\partial f_2}{\partial y}(z_2) - \frac{1}{4}\left[\frac{\partial f_1}{\partial y}(z_3) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_4)\right]^2 > 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Здесь z_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — произвольные точки в полуплоскости $x \geqslant 0$ переменных (x, y).

Предположим, что функции σ_u' $(s^\circ + 0, \theta)$ и ϑ' $(s^\circ + 0, \theta)$ принадлежат классу C^1 $(0, \pi)$ $\forall\, s^\circ \in [\varepsilon_s, \lambda]$ и удовлетворяют условиям (3.15). Тогда правая часть неравенства (3.11) неотрицательна, и справедливо неравенство (3.6). Если же $(a\,(\mathbf{V}^1) - a(\mathbf{V}^2),\ \mathbf{V}^1 - \mathbf{V}^2) = 0$, то в силу (3.8) — (3.11) $V_{ij}^1 = V_{ij}^2$, $\operatorname{div} \mathbf{V}^1 = \operatorname{div} \mathbf{V}^2$, и вектор-функции $\mathbf{V}^1$ и $\mathbf{V}^2$ равны между собой как элементы из H (Ω), т. е. почти всюду в Ω.

Неравенство (3.6) остается верным и при любых $\mathbf{V}^1$, $\mathbf{V}^2 \in H$ (Ω), если функции σ_u' $(s^\circ + 0, \theta)$, ϑ' $(s^\circ + 0, \theta)$ кусочно непрерывно-дифференцируемые по $\theta \in [0, \pi]$ и удовлетворяют условиям (3.15).

Вводя обозначения

$$g_1(s^\circ, \theta) \equiv -\Phi(s^\circ)\left[\frac{\partial\vartheta'(s^\circ+0,\theta)}{\partial\theta}\cos\theta + \vartheta'(s^\circ+0,\theta)\sin\theta\right]$$

$$g_2(s^\circ, \theta) \equiv -\frac{\partial\sigma_u'(s^\circ+0,\theta)}{\partial\theta}\sin\theta + \sigma_u'(s^\circ+0,\theta)\cos\theta$$

$$g_3(s^\circ, \theta) \equiv \Phi(s^\circ)\left[\frac{\partial\vartheta'(s^\circ+0,\theta)}{\partial\theta}\sin\theta - \vartheta'(s^\circ+0,\theta)\cos\theta\right]$$

$$g_4(s^\circ, \theta) \equiv \frac{\partial\sigma_u'(s^\circ+0,\theta)}{\partial\theta}\cos\theta + \sigma_u'(s^\circ+0,\theta)\sin\theta$$

запишем условия (3.15) с учетом (3.13) в виде

$$g_1(s^\circ, \theta) > 0,\quad g_2(s^\circ, \theta) > 0 \tag{3.16}$$

$$\min_{0\leqslant\theta\leqslant\pi} g_1(s^\circ,\theta) \min_{0\leqslant\theta\leqslant\pi} g_2(s^\circ,\theta) > \frac{1}{4}\max_{0\leqslant\theta,\,\theta^*\leqslant\pi}[g_3(s^\circ,\theta) + g_4(s^\circ,\theta^*)]^2$$

Установленное свойство строгой монотонности основного оператора $a\,(\mathbf{V})$ краевой задачи (3.3), (3.4) приводит к следующей теореме единственности.

Теорема 1. Пусть внешние нагрузки $\mathbf{F}^{\cdot+}$, $\mathbf{T}_\nu^{\cdot+}$ таковы, что интегралы в правой части (3.5) определяют линейные ограниченные функционалы в пространстве H (Ω) и справедливы формулы (3.16). Тогда задача (3.3), (3.4) не может иметь более одного решения.

Таким образом, изменения внешних нагрузок однозначно определяют начальную скорость частиц, а следовательно, и углы излома траектории деформации во всех точках тела, так как

$$\cos\theta = \frac{2}{3}\frac{V_{ij}}{v_u}p_{ij}^\circ$$

Теорема 1 связана с локальными характеристиками процесса и, следовательно, относится к любым упругопластическим процессам с точкой излома после простой деформации.

Теорема 2. Предположим, что внешние нагрузки изменяются по времени в интервале $[0, T]$, так, что в каждой точке тела осуществляется процесс деформации в виде двухзвенной ломаной. При условиях теоремы 1 решение краевой задачи (3.1), (3.2) для двухзвенных упругопластических процессов, когда на всей границе задан вектор напряжений, единственно.

Доказательство. Допустим, что $\mathbf{u}^1$, $\mathbf{u}^2 \in H$ (Ω) — решения краевой задачи (3.1), (3.2), причем ε_{ij}^1 и ε_{ij}^2 — соответствующие им тензоры деформации. Согласно теореме 1 при заданных $F_i^{\cdot+}$, $T_{\nu i}^{\cdot+}$ угол излома θ и начальное значение направляющего тензора скоростей деформаций $\mathbf{V}$ после точки излома траектории деформации определяются единственным образом, т. е. $\theta^1 = \theta^2$ и $p_{ij}^1 = p_{ij}^2$ почти всюду в Ω. Докажем, что $s^1 = s^2$ и $\operatorname{div}\mathbf{u}^1 = \operatorname{div}\mathbf{u}^2$ почти всюду в Ω.

Каждое из решений $\mathbf{u}^1$ и $\mathbf{u}^2$ удовлетворяет равенству вида

$$\int_\Omega [S_{ij}\vartheta_{ij}(\varphi) + K\operatorname{div}\mathbf{u}\operatorname{div}\varphi]\,dx = \int_\Omega F_i\varphi_i dx + \int_\Gamma T_{\nu i}\varphi_i dx \tag{3.17}$$

при любой вектор-функции $\varphi \in H(\Omega)$. В частности, при $\varphi = \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2$ на основании соотношений (3.17) для $\mathbf{u}^1$ и $\mathbf{u}^2$ получим равенство

$$\int_\Omega (S_{ij}{}^1 - S_{ij}{}^2)(Э_{ij}{}^1 - Э_{ij}{}^2)\,dx + K\int_\Omega (\operatorname{div}\mathbf{u}^1 - \operatorname{div}\mathbf{u}^2)^2\,dx = 0 \tag{3.18}$$

Так как для двухзвенных упругопластических процессов

$$(S_{ij}{}^1 - S_{ij}{}^2)(Э_{ij}{}^1 - Э_{ij}{}^2) = (\sigma_u{}^1 \cos\vartheta^1 - \sigma_u{}^2 \cos\vartheta^2) \times (s^1 - s^2)$$

то, учитывая допущение 3°, приходим к выводу $(S_{ij}{}^1 - S_{ij}{}^2)(Э_{ij}{}^1 - Э_{ij}{}^2) \geqslant 0$

Следовательно, равенство (3.18) имеет место тогда и только тогда, когда $s^1 = s^2$, $\operatorname{div}\mathbf{u}^1 = \operatorname{div}\mathbf{u}^2$ почти всюду в Ω. Таким образом, $\varepsilon_{ij}{}^1 = \varepsilon_{ij}{}^2$ почти всюду в Ω, т. е. $\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^2$ в $H(\Omega)$ и почти всюду в Ω. Теорема доказана.

Замечание. Здесь t представляет некоторый параметр различения последовательности событий, монотонно изменяющийся с длиной дуги траектории деформации.

Поступила 13 VIII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.— Л., Гостехиздат, 1948.
2. *Неджеску-Клежа С.* Соотношения между тензорами напряжений и деформаций для двухзвенных процессов деформации. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1976, № 4.
3. *Ильюшин А. А., Ленский В. С.* О соотношениях и методах современной теории пластичности. В сб.: Успехи механики деформируемых сред. М., «Наука», 1975, стр. 240—255.
4. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М., Изд-во АН СССР, 1963.
5. *Ленский В. С.* Экспериментальная проверка законов изотропии и запаздывания при сложном нагружении. Изв. АН СССР. ОТН, 1958, № 11.
6. *Ленский В. С.* Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций. В сб.: Вопросы теории пластичности. М., Изд-во АН СССР, 1961, стр. 58—82.
7. *Коровин И. М.* Экспериментальное определение зависимости напряжение — деформации при сложном нагружении по траектории с одной точкой излома. Инж. ж., 1964, т. 4, вып. 3.
8. *Ohashi Y., Tokuda M.* Precise measurement of plastic behaviour of mild steel tubular specimens subjected to combined torsion and axial force. J. Mech. and Phys. Solids, 1973, vol. 21, No. 4.
9. *Васин Р. А.* Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении. В сб.: Упругость и неупругость, вып. 1. М., Изд-во МГУ, 1971.
10. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.— Л., Гостехиздат, 1952.
11. *Nečas J.* Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Praque, Academia, 1967.
12. *Победря Б. Е.* Математическая теория нелинейной вязкоупругости. В сб.: Упругость и неупругость, вып. 3. Изд-во МГУ, 1973.
13. *Кравчук А. С.* О точности деформационной теории при простом нагружении. Инж. ж. МТТ, 1968, № 6.
14. *Ворович И. И., Красовский Ю. П.* О методе упругих решений. Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 4.
15. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
16. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1970.
17. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М., «Наука», 1972.

Технический редактор *З. В. Филиппова*

Сдано в набор 24/I-1978 г. Т-00192 Подписано к печати 20/III-1978 г. Тираж 2870 экз.
Зак. 105 Формат бумаги 70×108¹/₁₆ Усл. печ. л. 16,8 Бум. л. 6,0 Уч.-изд. л. 15,8

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10