10. *Бленд Д. Р.* Теория линейной вязкоупругости. М., «Мир», 1965.
11. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
12. *Зубарев Д. Н.* Неравновесная статистическая термодинамика. М., «Наука», 1971.
13. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. М., Изд-во иностр. лит., 1949.

УДК 539.3

НОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И МЕТОД РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА

Е. А. Загустина, Р. Е. Калаба
(США)

Показано, что решение интегрального уравнения Фредгольма

$$u(t,x)=g(t)+\int_0^x k(t,y)\,u(y,x)\,dy,\quad 0\leqslant t\leqslant x\leqslant X \tag{0.1}$$

можно выразить через две функции $\Phi=\Phi(t,x)$ и $\Psi=\Psi(y,x)$, каждая из которых зависит только от двух аргументов. Получена полная система Коши для этих двух функций и для третьей вспомогательной функции $Z=Z(x)$.

Более двадцати лет назад М. Г. Крейн [1] вывел уравнение в частных производных для резольвенты Фредгольма. Несколько лет спустя это уравнение было независимо получено Беллманом [2] на основании вариационного принципа.

Цель данной работы — вывести полную систему дифференциальных уравнений, одной из которых служит уравнение Крейна — Беллмана, в затем получить представление решения интегрального уравнения Фредгольма с использованием функций $\Phi=\Phi(t,x)$ и $\Psi=\Psi(y,x)$ вместо резольвенты, содержащей три аргумента.

Сведение интегральных уравнений Фредгольма к системе Коши подробно описано в книге [3]. Идеи данной работы представляют собой развитие идей В. В. Соболева [4].

1. Введя резольвенту K, решение уравнения (0.1) можно представить в виде

$$u(t,x)=g(t)+\int_0^x K(t,y,x)\,g(y)\,dy,\quad 0\leqslant t\leqslant x \tag{1.1}$$

Резольвента K удовлетворяет интегральному уравнению

$$K(w,y,x)=k(w,y)+\int_0^x K(w,\zeta,x)\,k(\zeta,y)\,d\zeta,\quad 0\leqslant w,y\leqslant x\leqslant X \tag{1.2}$$

Введем вспомогательную функцию Φ как решение интегрального уравнения

$$\Phi(t,x)=k(t,x)+\int_0^x k(t,y)\,\Phi(y,x)\,dy,\quad 0\leqslant t\leqslant x\leqslant X \tag{1.3}$$

Сравнивая уравнение (1.3) с интегральным уравнением для u_x, получающимся дифференцированием (0.1) по x, и используя их линейность, имеем

$$u_x(t,x)=\Phi(t,x)\,u(x,x) \tag{1.4}$$

Определяем новую функцию Ψ так:

$$\Psi(y,x)=K(x,y,x),\quad 0\leqslant y\leqslant x\leqslant X \tag{1.5}$$

Тогда уравнение (1.1) при $t = x$ можно записать следующим образом:

$$U(x) = g(x) + \int_0^x \Psi(y, x) g(y)\, dy \tag{1.6}$$

$$U(x) = u(x, x) \tag{1.7}$$

Интегрируя обе части уравнения (1.4) по x и используя (1.7), получим

$$u(t, x) = U(t) + \int_t^x \Phi(t, w) U(w)\, dw \tag{1.8}$$

Подставляя выражения (1.6) в (1.8), решение уравнения Фредгольма можно записать так [5]:

$$u(t, x) = g(t) + \int_0^t \Psi(y, t) g(y)\, dy + \int_t^x \Phi(t, w)\left[g(w) + \int_0^w \Psi(y, w) g(y)\, dy\right] dw \tag{1.9}$$

Эта формула дает решение $u(t, x)$, выраженное через вспомогательные функции Φ и Ψ, зависящее от двух аргументов (K зависит от трех аргументов).

Из (1.5) и (1.2) видно, что Ψ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\Psi(y, x) = k(x, y) + \int_0^x \Psi(y', x) k(y', y)\, dy', \quad 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant X \tag{1.10}$$

2. Если в уравнении (1.9) сделать замену

$$g(t) = k(t, y), \quad 0 \leqslant t \leqslant x \tag{2.1}$$

тогда

$$u(t, x) = K(t, y, x) \tag{2.2}$$

Подставляя соотношение (2.1) в (1.6) и сравнивая полученное уравнение с (1.10), имеем $U(t) = \Psi(y, t)$. Используя уравнения (2.2) и (1.8), получим

$$K(t, y, x) = \Psi(y, t) + \int_t^x \Phi(t, w) \Psi(y, w)\, dw \tag{2.3}$$

Вспоминая интегральные уравнения (1.3), (1.10) для функций Φ и Ψ, видим, что Φ и Ψ определены для $x < t$ и $y < t$, поэтому уравнение (2.3) пригодно для всех значений t, y.

Дифференцируя уравнение (2.3) по x, получаем уравнения в частных производных для K в зависимости от функций Φ и Ψ

$$\begin{aligned} &K_x(t, y, x) = \Phi(t, x)\Psi(y, x) \\ &K(t, y, y) = \Phi(t, y), \quad y > t \\ &K(t, y, t) = \Psi(y, t), \quad t > y \end{aligned} \tag{2.4}$$

Уравнения (1.2) и (1.3) дают

$$\Phi(t, x) = K(t, x, x), \quad 0 \leqslant t \leqslant x \tag{2.5}$$

Уравнения (2.4) и (1.3) дают

$$K_x(t, y, x) = K(t, x, x) K(x, y, x), \quad 0 \leqslant t,\ y \leqslant x \tag{2.6}$$

т. е. приходим к уравнению Крейна — Беллмана.

3. Выведем дифференциальные уравнения для функций Φ, Ψ, K, Z.

Начнем с функции $\Phi(t, x)$. Продифференцируем уравнение (1.3) по x, что дает

$$\Phi_x(t,x) = A(t,x) + \int_0^x k(t,y)\,\Phi_x(y,x)\,dy \tag{3.1}$$

$$A(t, x) = k_x(t, x) + k(t, x)\Phi(x, x) \tag{3.2}$$

Заметим, что уравнение (3.1) для Φ_x совпадает с уравнением (0.1) для $u(t, x)$, если в (0.1) подставить

$$g(t) = A(t, x) \tag{3.3}$$

Решение для u дается соотношениями (1.8), (1.6), поэтому и решение для Φ можно выразить соотношениями (1.8), (1.6) при выполнении условия (3.3). Аналогично уравнению (1.8) получим

$$\Phi_x(t,x) = R(t,x) + \int_t^x \Phi(t,w)\,R(w,x)\,dw, \quad 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant X \tag{3.4}$$

$$R(t,x) = A(t,x) + \int_0^x \Psi(y,x)\,A(y,x)\,dy$$

Выведем дифференциальное уравнение для функции $\Psi(y, x)$. Для этого продифференцируем обе части уравнения (1.10) по x

$$\Psi_x(y,x) = B(y,x) + \int_0^x \Psi_x(w,x)\,k(w,x)\,dw \tag{3.5}$$

$$B(y, x) = k_x(x, y) + \Psi(x, x)k(x, y) \tag{3.6}$$

Рассмотрим вспомогательное интегральное уравнение

$$v(y,x) = h(y) + \int_0^x v(w,x)\,k(w,y)\,dw, \quad 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant X \tag{3.7}$$

Дифференцируя уравнение (3.7) по x и сравнивая результат с уравнением (1.10), получаем

$$v_x(y, x) = \Psi(y, x)v(x, x) \tag{3.8}$$

Интегрируя уравнения (3.8) по x, получаем

$$v(y,x) = v(y,y) + \int_y^x \Psi(y,w)\,v(w,w)\,dw \tag{3.9}$$

Введем резольвенту ядра $L(w, y, x)$, тогда решение уравнения выразится так:

$$v(y,x) = h(y) + \int_0^x h(w)\,L(w,y,x)\,dw, \quad 0 \leqslant w \leqslant x \tag{3.10}$$

Решение уравнения (3.9) будет

$$v(y,x) = V(y) + \int_y^x \Psi(y,w)\,V(w)\,dw \tag{3.11}$$

$$V(x) \equiv v(x,x) = h(x) + \int_0^x h(w)\,L(w,x,x)\,dw \tag{3.12}$$

Определим функцию $L(w, x, x)$. Для этого приравняем правые части уравнений (3.7) и (3.10), получим

$$\int_0^x v(w, x)\,k(w, y)\,dw = \int_0^x h(w)\,L(w, y, x)\,dw \tag{3.13}$$

Согласно уравнению (3.10) запишем выражение для $v(w, x)$, причем переменную интегрирования заменим на ζ. Подставляя это выражение для $v(w, x)$ под интеграл в (3.13), получим

$$\int_0^x h(w)\,k(w, y)\,dw + \int_0^x k(w, y)\,dw \int_0^x h(\zeta)\,L(\zeta, w, x)\,d\zeta = \int_0^x h(w)\,L(w, y, x)\,dw \tag{3.14}$$

Заменим w на ζ и ζ на w во втором члене в левой части уравнения (3.14) и соберем члены при $h(w)$. Учитывая, что $h(w)$ — произвольная функция, получим отсюда интегральное уравнение

$$L(w, y, x) = k(w, y) + \int_0^x L(w, \zeta, x)\,k(\zeta, y)\,d\zeta \tag{3.15}$$

Принимая во внимание интегральное уравнение Фредгольма (3.7) и его решение (3.10), запишем решение интегрального уравнения Фредгольма (3.15) в виде

$$L(w, y, x) = k(w, y) + \int_0^x k(w, \zeta)\,L(\zeta, y, x)\,d\zeta \tag{3.16}$$

Подставляя $y = x$ в уравнение (3.16), а $t = w$ — в уравнение (1.3) и сравнивая результаты, получим

$$L(w, x, x) = \Phi(w, x), \quad 0 \leqslant w \leqslant x \leqslant X \tag{3.17}$$

Используя (3.17), решение для $v(y, x)$, определяемое уравнениями (3.11), (3.12), запишем в виде

$$v(y, x) = V(y) + \int_y^x \Psi(y, w)\,V(w)\,dw \tag{3.18}$$

$$V(x) = h(x) + \int_0^x h(w)\,\Phi(w, x)\,dw \tag{3.19}$$

Сравнивая уравнения (3.5) и (3.7), замечаем, что Ψ_x удовлетворяет интегральному уравнению (3.7), если положить

$$h(y) = B(y, x) \tag{3.20}$$

Отсюда заключаем, что при условии (3.20) решение для Ψ_x совпадает с решением для $v(y, x)$, определяемым уравнениями (3.18), (3.19). Поэтому можно записать решение для Ψ_x в виде

$$\Psi_x(y, x) = P(y, x) + \int_y^x \Psi(y, w)\,P(w, x)\,dw, \quad 0 \leqslant y \leqslant x \tag{3.21}$$

$$P(y, x) = B(y, x) + \int_0^x B(w, x)\,\Phi(w, x)\,dw$$

Введем новую функцию

$$Z(x) = \Phi(x, x), \quad 0 \leqslant x \leqslant X \tag{3.22}$$

Дифференцируя уравнение (3.22) по x, получим

$$\frac{dZ(x)}{dx} = \Phi_1(x, x) + \Phi_2(x, x) \tag{3.23}$$

$$\Phi_1(x, x) = \left[\frac{\partial\Phi(y, x)}{\partial y}\right]_{y=x}, \quad \Phi_2(x, x) = \left[\frac{\partial\Phi(y, x)}{\partial x}\right]_{y=x}$$

Продифференцируем уравнение (1.3) Φ по t и подставим $t = x$. Получим

$$\Phi_1(x, x) = k_1(x, x) + \int_0^x k_1(x, \zeta)\,\Phi(\zeta, x)\,d\zeta, \quad k_1(x, x) = \left[\frac{\partial k(t, y)}{\partial t}\right]_{t=y=x} \tag{3.24}$$

Функция $\Phi_2(x, x)$ совпадает с $\Phi_x(t, x)$; если подставить $t = x$, получим согласно первому уравнению (3.4)

$$\Phi_2(x, x) = R(x, x) \tag{3.25}$$

Подставляя уравнения (3.24) и (3.25) в уравнение (3.23), получим интегро-дифференциальное уравнение для $Z(x)$

$$\frac{dZ(x)}{dx} = k_1(x, x) + \int_0^x k_1(x, \zeta)\,\Phi(\zeta, x)\,d\zeta + R(x, x) \tag{3.26}$$

Здесь согласно второму соотношению (3.4) и формуле (3.2)

$$R(x, x) = A(x, x) + \int_0^x \Psi(\zeta, x)\,A(\zeta, x)\,d\zeta \tag{3.27}$$

$$A(x, x) = k_2(x, x) + k(x, x)\,\Phi(x, x), \quad k_2(x, x) = \left[\frac{\partial k(t, y)}{\partial y}\right]_{t=y=x}$$

4. Определим начальные условия для функций Φ, Ψ и Z, K. Начальные условия для Φ получатся из уравнения (3.22) подстановкой $x = t$

$$\Phi(t, t) = Z(t) \tag{4.1}$$

Чтобы получить начальные условия для K, вспомним уравнения (2.5) и (1.5). Подставляя в них $t = y = x$ и используя (4.1), получим

$$\Phi(x, x) = \Psi(x, x) = K(x, x, x) = Z(x) \tag{4.2}$$

Из (4.2) видно, что начальное условие для Ψ

$$\Psi(y, y) = Z(y) \tag{4.3}$$

Начальное условие для $Z(x)$ получается подстановкой $x = 0$ в соотношения (1.2) и (4.2)

$$Z(0) = k(0, 0) \tag{4.4}$$

Начальные условия для резольвенты K даны последними двумя соотношениями уравнения (2.4). Этим вопросом занимался С. Л. Соболев [6].

5. Итак, получена система интегро-дифференциальных уравнений (3.4), (3.21), (3.26) и (2.4) (первое уравнение) с начальными условиями (4.1), (4.3), (4.4) и (2.4) (два последних соотношения). Интегралы можно аппроксимировать конечной суммой и применить вычислительную технику. После определения функций Φ и Ψ из уравнений (3.4) и (3.21) функцию u можно определить уравнениями (1.8), (1.6).

Дифференциальные уравнения для Φ, Ψ, Z представляют собой полную систему, которую можно использовать для численного определения этих трех функций. Если к ней присоединить уравнения Крейна — Беллмана (2.6) и начальные условия из (2.4), то получится полная система уравнений для определения Z, Φ, Ψ и K.

Поступила 9 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крейн М. Г.* Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. Докл. АН СССР, 1955, т. 100, № 3.
2. *Bellman R.* Functional equations in the theory of dynamic programming. Proc. Amer. Math. Soc., 1957, vol. 8, No. 3.
3. *Kagiwada H., Kalaba R.* Integral equations via imbedding methods. Reading Massachusetts, Addison-Wesley Publ. Co., 1974.
4. *Соболев В. В.* Рассеяние света в атмосферах планет. М., «Наука», 1972.
5. *Fymat A. L., Kalaba R. E., Zagustin E.* Anisotropic scattering in inhomogeneous media. I. A new representation formula for the solution of the auxiliary integral equation for the source function. J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, 1975, vol. 15, No. 3.
6. *Соболев С. Л.* Успехи матем. наук, 1954, т. 9, № 3.

УДК 539.374

О ТЕОРЕМЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ДВУХЗВЕННЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

С. Неджеску-Клежа

(Румыния)

Дана постановка квазистатической краевой задачи для двухзвенных упругопластических процессов и задачи об отыскании начальных скоростей точек тела после момента излома для произвольного упругопластического процесса с изломом после простой деформации. Для упругопластических процессов с точкой излома при некоторых предположениях относительно физических функций, описывающих свойства материала, доказано, что изменение внешних нагрузок единственным образом определяет начальные скорости частиц тела, а следовательно, и угол излома траектории деформации в каждой точке. Доказана теорема единственности решения краевой задачи при нагрузках, реализующих двухзвенные упругопластические процессы. При этом в теле могут появляться как области активных деформаций, так и области разгрузки.

1. Анализ соотношений напряжения — деформации. Для двухзвенного упругопластического процесса с изломом траектории деформации на угол θ $(0<\theta<\pi)$ в момент t соотношения между тензорами напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} имеют вид [1, 2]

$$S_{ij}=\frac{2}{3}\frac{\Phi(Э_u)}{Э_u}Э_{ij},\quad t\leqslant t_0 \tag{1.1}$$

$$S_{ij}=\frac{2}{3}\frac{\sigma_u}{\sin\theta}\left[p_{ij}\sin(\theta-\vartheta)+p_{ij}{}^{\circ}\sin\vartheta\right],\quad t>t_0$$

$$\sigma=3K\varepsilon \tag{1.2}$$

Здесь

$$\sigma={}^1\!/_3\sigma_{ii},\quad S_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij},\quad \sigma_u=({}^3\!/_2S_{ij}S_{ij})^{1/2}$$

$$\varepsilon={}^1\!/_3\varepsilon_{ii},\quad Э_{ij}=\varepsilon_{ij}-\varepsilon\delta_{ij},\quad Э_u=({}^2\!/_3Э_{ij}Э_{ij})^{1/2}$$

$$p_{ij}=(Э_{ij}-Э_{ij}{}^{\circ})/(s-s^{\circ}),\quad p_{ij}{}^{\circ}=Э_{ij}{}^{\circ}/Э_u{}^{\circ},\quad Э_{ij}{}^{\circ}=Э_{ij}(t_0)$$

$$s=\begin{cases}Э_u, & t\leqslant t_0\\ s^{\circ}-s^{\circ}\cos\theta+\sqrt{Э_u{}^2-(s^{\circ}\sin\theta)^2}\,\mathrm{sign}\cos\theta, & t>t_0\end{cases}$$

$$\vartheta=\arccos\left(\mathbf{p}\,\frac{\sigma}{\sigma_u}\right)=\arccos\left(p_{ij}\frac{S_{ij}}{\sigma_u}\right)$$

$$s^{\circ}\equiv Э_u(t_0)=Э_u{}^{\circ},\quad s^{\circ}\in[\varepsilon_s,\lambda]$$