Коэффициенты c_2 и R_2 определяются из условия разрешимости уравнения (2.3) при $n = 3$

$$(2.15)\qquad i\alpha R_0 c_2 I_1 - i\alpha R_2 I_2 + \frac{\alpha_0}{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi/\alpha_0} \omega^*(y)\, e^{-i\alpha\zeta}\,[K(v_2, \varphi) + K(\varphi, v_2)]\, d\zeta dy = 0$$

Так как α удовлетворяет (2.13), то уравнение (2.15) разрешимо относительно R_2 и c_2. Аналогичным образом определяются остальные R_n и c_n.

Условие (2.13) совпадает с условиями теоремы (2.1) работы [1]. Можно сформулировать следующую теорему: почти все значения R, лежащие на нейтральной кривой задачи (1.10), (1.12), являются точками ответвления цикла для задачи (1.5), (1.7).

Автор благодарит В. В. Струминского за внимание к работе.

Поступила 9 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Юдович В. И.* Возникновение автоколебаний в жидкости. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.
2. *Юдович В. И.* Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
3. *Линь Ц. Ц.* Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
4. *Крылов А. Л.* Об устойчивости течения Пуазейля в плоском канале. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
5. *Wasov W.* Asymptotic solution of the differential equation of hydrodynamic stability in a domain containing a transition point. Ann. Math., 1953, vol. 58, No. 3, p. 222—252.
6. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
7. *Кочин Н. Е., Кибель А. И., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, ч. 2. М., Физматгиз, 1963.

УДК 539.3

СКОЛЬЖЕНИЕ ЦИЛИНДРА ПО ВЯЗКОУПРУГОМУ ОСНОВАНИЮ

Э. В. Теодорович

(Москва)

Предлагается метод решения контактной задачи о движении штампа по вязкоупругому основанию. В применении к штампу цилиндрической формы метод дает обобщение результатов, полученных для стандартного линейного тела, на случай дискретного спектра времен релаксации.

Обычно при попытках построения количественной теории трения твердых тел сила трения разбивается на деформационную и молекулярную составляющие [1]. Деформационная составляющая определяется вязкоупругими и пластическими свойствами контактирующих тел. При установившемся движении основную роль играют упругие процессы, и деформационная составляющая силы трения определяется гистерезисными потерями при передеформировании материала [1,2]. Гистерезисные явления связаны с неравновесностью процесса деформирования вязкоупругих тел, степень неравновесности процесса зависит от соотношения между характерными временами протекания релаксационных процессов в среде и временем контакта заданной точки поверхности среды с единичной неровностью. Таким образом, решение контактной задачи о скольжении штампа по вязкоупругому основанию дает возможность определить характер зависимости силы трения от скорости. В качестве конкретного примера ниже берется случай штампа цилиндрической формы, для которого исследование значительно облегчается в связи с двумерностью задачи.

Вопрос о скольжении цилиндра по вязкоупругому основанию рассматривался ранее в ряде работ в связи с задачей качения [3–6]. Основная трудность решения подобной задачи связана с тем, что при учете реологических эффектов отыскание давления не может быть осуществлено стандартными методами обращения преобразования Гильберта [7–9]. Был предложен [3] метод сведения вязкоупругой контактной задачи к упругой задаче для некоторых эффективных напряжений и деформаций, связанных с соответствующими истинными величинами линейными дифференциальными соотношениями. Этот метод использовался [6] для решения задач качения при наличии участков сцепления и проскальзывания. К сожалению, метод работы [3] не допускает обобщения на случай нескольких времен релаксации или на случай наличия особенностей поверхностных напряжений, так как приводит к расходящимся интегралам на промежуточных этапах вычислений. В работе [5] предложен метод точного решения вязкоупругой контактной задачи для ограниченного спектра времен релаксации путем приведения уравнения для давления к виду, имеющему форму преобразования Гильберта. Однако и в этом методе на промежуточных этапах вычислений приходится иметь дело с производными несобственных интегралов, представляющими собой расходящиеся выражения.

Ниже предлагается более простой и корректный способ решения контактной задачи скольжения, сводящийся к проблеме Римана — Гильберта для полуплоскости с граничными условиями смешанного типа [7–9].

1. Модель вязкоупругих свойств. В основе линейной теории вязкоупругости лежат операторные уравнения, связывающие напряжения σ и деформации ε [10]

$$\varepsilon(t) = \mathbf{J}\sigma \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} J(t - t')\,\sigma(t')\,dt' \tag{1.1}$$

Вследствие принципа причинности Фурье-образ ядра оператора упругого последействия $J(\omega)$ (комплексная податливость) аналитичен в верхней полуплоскости комплексных частот и имеет особенности только в нижней полуплоскости. Это свойство присуще любым величинам типа обобщенных восприимчивостей [11,12]. Принимая, что особенности являются полюсными, можно написать

$$J(\omega) = E_D^{-1}\left[1 + \sum_j \frac{a_j}{\omega_j - \omega}\right] \tag{1.2}$$

где $E_D = J^{-1}(\infty)$ — динамический (мгновенный) модуль упругости материала, ω_j определяют положения полюсов комплексной податливости, a_j — вычеты при полюсах. Отметим, что случаю дискретного спектра времен последействия τ_j соответствует совокупность полюсов на отрицательной мнимой оси $\omega_j = 1 / (i\tau_j)$, а случаю непрерывного спектра отвечает разрез вдоль мнимой оси. Полюсам вне мнимой оси соответствует колебательная релаксация.

При нахождении решения контактной задачи для движущегося штампа удобно перейти к сопутствующей системе отсчета, относительно которой штамп неподвижен. В предположении, что можно пренебречь инерционными эффектами и что в сопутствующей системе отсчета картина распределения напряжений и деформаций стационарная, уравнения для напряжений и деформаций будут иметь вид уравнений классической теории упругости с тем единственным различием, что вместо обратного модуля упругости в уравнение будет входить интегральный оператор нелокального взаимодействия $\mathbf{J}_x$.

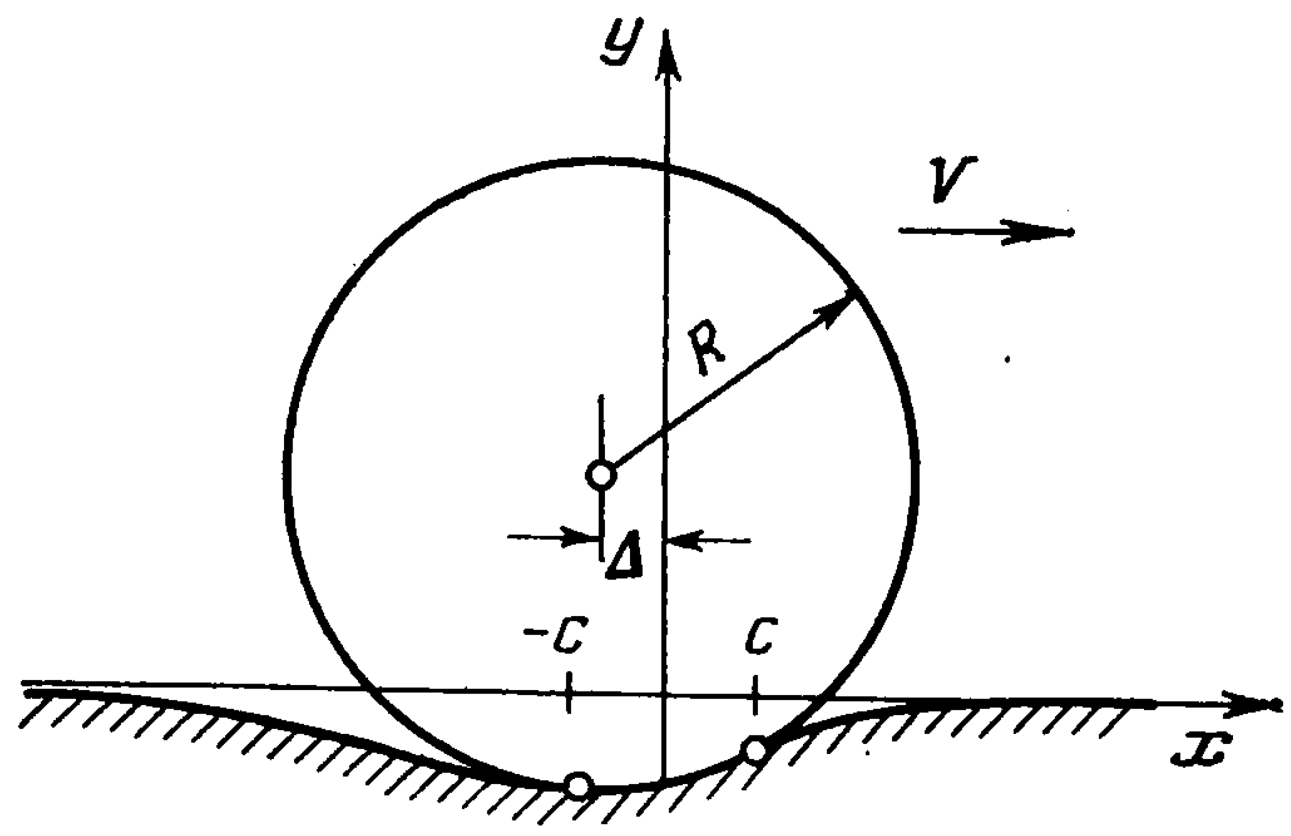
Его ядро имеет Фурье-образ $J_x(q) = J(-qV)$, где V— скорость движения среды (будем рассматривать модель среды, для которой вязкоупругие свойства при объемных и сдвиговых деформациях одинаковы, т. е. коэффициент Пуассона ν не является оператором).

Если вместо напряжений σ_{ij} ввести эффективные напряжения $\sigma_{ij}{}^*$ согласно соотношению

$$E_D{}^{-1}\sigma_{ij}{}^* = \mathbf{J}_x\sigma_{ij} \tag{1.3}$$

то для эффективных напряжений будут иметь место уравнения обычной (локальной) теории упругости. В применении к рассматриваемому случаю контактной задачи усложняющим будет то обстоятельство, что эффективное давление оказывается отличным от нуля не только в области контакта, но и вне ее.

2. Решение контактной задачи. Рассматриваемая система изображена на фигуре. Поверхность недеформированной среды определяется условием $y = 0$, границам области контакта соответствуют точки $(\pm c, 0)$. Параметр Δ определяет положение центральной оси цилиндра относительно середины области контакта. Смещения точек среды задаются двумерным вектором $\mathbf{u}(x, y) = \{u_x(x, y), u_y(x, y)\}$.



При отсутствии трения проблема нахождения давления сводится к задаче линейного сопряжения Римана — Гильберта по определению аналитической в нижней полуплоскости комплексной переменной функции

$$w(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p^*(t)\,dt}{t-z} \qquad (z = x + iy)$$

Для нее в области контакта задана определяемая формой штампа вещественная часть, а вне области контакта задана мнимая часть, определяемая эффективным давлением в этой области [9]. Согласно формулам (1.1), (1.3) и обращению Фурье формулы (1.2) вне области контакта имеем

$$p^*(x) = \sigma_{yy}(x, 0) = \begin{cases} 0, & x > c \\ i \sum_j \frac{a_j}{V} p_j \exp\left(\frac{i\omega_j x}{V}\right), & x < -c \end{cases} \tag{2.1}$$

$$p_j = \int_{-c}^{+c} p(x) \exp\left(-\frac{i\omega_j x}{V}\right) dx = p\left(\frac{\omega_j}{V}\right)$$

где p_j — Фурье-образ давления, аналитически продолженный в точку ω_j/V. Возможность аналитического продолжения вытекает из требования интегрируемости $p(x)$ в области контакта.

Используя стандартные методы решения задачи сопряжения [8, 9] и учитывая условие $\partial u_y/\partial x = (x + \Delta)/R$ в области контакта, получаем для эффективного давления при $|x| < c$

$$p^*(x) = \frac{E_D}{4(1-\nu^2)R} \frac{c^2 - 2x(x+\Delta)}{\sqrt{c^2 - x^2}} + \frac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{-c} \frac{p^*(t)\sqrt{t^2 - c^2}}{t - x} dt + \frac{A}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}}$$

Из требования ограниченности деформаций $\partial u_y/\partial x$ в точках $x = \pm(c + 0)$ можно определить постоянные A и Δ, в результате чего формулы для p^* и Δ примут вид

$$p^*(x) = \sqrt{c^2 - x^2}\left[\frac{E_D}{2(1-\nu^2)R} - \frac{1}{\pi}\int_{\infty}^{-c} \frac{p^*(t)}{\sqrt{t^2 - c^2}\,(t - x)} dt\right] \tag{2.2}$$

$$\Delta = \frac{2(1-\nu^2)R}{\pi E_D} \int_{-\infty}^{-c} \frac{p^*(x)\,dx}{\sqrt{x^2 - c^2}} \tag{2.3}$$

Для определения входящих в формулы (2.2), (2.3) неизвестных параметров c, p_j вычислим Фурье-образ эффективного давления. Соответствующий расчет с учетом формул (2.1), (2.2) дает

$$p^*(q) = \int_{-\infty}^{\infty} p^*(x)\, e^{-iqx} dx = \frac{\pi E_D c}{2(1-\nu^2)R}\,\frac{I_1(iqc)}{iq} -$$
$$- ic \sum_j \frac{\omega_j a_j p_j}{V(qV-\omega_j)} \left[I_1(iqc)\, K_0\left(\frac{i\omega_j c}{V}\right) + I_0(iqc)\, K_1\left(\frac{i\omega_j c}{V}\right)\right]$$

где $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$ — функции Бесселя первого и третьего рода от мнимых аргументов [13].

С другой стороны, из определения (1.3) и теоремы о свертке следует

$$p^*(q) = E_D J(qV) p(q) \tag{2.4}$$

Комплексная податливость имеет нули в точках $\overline{\omega}_k$, где комплексный модуль $E(\omega) = J^{-1}(\omega)$ имеет полюса. Положения полюсов комплексного модуля определяются из опытов на релаксацию и принимаются известными. Из формулы (2.4) следует, что в точках $q = \overline{\omega}_k/V$ аналитическое продолжение Фурье-образа $p^*(q)$ равно нулю. Тем самым приходим к системе линейных уравнений $p^*(\overline{\omega}_k/V) = 0$ для определения p_j. Эту систему удобно записать в виде

$$\sum_j A_{kj} p_j = B_k \tag{2.5}$$
$$A_{kj} = \frac{ic}{V}\frac{\omega_j a_j}{\overline{\omega}_k - \omega_j}\left[I_1\left(\frac{i\overline{\omega}_k c}{V}\right) K_0\left(\frac{i\omega_j c}{V}\right) + I_0\left(\frac{i\overline{\omega}_k c}{V}\right) K_1\left(\frac{i\omega_j c}{V}\right)\right]$$
$$B_k = \frac{\pi E_D c}{2(1-\nu^2)R}\,\frac{V}{i\overline{\omega}_k}\, I_1\left(\frac{i\overline{\omega}_k c}{V}\right)$$

Уравнение, определяющее параметр c, можно получить из требования, что полное давление на контакте равно заданной величине F_y.

$$F_y = \int_{-c}^{+c} p(x)\,dx = p(q)\big|_{q=0} = \left.\frac{p^*(q)}{E_D J(qV)}\right|_{q=0} = \frac{E_S}{E_D}\, p^*(0) \tag{2.6}$$

где $E_S = J^{-1}(0)$ - статический (длительный) модуль упругости.

Определяющая сопротивление скольжению касательная составляющая внешней силы также может быть выражена через $p(q)$

$$F_x = \int_{-c}^{+c} p(x)\frac{\partial u_y}{\partial x}\,dx = \int_{-c}^{+c} \frac{x+\Delta}{R}\, p(x)\,dx = \frac{1}{R}\left[i\,\frac{\partial p(q)}{\partial q} + \Delta\cdot p(q)\right]_{q=0}$$

Используя формулы (1.2), (2.1), (2.3), (2.4) получим для коэффициента трения

$$f = \frac{F_x}{F_y} = \frac{1}{R}\,\frac{E_S}{E_D}\left\{ \frac{1}{2}\left[\frac{4(1-\nu^2)R}{\pi E_S} - \frac{c^2}{F_y}\right] \times \right.$$
$$\left. \times\, i \sum_j \frac{a_j}{V} p_j K_0\left(\frac{i\omega_j c}{V}\right) - iV \sum_j \frac{a_j}{\omega_j^2} - \frac{c}{F_y}\sum_j \frac{a_j}{\omega_j} p_j K_1\left(\frac{i\omega_j c}{V}\right)\right\}$$

Функция распределения давления $p(x)$ может быть найдена по функции $p(q) = p^*(q) E_D^{-1} J^{-1}(qV)$ при помощи обращения преобразования Фурье, однако соответствующий интеграл в элементарных или табулированных функциях не вычисляется и в случае необходимости может быть найден только численно.

3. Случай стандартного линейного тела. В случае стандартного линейного тела реологические свойства вещества характеризуются двумя параметрами, в качестве которых можно взять время последействия τ_P и время релаксации τ_R. В написанных выше уравнениях для перехода к стандартному линейному телу следует положить

$$\omega_j = 1/(i\tau_P), \ \overline{\omega}_k = 1/(i\tau_R)$$

При этом другие реологические параметры материала определяются через характерные времена при помощи соотношений

$$E_D/E_S = \tau_P/\tau_R, \ a_j = 1/(i\tau_R) - 1/(i\tau_P)$$

Уравнение (2.5) дает

$$p\left(\frac{1}{i\tau_P V}\right) = \frac{\pi E_D}{2(1-\nu^2)R}(\tau_P V)(\tau_R V) I_1\left(\frac{c}{\tau_R V}\right) K_1\left(\frac{c}{\tau_P V}\right) \times \left[I_1\left(\frac{c}{\tau_R V}\right) K_0\left(\frac{c}{\tau_P V}\right) + I_0\left(\frac{c}{\tau_R V}\right) K_1\left(\frac{c}{\tau_P V}\right)\right]^{-1} \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в (2.5), получим уравнение для определения размеров контактной области

$$F_y - \frac{\pi E_S c^2}{4(1-\nu^2)R} = \frac{\pi E_S c(\tau_P - \tau_R)V}{2(1-\nu^2)R} \times I_1\left(\frac{c}{\tau_R V}\right) K_1\left(\frac{c}{\tau_P V}\right)\left[I_1\left(\frac{c}{\tau_R V}\right) K_0\left(\frac{c}{\tau_P V}\right) + I_0\left(\frac{c}{\tau_R V}\right) K_1\left(\frac{c}{\tau_P V}\right)\right]^{-1} \tag{3.2}$$

Формула (3.2) с точностью до обозначений совпадает с соответствующими формулами в работах [3, 6].

4. Заключение. В предлагаемом методе отыскания решения вязкоупругой контактной задачи скольжения представляющие непосредственный физический интерес величины (размеры и положение контактной области, коэффициент трения) определяются по формулам, имеющим простую алгебраическую структуру, для их вычисления нет необходимости в проведении численного интегрирования, как это имеет место в методе работы [5]. Без каких-либо изменений данный метод можно применять к случаю колебательной релаксации, которая частично учитывает инерционные свойства вязкоупругой среды.

Конкретный числовой расчет коэффициента трения показывает, что полученный в работе [3] общий характер зависимости коэффициента трения от скорости с одним максимумом сохраняется и для случая спектра характерных времен. При малых скоростях сила сопротивления определяется только наибольшим из времен последействия, однако вблизи максимума и при больших скоростях существенными оказываются члены формулы (1.3), соответствующие меньшим временам последействия. В этой области модель стандартного линейного тела не является хорошим приближением при исследовании зависимости коэффициента трения от скорости.

Поступила 3 I 77

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крагельский И. В.* Трение и износ. М., «Машиностроение», 1968.
2. *Боуден Ф. П., Тейбор Д.* Трение и смазка твердых тел. М., «Машиностроение», 1968.
3. *Hunter S. C.* The rolling contact of a rigid cylinder with a viscoelastic half space. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1961, vol. 28, No. 4.
4. *Morland L. W.* A plane problem of rolling contact in linear viscoelastic theory. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1962, vol. 29E, No. 245.
5. *Morland L. W.* Exact solutions of rolling contact between viscoelastic cylinders. Quart. Appl. Math., 1967, vol. 20, No. 1.
6. *Горячева И. Г.* Контактная задача качения вязкоупругого цилиндра по основанию из того же материала. ППМ, 1973, т. 37, вып. 5.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
9. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.

10. *Бленд Д. Р.* Теория линейной вязкоупругости. М., «Мир», 1965.
11. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
12. *Зубарев Д. Н.* Неравновесная статистическая термодинамика. М., «Наука», 1971.
13. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. М., Изд-во иностр. лит., 1949.

УДК 539.3

НОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И МЕТОД РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА

Е. А. Загустина, Р. Е. Калаба
(США)

Показано, что решение интегрального уравнения Фредгольма

$$u(t,x)=g(t)+\int_0^x k(t,y)\,u(y,x)\,dy,\quad 0\leqslant t\leqslant x\leqslant X \tag{0.1}$$

можно выразить через две функции $\Phi=\Phi(t,x)$ и $\Psi=\Psi(y,x)$, каждая из которых зависит только от двух аргументов. Получена полная система Коши для этих двух функций и для третьей вспомогательной функции $Z=Z(x)$.

Более двадцати лет назад М. Г. Крейн [1] вывел уравнение в частных производных для резольвенты Фредгольма. Несколько лет спустя это уравнение было независимо получено Беллманом [2] на основании вариационного принципа.

Цель данной работы — вывести полную систему дифференциальных уравнений, одной из которых служит уравнение Крейна — Беллмана, в затем получить представление решения интегрального уравнения Фредгольма с использованием функций $\Phi=\Phi(t,x)$ и $\Psi=\Psi(y,x)$ вместо резольвенты, содержащей три аргумента.

Сведение интегральных уравнений Фредгольма к системе Коши подробно описано в книге [3]. Идеи данной работы представляют собой развитие идей В. В. Соболева [4].

1. Введя резольвенту K, решение уравнения (0.1) можно представить в виде

$$u(t,x)=g(t)+\int_0^x K(t,y,x)\,g(y)\,dy,\quad 0\leqslant t\leqslant x \tag{1.1}$$

Резольвента K удовлетворяет интегральному уравнению

$$K(w,y,x)=k(w,y)+\int_0^x K(w,\zeta,x)\,k(\zeta,y)\,d\zeta,\quad 0\leqslant w,y\leqslant x\leqslant X \tag{1.2}$$

Введем вспомогательную функцию Φ как решение интегрального уравнения

$$\Phi(t,x)=k(t,x)+\int_0^x k(t,y)\,\Phi(y,x)\,dy,\quad 0\leqslant t\leqslant x\leqslant X \tag{1.3}$$

Сравнивая уравнение (1.3) с интегральным уравнением для u_x, получающимся дифференцированием (0.1) по x, и используя их линейность, имеем

$$u_x(t,x)=\Phi(t,x)\,u(x,x) \tag{1.4}$$

Определяем новую функцию Ψ так:

$$\Psi(y,x)=K(x,y,x),\quad 0\leqslant y\leqslant x\leqslant X \tag{1.5}$$