Доказательство для случая, когда в точке M_0 граница области устойчивости опасна, аналогично.

Пример. Рассмотрим систему

$$dx / dt = y, \quad dy / dt = -x + dy + b_{21}x^2y + b_{03}y^3$$

Для нее $\alpha_3 = {}^1/_4\,\pi c$, $c = -(b_{21} + 3\,b_{03})$, т. е. $\alpha_3 < 0$ при $c > 0$. Поэтому граница устойчивости, точки которой удовлетворяют условиям $d = 0$ и $c > 0$, безопасна. Применяя метод Магнуса, получим линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + \bar{a}^* y, \quad \bar{a}^* = d + \frac{1}{4} cA^2$$

Для нее имеем

$$\frac{dR}{dA} = \frac{d}{dA}\left(d + \frac{1}{4}\,cA^2\right) = \frac{1}{2}\,cA > 0$$

так как $c > 0$ по допущению. Условия теоремы выполнены.

За приближенное значение амплитуды можно принять $A = \sqrt{4\,|\,d\,/\,c\,|}$.

Поступила 9 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Magnus K.* Ein Beitrag zur Berechnung nihtlinear Schwingungs und Regelungs Systeme. Z. angew. Math. und Mech., 1955, Bd 31, H. 10.
2. *Баутин Н. Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости Л.— М., Гостехиздат, 1949.

УДК 532.516

ВТОРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Б. Ю. Скобелев

(Новосибирск)

Рассматривается возникновение вторичных автоколебательных режимов, ответвляющихся от течения Пуазейля в плоском канале.

Ранее [1, 2] были получены условия появления вторичных автоколебательных режимов при значениях числа Рейнольдса, близких к критическому. В частности, было показано, что существование вторичных течений устанавливается на основе анализа только лишь линеаризованных уравнений.

В данной работе возникновение периодических по x и t вторичных течений в плоском канале изучено с помощью асимптотических решений уравнения Орра — Зоммерфельда.

Доказывается, что в достаточно малых окрестностях почти всех значений числа Рейнольдса R, лежащих на нейтральной кривой линейной теории устойчивости, существуют такие значения R, при которых уравнения Навье — Стокса имеют периодические по x и t решения.

1. Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском безграничном канале. Выберем систему координат так, чтобы ось x совпала с осью канала, y-координаты стенок были равны $+1$ и -1.

Безразмерное уравнение для функции тока ψ имеет вид

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} - \frac{1}{R}\Delta^2\psi = 0 \tag{1.1}$$

В (1.1) в качестве характерной скорости выбрана средняя по расходу скорость.

Функция тока должна удовлетворять граничным условиям

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=0 \quad \text{при } y=\pm 1 \tag{1.2}$$

При достаточно малых значениях R задача (1.1), (1.2) имеет единственное стационарное решение $\psi_0(y)$, такое, что

$$d\psi_0/dy = U(y) \equiv {}^3/_2\,(1-y^2) \tag{1.3}$$

Будем искать решения, отличные от (1.3) и периодические по x и t. Положим $\zeta = x - ct$ и представим функцию тока в виде

$$\psi = \psi_0(y) + \frac{1}{R}\,\Phi(\zeta, y) \tag{1.4}$$

где $\Phi(\zeta, y)$ периодична по ζ с периодом $2\pi/\alpha_0$. Подставляя (1.4) в (1.1), (1.2), получим

$$R\left[(U-c)\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial\zeta}-U''\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right]-\overline{\Delta}^2\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\frac{\partial\overline{\Delta}\Phi}{\partial y}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\overline{\Delta}\Phi}{\partial\zeta}, \quad \overline{\Delta}=\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right) \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}=0 \quad \text{при } y=\pm 1 \tag{1.6}$$

Так как Φ — периодическая функция ζ, а расход жидкости через поперечное сечение канала можно считать постоянным, то (1.6) можно заменить следующими граничными условиями:

$$\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=0 \quad \text{при } y=\pm 1 \tag{1.7}$$

Рассмотрим линеаризованную задачу

$$R\left[(U-c)\frac{\partial\overline{\Delta}\varphi}{\partial\zeta}-U''\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right]-\overline{\Delta}^2\varphi=0 \tag{1.8}$$

где φ должна быть периодической по ζ с периодом $2\pi/\alpha_0$ и удовлетворять условиям (1.7). Краевая задача (1.8), (1.7) имеет решения вида

$$\varphi = f(y)e^{i\alpha\zeta} + f^*(y)e^{-i\alpha\zeta}, \qquad \alpha = k\alpha_0 \tag{1.9}$$

где $f(y)$ — решение краевой задачи для уравнения Орра — Зоммерфельда

$$i\alpha R\left[(U-c)\left(\frac{d^2}{dy^2}-\alpha^2\right)f-U''f\right]-\left(\frac{d^2}{dy^2}-\alpha^2\right)^2 f=0 \tag{1.10}$$

$$f(\pm 1) = f'(\pm 1) = 0 \tag{1.11}$$

Так как задача (1.10), (1.11) симметрична относительно y, то ее можно решать отдельно для четных и нечетных функций $f(y)$. Для нахождения четных собственных функций условия (1.11) можно заменить на следующие:

$$f(-1)=f'(-1)=f'(0)=f'''(0)=0 \tag{1.12}$$

Значения $R = R_0(\alpha)$ и $c = c_0(\alpha)$, при которых задача (1.10), (1.12) имеет нетривиальные решения, находятся из уравнения

$$D_{\text{I}}(\alpha, R, c) = 0 \tag{1.13}$$

где $D_{\text{I}}(\alpha, Rc)$ — характеристический определитель задачи (1.10), (1.12).

Согласно [3] существует решение уравнения (1.13) $R_0(\alpha)$, описывающее в плоскости (α, R) кривую, называемую нейтральной, такое, что при значениях α, R, принадлежащих этой кривой, существует действительное собственное значение $c = c_0(\alpha, R_0)$ задачи (1.10), (1.12).

Рассмотрим задачу (1.10), (1.12) при значениях параметров, лежащих на верхней ветви нейтральной кривой и таких, что (см. [3])

$$\alpha \to 0, \quad R_0 = O(\alpha^{-11}), \quad c_0 = O(\alpha^2) \tag{1.14}$$

В [4] доказано, что в этой области значений параметров применимы асимптотические решения уравнения Орра — Зоммерфельда для нахождения собственных значений задачи.

Фундаментальную систему решений уравнения (1.10) можно составить из двух «гладких» решений, близких при $\alpha R \to \infty$ к решениям вырожденного уравнения, и из двух решений типа пограничного слоя. В качестве двух линейно-независимых решений вырожденного уравнения возьмем решения, полученные Гейзенбергом (см. [3]).

Используя асимптотические решения, полученные в [5], можно показать, что фундаментальная система решений (1.10) может быть записана в виде

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^m}{dy^m}\varphi_1(y) = \frac{d^m}{dy^m}\varphi_1^{(0)}(y) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) + O(\alpha^2c^3P_m)\\
&\frac{d^m}{dy^m}\varphi_2(y) = \frac{d^m}{dy^m}\varphi_2^{(0)}(y) + O\left(\frac{1}{\lambda^2 c}\right) + P_m\\
&\frac{d^m}{dy^m}\varphi_3(y) = \frac{d^m}{dy^m}(U-c)^{-5/4}e^{-\lambda Q}\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda Q}\right)\right]\\
&\frac{d^m}{dy^m}\varphi_4(y) = \frac{d^m}{dy^m}(U-c)^{-5/4}e^{\lambda Q}\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda Q}\right)\right]\\
&m = 0, 1, 2, 3, \quad \lambda = \sqrt{\alpha R}, \quad P_0 = O(\lambda^{-2}z^{-2}), \quad P_1 = O(\lambda^{-1/4}z^{-2})\\
&P_2 = o(z^{-1}), \quad P_3 = o(z^{-2}), \quad z = \left(1 - \frac{2}{3}c\right)^{-1/2}(y - y_c)\\
&y_c = -\left(1 - \frac{2}{3}c\right)^{1/2}, \quad Q = \int\limits_{y_c}^{y}\sqrt{i(U-c)}\,dy
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

(если $|z| \geqslant z_0 > 0$, то $P_m = O(\lambda^{-2})$; $\varphi_1^{(0)}$, $\varphi_2^{(0)}$ — решения вырожденного уравнения

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{1,2}^{(0)} = (U-c)\left(q_{1,2}^{(0)} + \alpha^2 q_{1,2}^{(1)} + \ldots\right)\\
&q_1^{(0)} = 1, \quad q_2^{(0)} = \int\limits_{-1}^{y}(U-c)^{-2}dy, \quad q_{1,2}^{(n+1)} = \int\limits_{-1}^{y}(U-c)^{-2}dy\int\limits_{-1}^{y}(U-c)^2 q_{1,2}^{(n)}dy
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

Как было показано в [4], существуют два четных линейно-независимых решения: гладкое f_1 и погранслойное f_2 (p — любое положительное число)

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^m}{dy^m}f_1 = \frac{d^m}{dy^m}\left(\varphi_1^{(0)} - k\varphi_2^{(0)}\right) + O(\alpha^2P_m) + O\left(\frac{\alpha^2}{\lambda^2 c}\right)\\
&k = \alpha^2\int\limits_{-1}^{0}(U-c)^2dy\,[1 + O(\alpha^2)]
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

$$
\frac{d^m}{dy^m}f_2 = \frac{d^m}{dy^m}\varphi_3 + O(\lambda^{-p}), \quad m = 0, 1, 2, 3 \tag{1.18}
$$

Собственной функцией задачи (1.10), (1.12) является линейная комбинация решений (1.17), (1.18), удовлетворяющая первым двум условиям (1.12). Заданному собственному значению соответствует одна собственная функция.

Докажем, что в области (1.14) задача (1.10), (1.12) не имеет присоединенных функций. Для этого нужно показать, что

$$
\int\limits_{-1}^{1}\omega^*\left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2\right)f\,dy = 2\int\limits_{-1}^{0}\omega^*\left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2\right)f\,dy \neq 0 \tag{1.19}
$$

где ω — решение задачи, сопряженной к задаче (1.10), (1.12). Функция ω^* удовлетворяет уравнению

$$iaR\left[(U-c)\left(\frac{d^2}{dy^2}-\alpha^2\right)\omega^*+2U'\frac{d\omega^*}{dy}\right]-\left(\frac{d^2}{dy^2}-\alpha^2\right)^2\omega^*=0 \tag{1.20}$$

и граничным условиям (1.12).

Так как ω^* и f — аналитические функции, то путь интегрирования в (1.19) можно сместить в комплексную плоскость y

$$\int_{-1}^{0}\omega^*\left(\frac{d^2}{dy^2}-\alpha^2\right)f\,dy=\int_{\Gamma}\omega^*\left(\frac{d^2}{dy^2}-\alpha^2\right)f\,dy \tag{1.21}$$

$$\Gamma=\{y;|\,y+{}^1/_2\,|={}^1/_2,\ \mathrm{Im}\,y\leqslant 0\}$$

Асимптотические выражения (1.15) справедливы на полуокружности Γ [5].

Решения уравнения (1.20) можно выразить через решения уравнения (1.10) (см. [6]). Используя (1.15), можно показать, что фундаментальная система решений (1.20) представима в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{d^n}{dy^n}\chi_1(y)=\frac{d^n}{dy^n}\frac{\varphi_1^{(0)}}{(U-c)}[1+O(\xi^{-1})]+O\left(\frac{1}{\xi^{2-n}}\right)\\
&\frac{d^n}{dy^n}\chi_2(y)=\frac{d^n}{dy^n}\frac{\varphi_2^{(0)}}{(U-c)}[1+O(\xi^{-1})]+O\left(\frac{1}{c\xi^{2-n}}\right)\\
&\frac{d^n}{dy^n}\chi_3(y)=\frac{d^n}{dy^n}(U-c)^{-1/4}e^{-\lambda Q}[1+O(\xi^{-1})]\\
&\frac{d^n}{dy^n}\chi_4(y)=\frac{d^n}{dy^n}(U-c)^{-1/4}e^{\lambda Q}[1+O(\xi^{-1})]\\
&n=0,1;\ \xi=\lambda Q
\end{aligned} \tag{1.22}$$

В формулах (1.22) оценки написаны для y, лежащих на кривой Γ.

Собственные функции f и ω^* можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&f=\frac{1}{f_2'(-1)}f_2(y)-\frac{1}{f_1'(-1)}f_1(y)\\
&\omega^*=\frac{1}{\omega_2^{*\prime}(-1)}\omega_2^*(y)-\frac{1}{\omega_1^{*\prime}(-1)}\omega_1^*(y)
\end{aligned} \tag{1.23}$$

где $f_1(y)$, $f_2(y)$, заданы выражениями (1.17), (1.18), $\omega_1^*(y)$ — четное гладкое решение уравнения (1.20)

$$\frac{d^n}{dy^n}\omega_1^*(y)=\frac{d^n}{dy^n}\left\{\frac{\varphi_1^{(0)}}{U-c}[1+O(\xi^{-1})]-\right.$$
$$\left.-k\frac{\varphi_2^{(0)}}{U-c}[1+O(\xi^{-1})]\right\}+O\left(\frac{1}{\xi^{2-n}}\right)$$

$n=0,1$; p — любое положительное число, $\omega_2^*(y)$ — четное погранслойное решение

$$\omega_2^*(y)=\chi_3(y)+O(\lambda^{-p})$$

Подставляя (1.23) в (1.21), можно показать, что

$$\int_{-1}^{1}\omega^*\left(\frac{d^2}{dy^2}-\alpha^2\right)f\,dy=2\int_{\Gamma}\omega^*\left(\frac{d^2}{dy^2}-\alpha^2\right)f\,dy=\frac{2}{3}c\,[1+O(\alpha^2)] \tag{1.24}$$

При выводе оценки интеграла были использованы соотношения (1.14).

В области нейтральной кривой, удовлетворяющей условиям (1.14), кратность собственных значений задачи (1.10), (1.12) равна единице.

Для нахождения нечетных собственных функций условия (1.11) можно заменить на следующие:

(1.25) $$f(-1) = f'(-1) = f(0) = f''(0) = 0$$

Пусть $D_2(\alpha, R, c)$ — характеристический определитель задачи (1.10), (1.25).

Если воспользоваться асимптотическими выражениями для $D_1(\alpha, R, c)$ и $D_2(\alpha, R, c)$ (см. [7]), то можно показать, что при α и R, лежащих на верхней ветви нейтральной кривой в области (1.14) и значениях c, удовлетворяющих уравнению (1.13), $D_2(\alpha, R, C) \neq 0$. Следовательно, в области нейтральной кривой (1.14) кратность собственного значения задачи (1.10), (1.11) равна единице. Кратность собственного значения $c = c(\alpha, R)$ совпадает с кратностью нуля характеристического определителя в точке $c = c(\alpha, R)$.

Пусть $D(\alpha, R, c)$ — характеристический определитель задачи (1.10), (1.11). Собственные значения кратности, большей чем единица, должны удовлетворять системе уравнений

(1.26) $$D(\alpha, R, c) = 0, \quad \partial D(\alpha, R, c)/\partial C = 0$$

Система (1.26) эквивалентна системе из четырех действительных уравнений для определения трех действительных неизвестных: α, R, c. Как было доказано, существует область кривой, определяемой первым уравнением системы (1.26), на которой $\partial D / \partial C \neq 0$.

Используя аналитичность $D(\alpha, R, c)$ по α, R, c, можно показать, что система (1.26) может иметь решения лишь в отдельных точках нейтральной кривой. Справедлива следующая лемма: задача Орра — Зоммерфельда для течения Пуазейля имеет простые собственные значения почти всюду на нейтральной кривой.

2. Рассмотрим задачу (1.5), (1.7). Малые решения будем искать в виде [2] ($\varepsilon > 0$— амплитуда решения)

(2.1) $$\Phi(\zeta, y) = \varepsilon\varphi(\zeta, y) + v(\zeta, y), \quad \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi/\alpha} e^{-i\alpha\zeta} v \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2\right)\omega^* d\zeta dy = 0$$

решение линеаризованной задачи $\varphi(\zeta, y)$ имеет вид (1.9), а $\omega^*(y)$ — решение задачи (1.20), (1.11).

Положим

(2.2) $$v = \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^n v_n, \quad R = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n R_n, \quad Rc = R_0 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n c_n$$

Подставляя (2.2) в (1.5), получим для v_n бесконечную систему уравнений

(2.3) $$R_0\left[(U - c_0)\frac{\partial\overline{\Delta} v_n}{\partial\zeta} - U''\frac{\partial v_n}{\partial\zeta}\right] - \overline{\Delta}^2 v_n = R_0 \sum_{l=1}^{n-2} c_l \frac{\partial\overline{\Delta} v_{n-l}}{\partial\zeta} -$$
$$- \sum_{l=1}^{n-2} R_l \left(U\frac{\partial\overline{\Delta} v_{n-l}}{\partial\zeta} - U''\frac{\partial v_{n-l}}{\partial\zeta}\right) + \sum_{l=2}^{n-1} K(v_l, v_{n-l}) + \delta_{n2} K(\varphi, \varphi) +$$
$$+ K(v_{n-1}, \varphi) + K(\varphi, v_{n-1}) + R_0 c_{n-1}\frac{\partial\overline{\Delta}\varphi}{\partial\zeta} - R_{n-1}\left(U\frac{\partial\overline{\Delta}\varphi}{\partial\zeta} - U''\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)$$
$$K(u, v) = \frac{\partial u}{\partial\zeta}\frac{\partial\overline{\Delta} v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\Delta v}{\partial\zeta}, \quad \delta_{ni} = \begin{cases}1, & n = i\\ 0, & n \neq i\end{cases}$$

Функции v_n должны удовлетворять граничным условиям (1.7) и быть периодическими с периодом $2\pi / \alpha$ по ζ.

Коэффициенты R_0 и c_0 определяются из уравнения

(2.4) $$D(\alpha, R_0, c_0) = 0$$

Величины R_n и c_n при $n \geqslant 1$ находятся из условий разрешимости уравнений (2.3).

Обозначим через Z_1 множество тех значений α, при которых $D(\alpha, R_0, c_0)$ имеет нуль порядка выше первого. В силу сформулированной леммы множество Z_1 не более чем счетно.

Пусть Z_2 — множество таких α, что одновременно с (2.4) удовлетворяются уравнения

$$D(m\alpha, R_0, c_0) = 0, \quad m = 2, 3, \ldots \tag{2.5}$$

хотя бы при одном значении m. Можно показать, что Z_2 не более чем счетно.

В дальнейшем будем предполагать, что

$$\alpha \overline{\in} Z_1 \cup Z_2 \tag{2.6}$$

Рассмотрим уравнение (2.3) при $n = 2$. Так как α удовлетворяет (2.6), то условие его разрешимости можно записать в виде

$$R_0 c_1 - R_1 I_2 / I_1 = 0$$
$$I_1 = \int_{-1}^{1} \omega^* \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2\right) f dy, \quad I_2 = \int_{-1}^{1} \omega^* \left[U \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2\right) f - U'' f\right] dy \tag{2.7}$$

Найдем значение I_2 / I_1 при α, R_0, лежащих на верхней ветви нейтральной кривой в области (1.14). Из уравнения Орра — Зоммерфельда получим

$$\frac{I_2}{I_1} = c_0 + \frac{1}{i\alpha R_0 I_1} \int_{-1}^{1} \omega^* \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2\right)^2 f dy \tag{2.8}$$

Воспользовавшись асимптотиками (1.23) для f и ω^*, получим

$$\int_{-1}^{1} \omega^* \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2\right)^2 f dy = - e^{-i\pi/4} \sqrt{\alpha R_0 c_0}\, [1 + O(\alpha^{-1/2} R_0^{-1/2} c_0^{-3/2})] \tag{2.9}$$

Подставив (2.9), (1.24) в правую часть (2.8), найдем

$$\operatorname{Im} \frac{I_2}{I_1} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha R_0 c_0}} [1 + O(\alpha^2)] \neq 0 \tag{2.10}$$

Докажем теперь, что $\operatorname{Im}(I_1 / I_2)$ может обращаться в нуль лишь в отдельных точках нейтральной кривой.

Будем рассуждать от противного. Предположим, что равенство

$$\operatorname{Im}(I_2 / I_1) = 0 \tag{2.11}$$

имеет место в некоторой области нейтральной кривой. Можно показать, что (2.11) эквивалентно уравнению

$$M(\alpha, R_0, c_0) = 0 \tag{2.12}$$

где $M(\alpha, R_0, c_0)$ — действительная аналитическая функция α, R_0, c_0.

Тогда, в силу аналитичности $D(\alpha, R_0, c_0)$ и $M(\alpha, R_0, c_0)$, равенство (2.11) будет выполняться на всей нейтральной кривой, что противоречит (2.10).

Пусть Z_3 — множество тех α, при которых выполняется (2.11).

В дальнейшем будем предполагать, что

$$\alpha \overline{\in} Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3 \tag{2.13}$$

Тогда из уравнения (2.7) получаем, что $c_1 = R_1 = 0$.

Функция v_2 имеет вид

$$v_2(\zeta, y) = v_{20}(y) + v_{22}(y)\, e^{2i\alpha\zeta} + v_{22}^*(y)\, e^{-2i\alpha\zeta} \tag{2.14}$$

Коэффициенты c_2 и R_2 определяются из условия разрешимости уравнения (2.3) при $n = 3$

$$iaR_0c_2I_1 - iaR_2I_2 + \frac{\alpha_0}{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi/\alpha_0}\omega^*(y)\,e^{-i\alpha\zeta}\,[K(v_2, \varphi) + K(\varphi, v_2)]\,d\zeta dy = 0 \tag{2.15}$$

Так как α удовлетворяет (2.13), то уравнение (2.15) разрешимо относительно R_2 и c_2. Аналогичным образом определяются остальные R_n и c_n.

Условие (2.13) совпадает с условиями теоремы (2.1) работы [1]. Можно сформулировать следующую теорему: почти все значения R, лежащие на нейтральной кривой задачи (1.10), (1.12), являются точками ответвления цикла для задачи (1.5), (1.7).

Автор благодарит В. В. Струминского за внимание к работе.

Поступила 9 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Юдович В. И.* Возникновение автоколебаний в жидкости. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.
2. *Юдович В. И.* Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
3. *Линь Ц. Ц.* Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
4. *Крылов А. Л.* Об устойчивости течения Пуазейля в плоском канале. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
5. *Wasov W.* Asymptotic solution of the differential equation of hydrodynamic stability in a domain containing a transition point. Ann. Math., 1953, vol. 58, No. 3, p. 222—252.
6. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
7. *Кочин Н. Е., Кибель А. И., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, ч. 2. М., Физматгиз, 1963.

УДК 539.3

СКОЛЬЖЕНИЕ ЦИЛИНДРА ПО ВЯЗКОУПРУГОМУ ОСНОВАНИЮ

Э. В. Теодорович

(Москва)

Предлагается метод решения контактной задачи о движении штампа по вязкоупругому основанию. В применении к штампу цилиндрической формы метод дает обобщение результатов, полученных для стандартного линейного тела, на случай дискретного спектра времен релаксации.

Обычно при попытках построения количественной теории трения твердых тел сила трения разбивается на деформационную и молекулярную составляющие [1]. Деформационная составляющая определяется вязкоупругими и пластическими свойствами контактирующих тел. При установившемся движении основную роль играют упругие процессы, и деформационная составляющая силы трения определяется гистерезисными потерями при передеформировании материала [1,2]. Гистерезисные явления связаны с неравновесностью процесса деформирования вязкоупругих тел, степень неравновесности процесса зависит от соотношения между характерными временами протекания релаксационных процессов в среде и временем контакта заданной точки поверхности среды с единичной неровностью. Таким образом, решение контактной задачи о скольжении штампа по вязкоупругому основанию дает возможность определить характер зависимости силы трения от скорости. В качестве конкретного примера ниже берется случай штампа цилиндрической формы, для которого исследование значительно облегчается в связи с двумерностью задачи.