Кроме того, частное решение и C_1, C_2 по модулю должны быть достаточно малы, что будет иметь место при малости R_1 и R_2 на интервале $[0, T]$ и малости начальных возмущений. Тогда отклонения оси симметрии тела от касательной к траектории его центра масс также будут малы на интервале $[0, T]$.

Таким образом, необходимыми условиями устойчивости невозмущенного движения (4) являются условия ограниченности решения уравнения (7), тогда как достаточные условия — это условия определенной положительности построенной функции V и определенной отрицательности ее производной по времени $V^{\cdot}$ в силу укороченной системы уравнений (3).

Поступила 14 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дмитриевский А. А.* Внешняя баллистика. М., «Машиностроение», 1972.
2. *Вентцель Д. А., Шапиро Я. М.* Внешняя баллистика, т. 2. М.— Л., Оборонгиз, 1939.
3. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
4. *Кузьмин П. А.* Малые колебания и устойчивость движения. М., «Наука», 1973.
5. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М., «Наука», 1969.

УДК 531.36

К ИССЛЕДОВАНИЮ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВБЛИЗИ ГРАНИЦ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ

Ю. В. Савельев

(Горький)

В статье даны необходимое и достаточное условия применения метода Магнуса к исследованию систем нелинейных дифференциальных уравнений вблизи границ области устойчивости.

В работе [1] Магнус распространил метод Крылова — Боголюбова на исследование нелинейных систем вблизи границ области устойчивости. Суть метода состоит в том, что нелинейная система

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \mu_i f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

характеристическое уравнение которой имеет не более пары чисто мнимых корней, а нелинейная функция f_i разлагается в ряд Фурье, заменяется линейной системой

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \left(\bar{a}_{ij}^{*} \frac{dx_i}{dt} + \bar{a}_{ij}x_j\right) \tag{2}$$

Решение ищется в виде

$$x_j = A_j \sin \psi_j, \quad \psi_j = \omega t + \varphi_j \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) и (2) в предположении, что все колебания имеют одну и ту же частоту ω, но разные амплитуды A_j и фазы φ_j, можно заметить, что f_i — периодические функции периода $2\pi / \omega$. Раскладывая их в ряды Фурье и оставляя лишь первые гармоники, получим

$$f_i = a_{i1}\cos\psi_1 + b_{i1}\sin\psi_1$$

$$\begin{Bmatrix} a_{i1} \\ b_{i1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_i(AK_1\sin\psi_1, \ldots, AK_n\sin\psi_n)\begin{Bmatrix}\cos \\ \sin\end{Bmatrix}\psi_1 d\psi_1, \quad A_j = AK_j$$

Подставляя выражение f_i в (1) и (2), получим соответственно

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}AK_j\sin\psi_1 + \mu_i(a_{i1}\cos\psi_1 + b_{i1}\sin\psi_1) \tag{4}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (\bar{a}_{ij}^{*}AK_j\omega\cos\psi_j + \bar{a}_{ij}AK_j\sin\psi_j) \tag{5}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках в системах (4) и (5), получим

$$\bar{a}_{ij} = a_{ij}, \quad \bar{a}_{ij}^{*} = 0 \text{ при } j \neq 1$$

$$\bar{a}_{ij} = a_{i1} + \frac{\mu}{AK_1}b_{i1}, \quad \bar{a}_{ij}^{*} = \frac{\mu}{A\omega K_1}a_{i1} \quad \text{при } j = 1$$

Очевидно, что системы (1) и (2) при $\mu_i = 0$ тождественны, а при достаточно малом μ_i достаточно близки. Применяя к системе (2) критерий Гурвица, найдем границу устойчивости. Так как параметры системы (2) зависят от амплитуды A, то по Магнусу характер границы устойчивости системы (2), а следовательно для достаточно малых μ_i и системы (1), определяется относительным положением границы устойчивости $R = 0$ и A-кривой, определяемой параметрически заданной функцией $\bar{a}_{ij} = a(A)$ и $\bar{a}_{ij}^{*} = a^{*}(A)$ в пространстве параметров $\bar{a}_{ij}$, $\bar{a}_{ij}^{*}$.

Значения $A = A_i$, которым соответствуют точки пересечения границы устойчивости и A-кривой, есть первые приближения амплитуд стационарных колебаний. Магнус утверждает, что граница $R = 0$ безопасна, если $dR / dA_{A=0} > 0$, и опасна, если $dR / dA_{A=0} < 0$. Обобщая метод Ляпунова, Н. Н. Баутин показал [2], что граница области устойчивости безопасна, если ляпуновский коэффициент $\alpha_3 = L(\lambda_0) < 0$, и опасна в случае $L(\lambda_0) > 0$. Очевидно, что точка, разделяющая опасную и безопасную части границы области устойчивости, полученная методом Магнуса, может не совпадать с точкой, полученной в [2].

Таким образом, условия, сформулированные Магнусом, являются необходимыми и достаточными, если имеет место следующая теорема: если в некоторой точке M_0 пространства параметров системы (1) ляпуновский коэффициент $\alpha_1 = R = 0$, а $\alpha_3 = L(\lambda_0) < 0$ ($\alpha_3 > 0$), то при исследовании системы (1) методом Магнуса при значениях параметров, соответствующих точке M_0, характер устойчивости в ней не искажается тогда и только тогда, когда $dR / dA > 0$ ($dR / dA < 0$).

Доказательство. Необходимость. Пусть граница области устойчивости в точке M_0 безопасна, т. е. $\alpha_3 = L(\lambda_0) < 0$. Покажем, что при этом должно выполняться неравенство $dR / dA > 0$. Предположим противное: $dR / dA < 0$. В этом случае, как показал Магнус, A-кривая, начинаясь в области устойчивости, пересекает границу устойчивости при некотором $A = A_0$, соответствующем амплитуде неустойчивого колебания, а это противоречит результатам, полученным в [2], согласно которым при $L(\lambda_0) < 0$ существует устойчивый предельный цикл, соответствующий устойчивым колебаниям.

Достаточность. Пусть в точке M_0 граница безопасна. Докажем, что при условии $dR / dA > 0$ метод Магнуса не искажает характера границы в указанной точке. Действительно, при $dR / dA > 0$ A-кривая, начинаясь в области неустойчивости, пересекает границу устойчивости при некотором $A = A_1$, соответствующем амплитуде устойчивого колебания, что совпадает с результатами работы [2]. Итак, при невыполнении условий теоремы метод Магнуса дает неверный результат.

Доказательство для случая, когда в точке M_0 граница области устойчивости опасна, аналогично.

Пример. Рассмотрим систему

$$dx / dt = y, \; dy / dt = -x + dy + b_{21}x^2y + b_{03}y^3$$

Для нее $\alpha_3 = {}^1/_4\, \pi c$, $c = -(b_{21} + 3\, b_{03})$, т. е. $\alpha_3 < 0$ при $c > 0$. Поэтому граница устойчивости, точки которой удовлетворяют условиям $d = 0$ и $c > 0$, безопасна. Применяя метод Магнуса, получим линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + \bar{a}^*y, \quad \bar{a}^* = d + \frac{1}{4}cA^2$$

Для нее имеем

$$\frac{dR}{dA} = \frac{d}{dA}\left(d + \frac{1}{4}\, cA^2\right) = \frac{1}{2}\, cA > 0$$

так как $c > 0$ по допущению. Условия теоремы выполнены.

За приближенное значение амплитуды можно принять $A = \sqrt{4\,|\,d\,/\,c\,|}$.

Поступила 9 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Magnus K.* Ein Beitrag zur Berechnung nihtlinear Schwingungs und Regelungs Systeme. Z. angew. Math. und Mech., 1955, Bd 31, H. 10.
2. *Баутин Н. Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости Л.— М., Гостехиздат, 1949.

УДК 532.516

ВТОРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Б. Ю. Скобелев

(Новосибирск)

Рассматривается возникновение вторичных автоколебательных режимов, ответвляющихся от течения Пуазейля в плоском канале.

Ранее [1, 2] были получены условия появления вторичных автоколебательных режимов при значениях числа Рейнольдса, близких к критическому. В частности, было показано, что существование вторичных течений устанавливается на основе анализа только лишь линеаризованных уравнений.

В данной работе возникновение периодических по x и t вторичных течений в плоском канале изучено с помощью асимптотических решений уравнения Орра — Зоммерфельда.

Доказывается, что в достаточно малых окрестностях почти всех значений числа Рейнольдса R, лежащих на нейтральной кривой линейной теории устойчивости, существуют такие значения R, при которых уравнения Навье — Стокса имеют периодические по x и t решения.

1. Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском безграничном канале. Выберем систему координат так, чтобы ось x совпала с осью канала, y-координаты стенок были равны $+1$ и -1.

Безразмерное уравнение для функции тока ψ имеет вид

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} - \frac{1}{R}\Delta^2\psi = 0 \tag{1.1}$$

В (1.1) в качестве характерной скорости выбрана средняя по расходу скорость.