УДК 531.36

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В СЛУЧАЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ В ВОЗДУХЕ ЕГО ЦЕНТРА МАСС

С. Д. Беляева

(Ленинград)

Рассматривается свободное движение осесимметричного твердого тела с учетом пространственного перемещения его центра масс по кривой двоякой кривизны и вращательного движения около него. При составлении уравнений движения учитываются касательная и нормальная составляющие силы сопротивления воздуха, сила Магнуса и вес тела, а также опрокидывающий (восстанавливающий) момент, момент силы Магнуса и тушащие осевой и экваториальный моменты. Устанавливаются условия, при выполнении которых на требуемом интервале времени отклонения оси симметрии тела от касательной к траектории его центра масс не будут превосходить заданных значений.

С рассматриваемым свободным твердым телом жестко связаны оси $C\xi\eta\zeta$ — главные центральные оси его эллипсоида инерции, представляющего собой эллипсоид вращения, причем $C\xi$ — ось симметрии. Центр масс движется по кривой двоякой кривизны: его вектор скорости отклонён от вертикальной плоскости CXY на угол γ, а от горизонтальной плоскости — на угол Θ (фигура). Кроме того, на фигуре показаны полускоростные оси $CX'Y'Z'$, скоростные оси $CX'Y_2Z_2$ [1], промежуточные оси $C\xi\eta'\zeta'$, углы Эйлера δ, φ, ψ, а также углы δ_1, δ_2, δ_3, с помощью которых задается положение осей $C\xi\eta\zeta$ относительно $CX'Y'Z'$.

При обычных допущениях (см., например, [1,2]) к телу приложены: вес Q, касательная R_T и нормальная R_N составляющие силы сопротивления воздуха и сила Магнуса R_L, причем

$$R_N = \left(\frac{\partial R_N}{\partial \delta}\right)_0 \delta + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 R_N}{\partial \delta^3}\right)_0 \delta^3 + \ldots, \qquad R_L = c_L p v \sin\delta$$

Кроме того, к телу приложены опрокидывающий момент ($B\beta \sin\delta$), если центр давления выше центра масс, или стабилизирующий момент ($-B\beta\sin\delta$) — в противном случае, момент силы Магнуса $M_L = \pm h_L R_L$ (знак устанавливается аналогично), тушащий момент ($-A\chi p$, $-2B\varkappa q$, $-2B\varkappa r$). Здесь A, B — осевой и экваториальный моменты инерции тела, v — скорость центра масс, χ, $\varkappa$, β, c_L — переменные коэффициенты пропорциональности, h_L — плечо силы Магнуса, p — угловая скорость вращения тела около оси симметрии, q, r — проекции угловой скорости оси симметрии тела на оси $C\eta$, $C\zeta$.

Уравнения движения центра масс в проекциях на оси $CX'Y'Z'$ таковы:

$$mv^{\cdot} = -R_T - Q\sin\Theta, \quad mv\Theta^{\cdot} = R_N\cos\psi + R_L\sin\psi -$$
$$- Q\cos\Theta, \quad mv\gamma^{\cdot}\cos\Theta = R_N\sin\psi - R_L\cos\psi$$

Учитывая, что $\delta\cos\psi = \delta_1 + \ldots$, $\delta\sin\psi = \delta_2 + \ldots$ (из сферического треугольника $\xi X' X_*$), имеем

$$\Theta^{\cdot} = 2\mu\delta_1 + 2\xi\delta_2 - gv^{-1}\cos\Theta + \ldots, \quad \gamma^{\cdot}\cos\Theta = 2\mu\delta_2 - 2\xi\delta_1 + \ldots \tag{1}$$
$$2\mu = (\partial R_N / \partial\delta)_0 (mv)^{-1}, \quad 2\xi = c_L p m^{-1}$$

Точками отмечены слагаемые третьего и выше порядков малости относительно δ_1, δ_2.

Уравнения вращательного движения являются динамическими уравнениями Эйлера

$$Ap^{\cdot} = -A\chi p, \quad Bq^{\cdot} + (B - A)rp = \pm M_L \cos\varphi - 2B\varkappa q \pm B\beta \sin\delta \sin\varphi$$

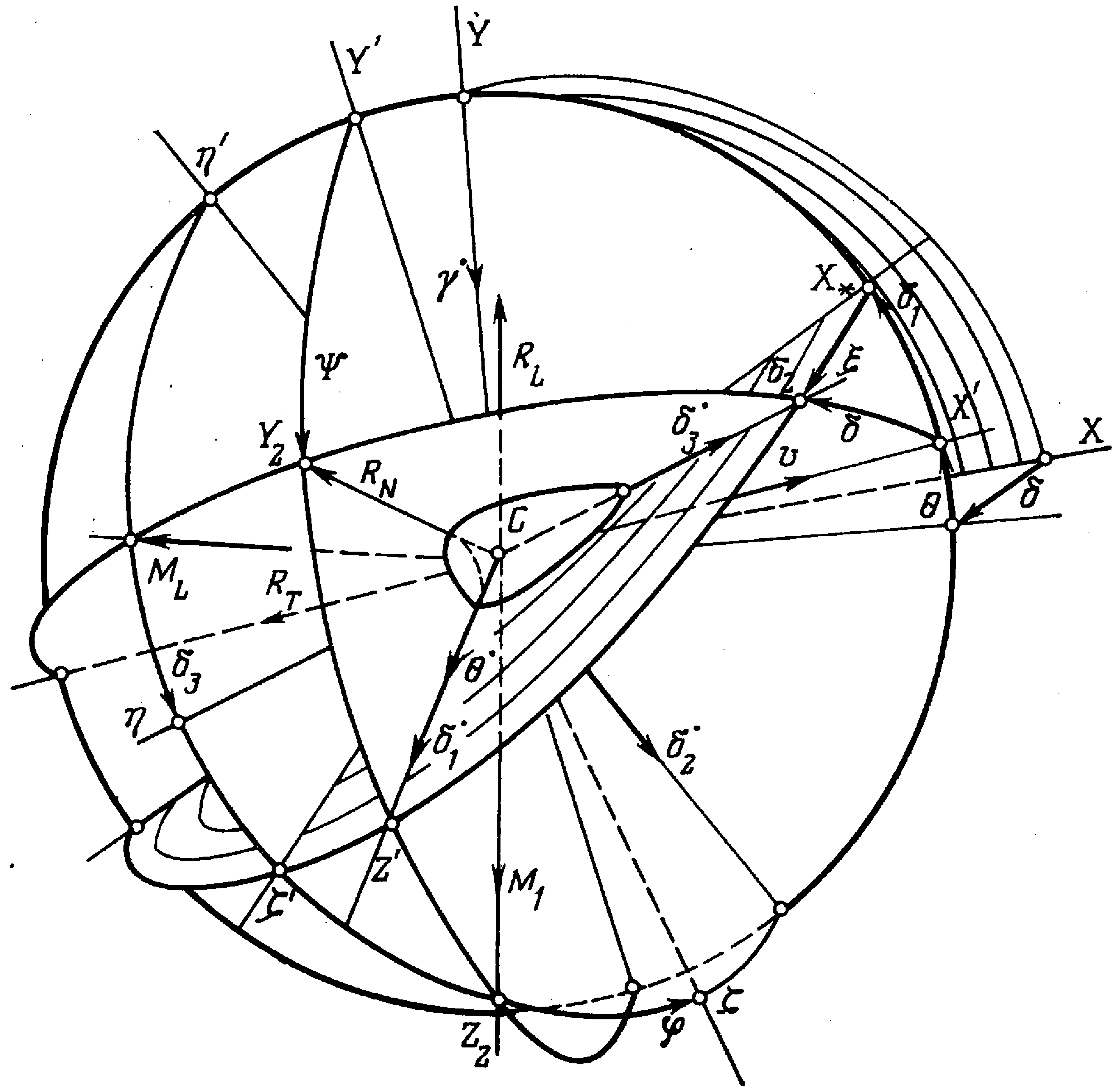
$$Br^{\cdot} + (A - B)pq = \mp M_L \sin\varphi - 2B\varkappa r \pm B\beta \sin\delta \cos\varphi$$

$$p = (\delta_1^{\cdot} + \Theta^{\cdot}) \sin\delta_2 + \delta_3^{\cdot} - \gamma^{\cdot} \sin(\delta_1 + \Theta) \cos\delta_2, \; q = (\delta_1^{\cdot} + \Theta^{\cdot}) \sin\delta_3 \cos\delta_2 -$$
$$- \delta_2^{\cdot} \cos\delta_3 + \gamma^{\cdot} \cos(\delta_1 + \Theta) \cos\delta_3 + \gamma^{\cdot} \sin(\delta_1 + \Theta) \sin\delta_2 \sin\delta_3, \quad r =$$
$$= (\delta_1^{\cdot} + \Theta^{\cdot}) \cos\delta_3 \cos\delta_2 + \delta_2^{\cdot} \sin\delta_3 + \gamma^{\cdot} \cos(\delta_1 + \Theta) \sin\delta_3 +$$
$$+ \gamma^{\cdot} \sin(\delta_1 + \Theta) \sin\delta_2 \cos\delta_3$$

Интегрирование первого уравнения дает

$$p = p_0 \exp\left(-\int_0^t \chi dt\right)$$

а второе и третье уравнения после подстановки p, q, r, преобразований и разложения



в ряд тригонометрических функций в окрестности $\delta_1 = \delta_2 = 0$ с учетом (1) и уравнений, получающихся из (1) дифференцированием по времени, имеют вид

$$\delta_1^{\cdot\cdot} + 2a\delta_2^{\cdot} + 2b\delta_1^{\cdot} - c\delta_1 - e\delta_2 = R_1 + \Psi_1 \tag{2}$$

$$\delta_2^{\cdot\cdot} - 2a\delta_1^{\cdot} + 2b\delta_2^{\cdot} - c\delta_2 + e\delta_1 = R_2 + \Psi_2$$

$$a = \alpha + \xi, \; b = \varkappa + \mu, \; c = \pm\beta - 2\mu^{\cdot} - 4\chi\mu - 4\alpha\xi, \; e = \pm\nu - 2\xi^{\cdot} - 4\chi\xi, \; - 4\alpha\mu$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{A}{B} p, \; \nu = h_L c_L p v B^{-1}, \; R_1 = 2\varkappa g v^{-1} \cos\Theta - g\,(v^{-1}\cos\Theta)^{\cdot}, \quad R_2 = -2\alpha g v^{-1} \cos\Theta$$

(Ψ, Ψ_2 — нелинейные члены разложений)

Наряду с (2) рассмотрим укороченную систему уравнений

$$\delta_1^{\cdot\cdot} + 2a\delta_2^{\cdot} + 2b\delta_1^{\cdot} - c\delta_1 - e\delta_2 = 0, \quad \delta_2^{\cdot\cdot} - 2a\delta_1^{\cdot} + 2b\delta_2^{\cdot} - c\delta_2 + e\delta_1 = 0 \tag{3}$$

которая допускает частное решение

(4) $$\delta_1 = \delta_2 = 0,\ \delta_1^{\cdot} = \delta_2^{\cdot} = 0$$

соответствующее винтовому движению оси симметрии тела вдоль касательной к траектории центра масс. Система (2) отличается от (3) наличием нелинейных членов Ψ_1 и Ψ_2, а также постоянно действующих возмущений R_1, R_2, обусловленных понижением касательной.

Определим условия устойчивости невозмущенного движения (4) как при наличии постоянно действующих возмущений R_1, R_2 и нелинейных членов Ψ_1, Ψ_2, так и без них.

В случае постоянства коэффициентов характеристическое уравнение для системы (3) таково:

$$\lambda^4 + 4b\lambda^3 + (4b^2 - 2c + 4a^2)\lambda^2 - 4(bc + ea)\lambda + c^2 + e^2 = 0$$

Применяя критерий Гурвица, получим условия асимптотической устойчивости решения (4):

а. Если $c > 0$, (неоперенное тело), то

$$a^2 - c > 0, \quad e < 0, \quad 2a(1-\sigma) \leqslant \left|\frac{e}{b}\right| \leqslant 2a(1+\sigma), \quad \sigma = \sqrt{1 - \frac{c}{a^2}} < 1$$

б. Если $c < 0$ (оперенное тело), то

$$e \gtrless 0, \quad -2a(\sigma+1) \leqslant \frac{e}{b} \leqslant 2a(\sigma - 1), \quad |c| > \frac{ae}{b} + \frac{1}{4}\left(\frac{e}{b}\right)^2, \quad \sigma > 1$$

Следовательно, в случае *а* свободное твердое тело должно иметь значительную угловую скорость вращения около оси симметрии, тогда как в случае *б* коэффициент *c* по модулю должен быть большим.

Полученные результаты не изменятся, если учесть нелинейные члены Ψ_1, Ψ_2 [3]. Если же учесть постоянно действующие возмущения R_1, R_2, то невозмущенное движение (4) просто устойчиво [3].

В случае переменности всех коэффициентов введем функцию

$$V(t, \delta_1, \delta_2, \delta_1^{\cdot}, \delta_2^{\cdot}) = \delta_1^{\cdot 2} + \lambda\delta_1^{\cdot}\delta_2 + (\lambda a - c)\delta_2^2 + \delta_2^{\cdot 2} - \lambda\delta_2^{\cdot}\delta_1 + (\lambda a - c)\delta_1^2$$

где λ — параметр, подлежащий определению. Очевидно, $V(t, 0, 0, 0, 0) = 0$, V — определенно-положительная функция, если выполнены обобщенные условия Сильвестра [4]

(5) $$\lambda a - c > k_1 > 0,\ a^2 - c > k_2 > 0,\ a\ \lambda \in [2a(1-\sigma),\ 2a(1+\sigma)]$$

Производная по времени $V^{\cdot}$ в силу уравнений (3)

$$V^{\cdot} = -[4b\delta_1^{\cdot 2} + 2(b\lambda - e)\delta_1^{\cdot}\delta_2 - (\lambda e + \lambda a^{\cdot} - c^{\cdot})\delta_2^2 + 4b\delta_2^{\cdot 2} - 2(b\lambda - e)\delta_2^{\cdot}\delta_1 - (\lambda e + \lambda a^{\cdot} - c^{\cdot})\delta_1^2]$$

будет определенно-отрицательной, если

(6) $$-(\lambda e + \lambda a^{\cdot} - c^{\cdot}) > k_3 > 0,\ a^{\cdot 2} + ea^{\cdot} + bc^{\cdot} > k_4 > 0$$

При этом для построения определенно-положительной функции V и определенно-отрицательной $V^{\cdot}$ в силу уравнений (3) с помощью одного и того же параметра λ необходимо, чтобы

$$e < 0, \quad 2a\left(1 - \sigma - \frac{\chi}{b}\right) < -\frac{e}{b} < 2a\left(1 + \sigma - \frac{\chi}{b}\right)$$

$$e \gtrless 0, \quad -2a\left(\sigma + 1 - \frac{\chi}{b}\right) \leqslant \frac{e}{b} < 2a\left(\sigma - 1 - \frac{\chi}{b}\right)$$

($e < 0$ — для неоперенного тела, $e > 0$ — для оперенного тела)

Интегрируя первое неравенство (6) на интервале $[0, T]$ с учетом первого неравенства (5), имеем

$$0 < k_1 < \lambda a - c < \lambda a_0 - c_0 - k_3 T - \lambda \int_0^T e dt$$

Тогда частные производные $\partial V/\partial\delta_1$, $\partial V/\partial\delta_2$, $\partial V/\partial\delta_1^{\cdot}$, $\partial V/\partial\delta_2^{\cdot}$ ограничены на интервале $[0, T]$, если $|\delta_i| < \varepsilon$, $|\delta_i^{\cdot}| < \varepsilon$, $i = 1, 2$, $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое, наперед заданное число.

Следовательно, для интервала $[0, T]$ в соответствии с теоремой И. Г. Малкина [3] изображающая точка $(\delta_1, \delta_2, \delta_1^{\cdot}, \delta_2^{\cdot})$, находившаяся в начальный момент времени внутри области $V_0 = V(0, \delta_{10}, \delta_{20}, \delta_{10}^{\cdot}, \delta_{20}^{\cdot})$, останется там для $t \in [0, T]$, если $|R_i| < \zeta_i(\varepsilon)$, $|\delta_{i0}| < \eta(\varepsilon)$, $|\delta_{i0}^{\cdot}| < \eta(\varepsilon)$ $(i = 1, 2)$. Если интервал $[0, T]$ выбран в соответствии со вторыми неравенствами (5), (6), то решение системы (2) не выйдет для указанного интервала из замкнутой области V_0, что и означает устойчивость невозмущенного движения (4) на интервале $[0, T]$ как при наличии постоянно действующих возмущений и нелинейных членов, так и без них. В таком случае систему (2) можно линеаризовать. Вводя комплексную переменную $W = \delta_1 + i\delta_2$, запишем линеаризованную систему в виде одного уравнения

$$W^{\cdot\cdot} - 2(ia - b)W^{\cdot} - (c - ei)W = R_1 + iR_2 \tag{7}$$

Для $c > 0$ в уравнении (7) содержится большой параметр $a_0 = a_0$, а для $c < 0$ — большой параметр $|c_0| = |c(0)|$, поэтому его решение можно построить асимптотическим методом [5]. С точностью до величин λ, где $\lambda = a_0^{-1}$ в первом случае и $\lambda = |c_0|^{-\frac{1}{2}}$ — во втором, имеем

$$W = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\left[C_1 \exp \int_0^t (i\lambda\tau + ia - b)\, dt + C_2 \exp \times \right.$$
$$\left. \times \int_0^t (-i\lambda\tau + ia - b)\, dt\right] - \frac{R_1 + iR_2}{c - ei}$$
$$\tau^2 = [(a^2 - c - b^2 - b^{\cdot}) + i(2ba + e + a^{\cdot})]\lambda^{-2}$$

или в явном виде после преобразований

$$W = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\left[C_1 \exp\left(\int_0^t \left(\frac{\chi}{2} - b - a\sigma \sin\frac{\varphi}{2}\right)dt + i\int_0^t a\left(1 + \sigma\cos\frac{\varphi}{2}\right)dt - \frac{i\varphi}{4}\right) + \right.$$
$$+ C_2 \exp\left(\int_0^t \left(\frac{\chi}{2} - b + a\sigma \sin\frac{\varphi}{2}\right)dt + \right.$$
$$\left.\left. + i\int_0^t a\left(1 - \sigma\cos\frac{\varphi}{2}\right)dt - \frac{i\varphi}{4}\right)\right] - \frac{R_1 + iR_2}{c - ei}$$
$$\operatorname{tg}\varphi = (2ba + e + a^{\cdot})(a^2 - c - b^2 - b^{\cdot})^{-1}$$

Для ограниченности решения необходимо, чтобы $\operatorname{Re}\tau^2 > 0$, $\operatorname{Im}\tau^2 \approx 0$, откуда

$$a^2 - c > b^2 + b^{\cdot}$$
$$e < 0, \quad 2a(1 - \sigma)\left(1 - \frac{\chi}{2b}\right) < -\frac{e}{b} < 2a(1 + \sigma)\left(1 - \frac{\chi}{2b}\right)$$
$$e \geqslant 0, \quad -2a(\sigma + 1)\left(1 - \frac{\chi}{2b}\right) < \frac{e}{b} < 2a(\sigma - 1)\left(1 - \frac{\chi}{2b}\right)$$

Кроме того, частное решение и C_1, C_2 по модулю должны быть достаточно малы, что будет иметь место при малости R_1 и R_2 на интервале $[0, T]$ и малости начальных возмущений. Тогда отклонения оси симметрии тела от касательной к траектории его центра масс также будут малы на интервале $[0, T]$.

Таким образом, необходимыми условиями устойчивости невозмущенного движения (4) являются условия ограниченности решения уравнения (7), тогда как достаточные условия — это условия определенной положительности построенной функции V и определенной отрицательности ее производной по времени $V^{\cdot}$ в силу укороченной системы уравнений (3).

Поступила 14 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дмитриевский А. А.* Внешняя баллистика. М., «Машиностроение», 1972.
2. *Вентцель Д. А., Шапиро Я. М.* Внешняя баллистика, т. 2. М.— Л., Оборонгиз, 1939.
3. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
4. *Кузьмин П. А.* Малые колебания и устойчивость движения. М., «Наука», 1973.
5. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М., «Наука», 1969.

УДК 531.36

К ИССЛЕДОВАНИЮ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВБЛИЗИ ГРАНИЦ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ

Ю. В. Савельев

(Горький)

В статье даны необходимое и достаточное условия применения метода Магнуса к исследованию систем нелинейных дифференциальных уравнений вблизи границ области устойчивости.

В работе [1] Магнус распространил метод Крылова — Боголюбова на исследование нелинейных систем вблизи границ области устойчивости. Суть метода состоит в том, что нелинейная система

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \mu_i f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

характеристическое уравнение которой имеет не более пары чисто мнимых корней, а нелинейная функция f_i разлагается в ряд Фурье, заменяется линейной системой

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \left(\bar{a}_{ij}^{*} \frac{dx_i}{dt} + \bar{a}_{ij}x_j\right) \tag{2}$$

Решение ищется в виде

$$x_j = A_j \sin \psi_j, \quad \psi_j = \omega t + \varphi_j \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) и (2) в предположении, что все колебания имеют одну и ту же частоту ω, но разные амплитуды A_j и фазы φ_j, можно заметить, что f_i — периодические функции периода $2\pi / \omega$. Раскладывая их в ряды Фурье и оставляя лишь пер-