Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.375

КРАЕВАЯ ТРЕЩИНА НА ГРАНИЦЕ РАЗЛИЧНЫХ СРЕД

Л. А. Киппис

(Москва)

Рассматривается плоская задача теории упругости о равновесии упругой полуплоскости, состоящей из двух материлов, с краевой прямолинейной трещиной, расположенной на границе раздела этих материалов и выходящей на свободную от нагрузок границу полуплоскости. Указанная задача сводится к краевой задаче Римана для двух пар функций. При условии, что сумма утроенного модуля сжатия с модулем сдвига одинакова для обоих материалов, дается решение точным аналитическим методом и вычисляются коэффициенты интенсивности напряжений в вершине трещины.

Рассмотрим упругую полуплоскость $x > 0$, составленную из двух материалов: с индексом *1* — при $y > 0$, с индексом *2* — при $y < 0$. На границе сред при $y = 0$, $x < 1$ имеется трещина, к берегам которой приложена заданная нормальная нагрузка $\sigma_y = -\sigma$, $\tau_{xy} = 0$ (см. фиг. 1). Граница полуплоскости $x = 0$ свободна от нагрузок. На бесконечности напряжения исчезают.

Запишем в полярных координатах $r\theta$ уравнения равновесия, условие совместности деформаций и граничные условия

$$r\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\sigma_r-\sigma_\theta=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+r\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+2\tau_{r\theta}=0,\quad \Delta(\sigma_r+\sigma_\theta)=0$$

$$\theta=0,\quad [\sigma_\theta]=[\tau_{r\theta}]=0 \tag{2}$$

$$\theta=\pm\pi/2,\quad \sigma_\theta=\tau_{r\theta}=0$$

$$\theta=0,\quad 0<r<1,\quad \sigma_\theta=-\sigma,\quad \tau_{r\theta}=0 \tag{3}$$

$$\theta=0,\quad r>1,\quad [u_\theta]=[u_r]=0$$

$$r\to\infty,\quad \sigma_\theta\to0,\quad \tau_{r\theta}\to0,\quad \sigma_r\to0 \tag{4}$$

(σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$ — напряжения, u_θ, u_r — смещения).

Из физических соображений напряжения будут ограниченными при $r\to0$, а при $r\to\infty$ они ведут себя как $1/r^2$.

Применяя преобразование Меллина с комплексным параметром p [1] к уравнениям (1) и удовлетворяя граничным условиям (2), приходим к следующему выражению для трансформанты $\bar\sigma_\theta(p,\theta)$:

$$\bar\sigma_\theta(p,\theta)=A_1\sin(p+1)\theta+A_2\sin(p-1)\theta+A_3\cos(p+1)\theta+A_4\cos(p-1)\theta \tag{5}$$

$$A_i = \begin{cases} A_i^+, & 0 < \theta < \pi/2 \\ A_i^-, & -\pi/2 < \theta < 0 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$A_2^{\pm}(p) = \left[-p\cos^2\frac{p\pi}{2}A_1^{\pm}(p) + \left(p^2 - \sin^2\frac{p\pi}{2}\right)A_1^{\mp}(p)\right] \times$$
$$\times \left[(p-1)\left(p - \sin^2\frac{p\pi}{2}\right)\right]^{-1}$$

$$A_3^{\pm}(p) = \pm\left[-\left(p^2 + \cos p\pi \sin^2\frac{p\pi}{2}\right)A_1^{\pm}(p) + A_1^{\mp}(p) \times\right.$$
$$\left.\times \left(p^2 - \sin^2\frac{p\pi}{2}\right)\right]\left[\sin p\pi \left(p - \sin^2\frac{p\pi}{2}\right)\right]^{-1}$$

$$A_4^{\pm}(p) = \mp\left\{\left[(p-1)(p^2-1) + (p + \cos p\pi)\left(2p\cos^2\frac{p\pi}{2} + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.+ p^2 - 1\right)\right]A_1^{\pm}(p) - 2\left(p^2 - \sin^2\frac{p\pi}{2}\right)(p + \cos p\pi)A_1^{\mp}(p)\Big\} \times$$
$$\times \left[2(p-1)\sin p\pi\left(p - \sin^2\frac{p\pi}{2}\right)\right]^{-1}$$

($A_1^+(p)$ и $A_1^-(p)$ — неизвестные функции p).

Введем в рассмотрение функции (с учетом граничных условий (3)):

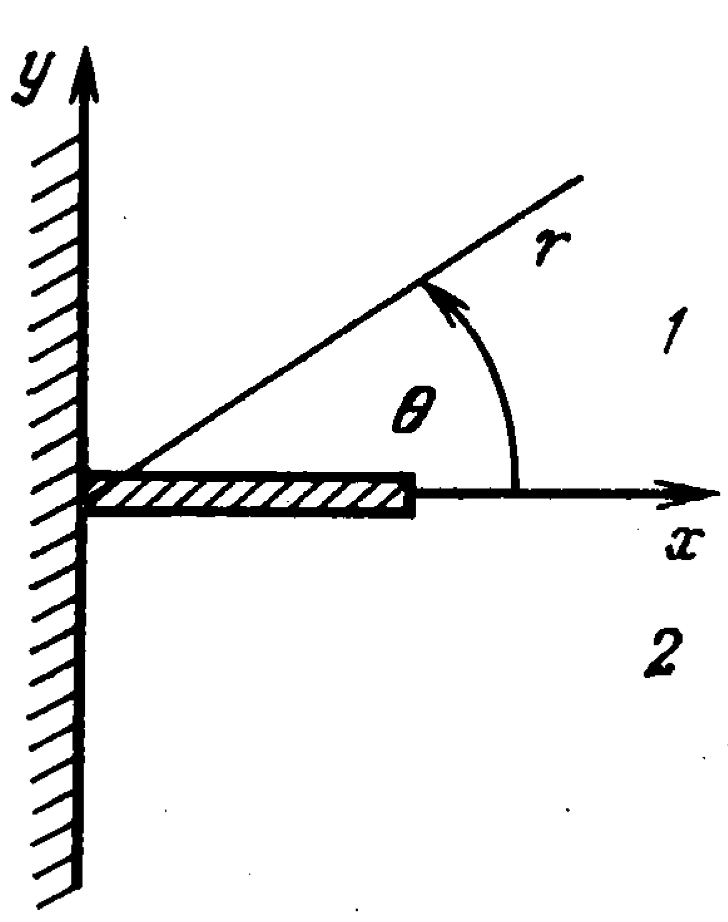
$$\Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)}\int_0^1 \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right]\Bigg|_{\theta=0} r^p\,dr = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)}\left[\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial r}\right]\Bigg|_{\theta=0} \tag{6}$$

$$\Psi^-(p) = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)}\int_0^1 \left[\frac{\partial u_r}{\partial r}\right]\Bigg|_{\theta=0} r^p\,dr = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)}\left[\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r}\right]\Bigg|_{\theta=0}$$

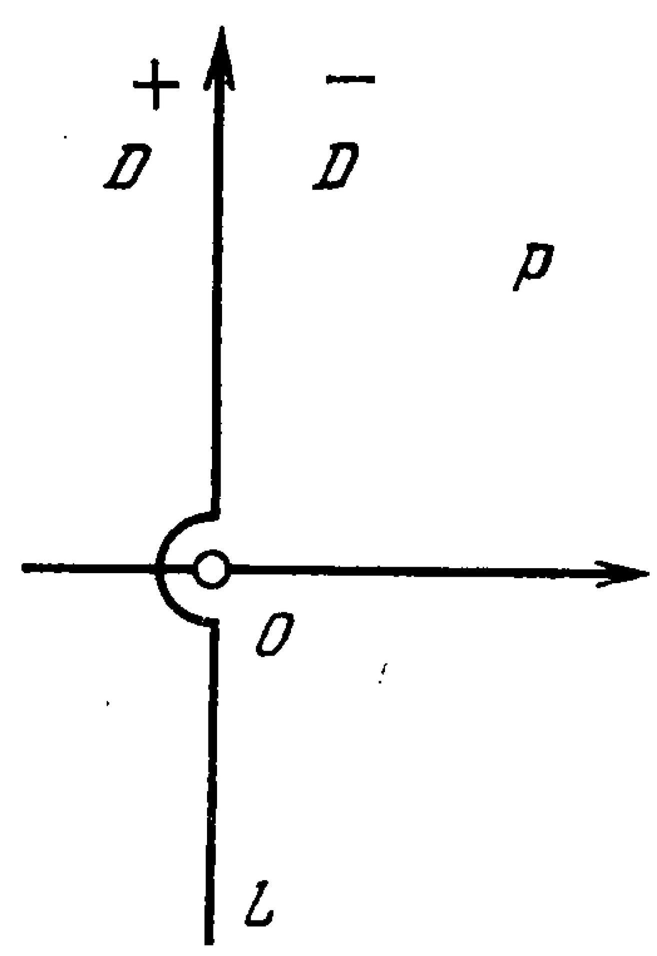
$$U^+(p) = \int_1^\infty \sigma_\theta(r, 0)\,r^p\,dr = \bar{\sigma}_\theta(p, 0) + \frac{\sigma}{p+1}$$

$$V^+(p) = \int_1^\infty \tau_{r\theta}(r, 0)\,r^p\,dr = \bar{\tau}_{r\theta}(p, 0)$$

(E_1, E_2 и ν_1, ν_2 — модули Юнга и коэффициенты Пуассона).



Фиг. 1



Фиг. 2

Исключая функции $A_1^+(p)$ и $A_1^-(p)$ в (6) при помощи закона Гука, приходим к уравнению Винера — Хопфа

$$\varphi^-(p) = A\operatorname{ctg}\frac{p\pi}{2}G(p)\left[\varphi^+(p) + C(p)\right] \tag{7}$$

$$G(p) = \begin{Vmatrix} g_0 & g_- \\ g_+ & g_0 \end{Vmatrix}, \qquad g_0 = A^{-1}\frac{k_2+1}{2}b(p)$$

$$g_{\pm} = \pm A^{-1} \operatorname{tg} \frac{p\pi}{2}\left[k_1 + \frac{k_2-1}{2}\left(1 \pm p \sin^{-2}\frac{p\pi}{2}\right) b(p)\right]$$

$$k_1 = \frac{k-1}{4(1-\nu_1)}, \quad k_2 = \frac{1-\nu_2}{1-\nu_1}k, \quad k = \frac{E_1(1+\nu_2)}{E_2(1+\nu_1)}$$

$$A = \sqrt{(k_1+1)(k_2-k_1)}, \quad b(p) = \sin^2\frac{p\pi}{2}\left(p^2 - \sin^2\frac{p\pi}{2}\right)^{-1}$$

$$C(p) = \left(-\frac{\sigma}{p+1}, 0\right), \quad \varphi^-(p) = (\Phi^-(p), \Psi^-(p))$$

$$\varphi^+(p) = (U^+(p), V^+(p))$$

Будем предполагать, что упругие постоянные связаны соотношением $2k_1 + 1 = k_2$. Физически это соответствует предположению о том, что сумма утроенного модуля сжатия с модулем сдвига одинакова для обоих материалов.

В плоскости комплексной переменной p рассмотрим контур, состоящий из мнимой оси, за исключением малого симметричного отрезка около начала координат, и левой полуокружности малого радиуса с центром в начале координат (фиг. 2). Области слева и справа от контура обозначим соответственно через D^+ и D^-. Матрица $G(p)$ в уравнении (7) обладает следующими свойствами:

$$G(p) = b(p)\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} + 2\chi\,\frac{pb(p)}{\sin p\pi}\begin{Vmatrix} 0 & p-1 \\ -p-1 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\chi = (1-k_2)\,/\,(1+k_2)$$

Пусть $p = it$ $(-\infty < t < \infty)$, а $\Delta(p)$ — определитель матрицы $G(p)$, тогда

$$0 < \Delta(it) = s^2(t)\left[1 - 4\chi^2\frac{t^2(t^2+1)}{\operatorname{sh}^2 t\pi}\right]$$

$$\left(s(t) = \operatorname{sh}^2\frac{t\pi}{2} \Big/ \left(\operatorname{sh}^2\frac{t\pi}{2} - t^2\right)\right)$$

— четная функция, $\lim \Delta(it) = 1$ при $t \to \infty$, $\Delta(p)$ — аналитическая функция, положительная в точке $p = 0$. Таким образом, $\Delta(p) \neq 0$ при $p \in L$.

Пусть λ_1 и λ_2 — собственные числа матрицы G.

Так как $\lim \Delta(it) = 1$ при $t \to \pm\infty$, то

$$\varkappa_\Delta = \frac{1}{4\pi i}[\ln(\lambda_1\lambda_2)]\,|_L = 0$$

Так как

$$\lambda_{1,2}(it) = -s(t) \pm \left[4\chi^2\frac{t^2(t^2+1)\,s^2(t)}{\operatorname{sh}^2 t\pi}\right]^{1/2}, \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

то $0 > \varepsilon(it)$ — четная функция, причем $\lim \varepsilon(it) = 0$ при $t \to \pm\infty$.

Таким образом

$$\varkappa_\varepsilon = \frac{1}{4\pi i}\left[\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right]\Big|_L = 0$$

Из свойств матрицы $G(p)$, согласно теореме, приведенной в работе [2], получаем

$$G(p) = \frac{X^+(p)}{X^-(p)}, \quad X(p) = F(p)\begin{Vmatrix} x_0 & x_+ \\ x_- & x_0 \end{Vmatrix} \quad (p \in L)$$

$$x_0 = \operatorname{ch}\left[\sqrt{1-p^2}\beta(p)\right], \quad x_{\pm} = \frac{\mp p - 1}{\sqrt{1-p^2}} \operatorname{sh}\left[\sqrt{1-p^2}\beta(p)\right]$$

$$F(p) = \exp\left[\frac{1}{4\pi i}\int\limits_L \frac{\ln\Delta(t)}{t-p}dt\right], \quad \beta(p) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varepsilon(t)}{\sqrt{f(t)}}\frac{dt}{t-p}$$

Уравнение (7) запишем так:

$$\frac{1}{2AK^-(p/2)}X^-(p)\varphi^-(p) + M^-(p) = \frac{K^+(p/2)}{p}X^+(p)\varphi^+(p) + M^+(p)$$
$(p \in L)$

$$K^{\pm}(p/2) = \Gamma(1 \mp p/2)/\Gamma(^1/_2 \mp p/2)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{K^+(t/2)}{t}X^+(t)C(t)\frac{dt}{t-p} = \begin{cases} M^+(p), & p \in D^+ \\ M^-(p), & p \in D^- \end{cases}$$

Используя соотношения вблизи конца трещины [3] и теорему абелева типа [4], получаем

$$U^+(p) \sim \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{-p}}, \quad V^+(p) \sim \frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{-p}} \quad (p \to \infty) \tag{8}$$

$$\left[\sigma_\theta(r,0) \sim \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi(r-1)}}, \quad \tau_{r\theta}(r,0) \sim \frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi(r-1)}} \quad (r \to 1+0)\right]$$

Здесь K_{I}, K_{II} — коэффициенты интенсивности напряжений в вершине трещины.

На основании соотношений (8) решение уравнения Винера — Хопфа имеет вид

$$\varphi^+(p) = -[p\,/\,K^+(p\,/\,2)][X^+(p)]^{-1}M^+(p) \tag{9}$$
$$\varphi^-(p) = -2AK^-(p\,/\,2)[X^-(p)]^{-1}M^-(p)$$

Найдем коэффициенты интенсивности напряжений в вершине трещины. Из равенств (9) при помощи теории вычетов получаем

$$U^+(p) \sim [\sigma\sqrt{\pi/2}F^+(-1)\cos q]\,/\sqrt{-p} \tag{10}$$
$$V^+(p) \sim [-\sigma\sqrt{\pi/2}F^+(-1)\sin q]\,/\sqrt{-p} \quad (p \to \infty)$$

$$q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varepsilon(p)}{\sqrt{f(p)}}dp = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\varepsilon(it)}{\sqrt{t^2+1}}dt$$

$$F^+(-1) = \exp\left[\frac{1}{4\pi i}\int\limits_L \frac{\ln\Delta(p)}{p+1}dp\right] = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\ln\Delta(it)}{t^2+1}dt\right]$$

Сравнивая асимптотики в (10) и (8), находим

$$K_{\mathrm{I}} = \sigma\sqrt{\pi}F^+(-1)\cos q, \quad K_{\mathrm{II}} = -\sigma\sqrt{\pi}F^+(-1)\sin q \tag{11}$$

Ниже приведены зависимости $\mu_1 = K_{\mathrm{I}}\,/\,\sigma\sqrt{\pi}$ и $\mu_2 = K_{\mathrm{II}}\,/\,\sigma\sqrt{\pi}$ от k при $\nu_1 = {}^1/_3$

k	0.34	0.5	1	2	4	8
μ_1	1.1171	1.1193	1.1215	1.1185	1.1102	1.0994
$100\,\mu_2$	0.6861	0.3383	0	0.4722	1.7693	3.2936

Если $k_2 = 1$, $k_1 = 0$ (однородная среда), то результат ($k = 1$) совпадает с известным [5].

Автор благодарит Г. П. Черепанова и В. Д. Кулиева за внимание к работе.

Поступила 26 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
2. *Храпков А. А.* Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.
3. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
4. *Нобл Б.* Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
5. *Benthem J. P., Koiter W. T.* Asymptotic approximations to crack problems. In: Mechanics of Fracture, vol. 1. Leyden, Noordhoff Inter. Publ., 1973, p. 131—178.