Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.3 : 534.1

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ВНЕШНИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

В. С. Будаев

(Москва)

Рассматривается вопрос о выделении на основе принципа излучения единственного, определенного во всем пространстве решения неоднородной задачи для системы уравнений установившихся колебаний упругих анизотропных сред при плоской деформации. Приводятся условия на бесконечности, непосредственно переходящие в условия Зоммерфельда при переходе к изотропным средам.

1. Рассмотрим систему уравнений

$$c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + c_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + c_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{1.1}$$

$$c_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + c_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

описывающую в условиях плоской деформации колебания кубических, гексагональных, некоторых тетрагональных, ромбических и ромбоэдрических кристаллов, а также ортотропных и трансверсально изотропных сред. Здесь u, w — компоненты смещений по осям x и x_2, постоянные c_i выражаются через упругие постоянные сред [1], t — время, ρ — плотность.

Система (1.1) строго гиперболическая при условии

$$-2\sqrt{\alpha\beta} < \gamma < 1 + \alpha\beta \tag{1.2}$$

$$(\alpha = c_3 / c_1, \ \beta = c_3 / c_4, \ \gamma = 1 + \alpha\beta - c_2^2 / c_1 c_4)$$

Условия положительной определенности упругой энергии имеют различный вид в зависимости от конкретного вида упругой симметрии и во всех случаях, кроме случая кубических кристаллов, связывают как упругие постоянные входящие в c_i (четыре), так и не входящие в c_i [1].

Характеристический многочлен системы (1.1) записывается в виде

$$\Delta = (\rho - c_3\mu^2 - c_1\theta^2)(\rho - c_4\mu^2 - c_3\theta^2) - c_2^2\theta^2\mu^2 \tag{1.3}$$

и представляет собой многочлен четвертой степени по θ и μ.

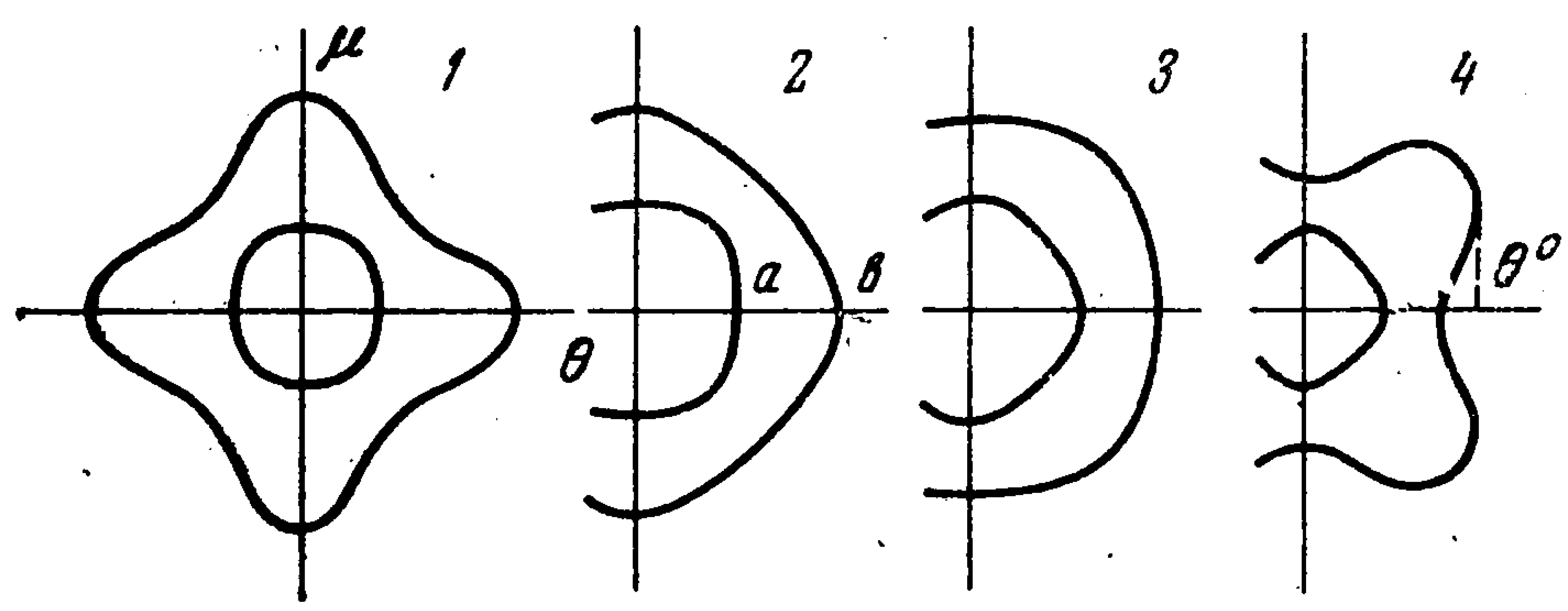
Вещественные нули характеристического многочлена (1.3) образуют две замкнутые (внутреннюю и внешнюю) не пересекающиеся кривые на плоскости θ, μ, симметричные относительно осей координат. В частном случае $\alpha = \beta$ кривые вещественных нулей характеристического многочлена делятся на четыре типа [1] в зависимости от значения γ

(1.4) $$1)\ \gamma_* < \gamma < 1 + \alpha^2, \quad 2)\ 2\alpha < \gamma < \gamma_*$$
$$3)\ \alpha(\alpha + 1) < \gamma < 2\alpha, \quad 4)\ -2\alpha < \gamma < \alpha(\alpha + 1)$$

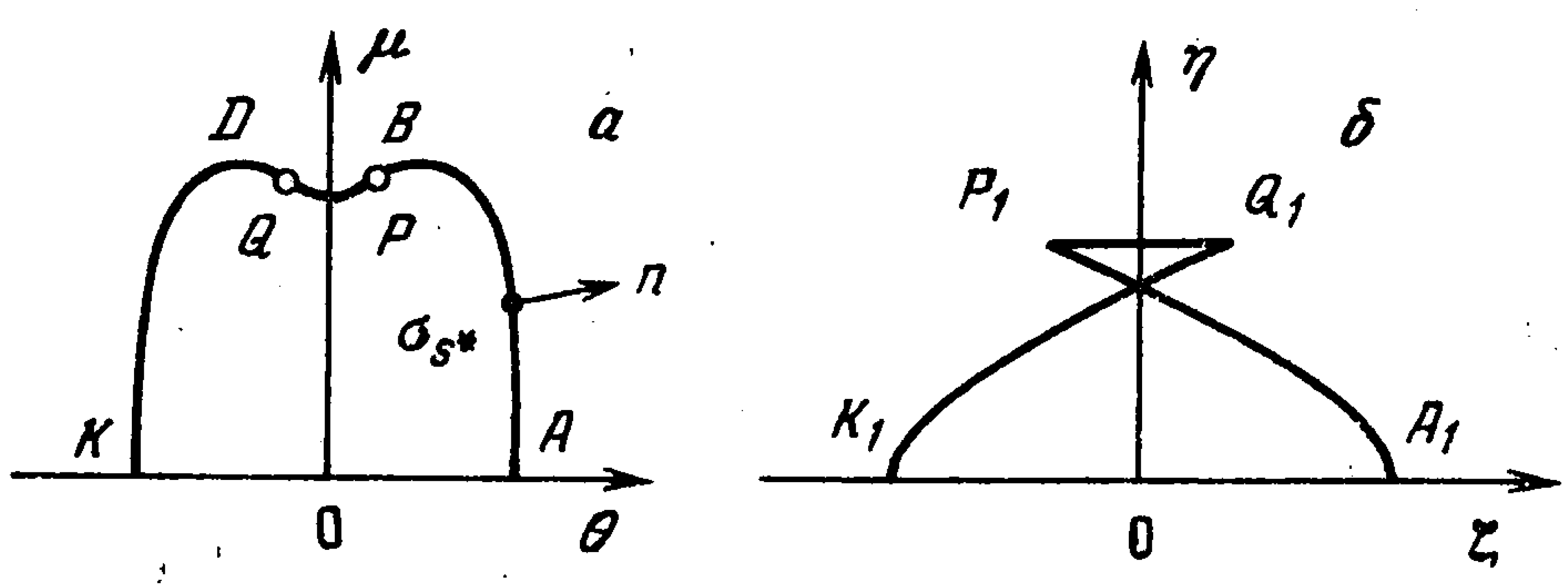
причем допустимы только $\alpha < 1$ [1]. Здесь

$$2\gamma_* = -3(1 - \alpha)^2 + (1 + \alpha)\sqrt{9\alpha^2 - 14\alpha + 9}$$

Все четыре конфигурации приведены на фиг. 1. Значению $\gamma = 2\alpha$ отвечают изотропные среды, когда кривые вещественных нулей — концентрические окружности.



Фиг. 1



Фиг. 2

Характеристическое уравнение $\Delta(\theta, \mu) = 0$ имеет четыре корня. В случае $\alpha = \beta$ можем записать

(1.5) $$\mu_{1,3} = \pm(N_1 - \sqrt{N_1^2 - N_2})^{1/2}, \quad \mu_{2,4} = \pm(N_1 + \sqrt{N_1^2 - N_2})^{1/2}$$
$$2N_1 = (1 + \alpha) b^2 - \theta^2(\gamma / \alpha), \quad b^2 = \rho c_3^{-1}$$
$$N_2 = (a^2 - \theta^2)(b^2 - \theta^2), \quad a^2 = \rho c_1^{-1}$$

Функции $\mu_n(\theta)$, рассматриваемые в произвольной точке вещественной оси θ, могут принимать наряду с вещественными значениями (точки на кривых вещественных нулей) также чисто мнимые значения (в первых двух случаях из четырех (1.4)) или чисто мнимые и комплексные (последние два случая из (1.4)).

Для однозначного определения четырехзначной функции $\mu(\theta)$, являющейся решением характеристического уравнения, необходимо построить четырехлистную поверхность Римана над плоскостью комплексного переменного θ. Поверхность Римана строим, исходя из следующих соображений. Любая прямая $\theta = \text{const}$ на интервале $|\theta| < a$ (а также на интервале $b < |\theta| < \theta^\circ$ в четвертом случае (1.4)) пересекает кривые вещественных нулей в четырех вещественных точках. В двух точках внешняя нормаль к кривым имеет положительную проекцию на ось μ и в двух — отрицательную. Геометрическое место точек первого типа будем обозначать через μ_1 и μ_2. Им будут соответствовать два значения функции $\mu(\theta)$, которые обозначим через $\mu_1(\theta)$ и $\mu_2(\theta)$ (первый и второй листы поверхности Римана). Геометрическое место точек второго типа обозначим μ_3 и μ_4. Соответствующие им два значения функции $\mu(\theta)$ обозначим через $\mu_3(\theta) = -\mu_1(\theta)$ и $\mu_4(\theta) = -\mu_2(\theta)$ (третий и четвертый листы). Отдельные листы соединяются между собой через разрезы, проведенные через точки ветвления внешних и внутренних радикалов в (1.5).

2. Пусть в момент $t = 0$ в неограниченной упругой среде в начале координат $x_1 = x_2 = 0$ включается точечный импульсный источник возмущений. Предполагая, что до момента $t = 0$ среда находилась в покое, получаем, что от точки $x_1 = x_2 = 0$ по всем направлениям будут распространяться квазипродольная и квазипоперечная волны возмущений. Фронты волн являются огибающими семейств прямых $t - \theta x_1 - \mu_l(\theta) x_2 = 0$, $l = p, s$ и определяются из решения системы уравнений, которую запишем в виде

$$t = \mu_l(\theta) r \sin\varphi + \theta r \cos\varphi, \quad \mu_l'(\theta)\sin\varphi + \cos\varphi = 0 \tag{2.1}$$

$$(x_1 = r\cos\varphi, \ x_2 = r\sin\varphi)$$

Здесь значения $\mu_l(\theta)$ относятся к точкам на кривых вещественных нулей.

Второе уравнение из (2.1) определяет точку на кривой вещественных нулей S_l, в которой

$$\mu_l'(\theta) = -\operatorname{ctg}\varphi, \quad \theta = \theta_{l_*} \tag{2.2}$$

Подставляя $\theta = \theta_{l_*}$ в первое из уравнений (2.1), находим t_l, соответствующее времени прибытия возмущения в точку (x_1, x_2).

Значение $l = p$ будем относить к точкам на внутренней кривой и $l = s$ — к точкам на внешней кривой вещественных нулей.

Из (2.2) следует, что если кривые вещественных нулей выпуклые, то волновые фронты представляют собой выпуклые замкнутые кривые без угловых точек. Если внешняя кривая вещественных нулей имеет точки перегиба, то волновой фронт будет иметь угловые точки (точки возврата первого рода). Для конфигурации, приведенной на фиг. 2, *а*, фронты волн будут иметь вид, показанный на фиг. 2, *б* (данная конфигурация возможна в случае $\alpha \neq \beta$), где обозначено $\xi = x_1 / t$, $\eta = x_2 / t$, $\eta > 0$.

Подставляя значение θ_{l_*} в первое из уравнений (2.1), находим

$$v_l^{-1}(\varphi) \equiv t_l / r = \mu_{l_*}\sin\varphi + \theta_{l_*}\cos\varphi, \quad \mu_{l_*} = \mu_l(\theta_{l_*})$$

Отсюда следует, что величина, обратная к скорости $v_l(\varphi)$, с которой возмущение, возникшее в момент $t = 0$ в начале координат, приходит в точку наблюдения (x_1, x_2), равняется проекции вектора, проведенного из начала координат на плоскости $\theta\mu$ в точку σ_{l_*} на кривой вещественных нулей S_l $(\sigma_{l_*} = (\theta_{l_*}, \mu_{l_*}))$, вектор нормали в которой совпадает по направлению с вектором $x = (x_1, x_2)$ на направление этой нормали. Скорость v_l называется лучевой.

На внутренней кривой вещественных нулей S_p всегда имеется только одна точка σ_{p_*}, так как внутренняя кривая всегда выпуклая. Обозначая величины, обратные к лучевым скоростям, через $c_l(\varphi)$, $l = p, s$, имеем

$$c_p(\varphi) = \mu_{p_*} \sin\varphi + \theta_{p_*} \cos\varphi \tag{2.3}$$

Внешняя кривая S_s может быть выпуклой, тогда имеется только одна точка σ_{s_*} и соответственно одно значение $c_s(\varphi)$ для заданного φ

$$c_s(\varphi) = \mu_{s_*} \sin\varphi + \theta_{s_*} \cos\varphi \tag{2.4}$$

или иметь участки вогнутости (точки перегиба). В последнем случае в зависимости от значения φ имеется или одна точка σ_{s_*} (для значений φ, отвечающим лучам, не проходящим через лакуны) и одно значение $c_s(\varphi)$, определяемое формулой (2.4), или три точки $\sigma_{s_*}^{\ j}$ ($j = 1, 2,3$), в которых направления нормалей совпадают с направлением вектора x; имеем

$$c_s^j(\varphi) = \mu_{s_*}^{\ j} \sin\varphi + \theta_{s_*}^{\ j} \cos\varphi, \quad j = 1, 2, 3$$

3. Будем интересоваться решениями вида

$$u = u_1 \exp(igt), \quad w = u_2 \exp(igt)$$

Для стационарной части смещений u_1 и u_2 получаем систему уравнений

$$L_{it}(u_i) = 0, \quad i, t = 1, 2 \tag{3.1}$$

$$L_{11} = c_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + c_3 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + p^2, \quad L_{21} = c_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$L_{22} = c_3 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + c_4 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + p^2, \quad L_{12} = L_{21}, \quad p^2 = \rho g^2$$

которая при условиях (1.2) будет эллиптического типа.

Рассмотрим область G пространства $x_1 x_2$ с границей B. Пусть функции u_1, u_2 в области G дважды непрерывно дифференцируемые и удовлетворяют неоднородной системе уравнений

$$L_{it}(u_i) = F_t \tag{3.2}$$

а функции $v_1^{\ j}$ и $v_2^{\ j}$ ($j = 1,2$) дважды непрерывно дифференцируемые всюду, кроме точки (x_1°, x_2°), и удовлетворяют системе уравнений

$$L_{it}[v_i^j(x, x^\circ)] = \delta_i^{\ j}\, \delta(x - x^\circ)$$
$$(x = (x_1, x_2), \ x^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ))$$

где $\delta_i^{\ j}$ — символ Кронекера. Тогда из формулы Грина для самосопряженного оператора L_{it} [2]

$$\int_G \{u_i L_{it}(v_t) - v_t L_{it}(u_i)\}\, dx = \int_B M_{it}(u_i, v_t)\, ds, \quad dx = dx_1 dx_2$$

получаем

$$u_j(x^\circ) = \int_G v_t^{\ j}(x) F_t(x)\, dx + \int_B M_{it}[u_i(x), v_t^{\ j}(x, x^\circ)]\, ds \tag{3.3}$$

Предполагается, что F_t — достаточно гладкие функции, равные нулю вне некоторой области, целиком лежащей внутри области G. Выражение для M_{it} записывается в виде

$$M_{it}(u_i,\ v_t) = U\,T\,(V) - VT\,(U)$$
$$UT\,(V) = M_1(u_i,\ v_i)\cos\psi + M_2(u_i,\ v_i)\sin\psi$$
$$VT\,(U) = M_1(v_i,\ u_i)\cos\psi + M_2(v_i,\ u_i)\sin\psi$$
$$M_1(u_i,\ v_i) = u_1\sigma_{11}(v_1,\ v_2) + u_2\tau_{12}(v_1,\ v_2)$$
$$M_2(u_i,\ v_i) = u_1\tau_{21}(v_1,\ v_2) + u_2\sigma_{22}(v_1,\ v_2)$$

причем ψ — угол, который составляет внешняя нормаль к контуру с осью x_1, $\sigma_{11} = \sigma_{x_1}$, $\tau_{12} = \tau_{x_1x_2}$, $\tau_{21} = \tau_{x_2x_1}$, $\sigma_{22} = \sigma_{x_2}$ — операторы напряжений, действующие на пространстве вектор-функций, указанных в скобках. Функции v_t^j составляют фундаментальную матрицу оператора L_{it}.

Пусть B — окружность радиуса R с центром в начале координат. Источники, определяемые функциями F_t, находятся в конечной части плоскости, целиком лежащей внутри области G. Будем неограниченно увеличивать область G, устремляя R к бесконечности. Тогда для того, чтобы источники, заданные в конечной части плоскости, однозначно определяли решение задачи в случае неограниченной среды, должно выполняться дополнительное условие

$$\lim_{R\to\infty}\int_B M_{it}\,[u_i,\ v_t^j]\,ds = 0 \tag{3.4}$$

Первый интеграл в (3.3) представляет собой частное решение u_j^1 неоднородной задачи, поскольку является сверткой правой части с фундаментальным решением. Получаем, что при $R\to\infty$

$$u_j' \equiv \int_B M_{it}\,[u_i,\ v_t^j]\,ds = u_j - u_j^1$$

как разность двух решений неоднородной задачи является решением однородной задачи, т. е. удовлетворяет системе $L_{jt}(u'_j) = 0$ во всей плоскости.

Для обеспечения единственности решения неоднородной задачи во всей плоскости на функции u_i в бесконечности достаточно наложить такие условия, чтобы удовлетворяющие им решения однородной задачи могли быть только тождественным путем.

4. *Теорема единственности.* Пусть функции u_i: 1) дважды непрерывно дифференцируемые и удовлетворяют однородной системе уравнений $L_{it}(u_i) = 0$ во всей плоскости $x = (x_1,\ x_2)$; 2) представимы в виде $u_i = u_i^p + u_i^s$, причем

а) функции u_i^p удовлетворяют в окрестности бесконечности условиям

$$u_i^p = O\,(r^{-1/2}),\quad \frac{\partial u_i^p}{\partial r} - ik_p\,(\varphi)\,u_i^p = o\,(r^{-1/2}) \tag{4.1}$$

б) в случае строго выпуклых кривых вещественных нулей при любом φ и в случае, когда на кривых вещественных нулей имеются участки вогнутости,— в угловых областях первого типа функции u_i^s удовлетворяют на бесконечности условиям вида

$$(4.2)\qquad u_i^s = O(r^{-1/2}),\quad \frac{\partial u_i^s}{\partial r} - ik_s(\varphi)\,u_i^s = o(r^{-1/2})$$

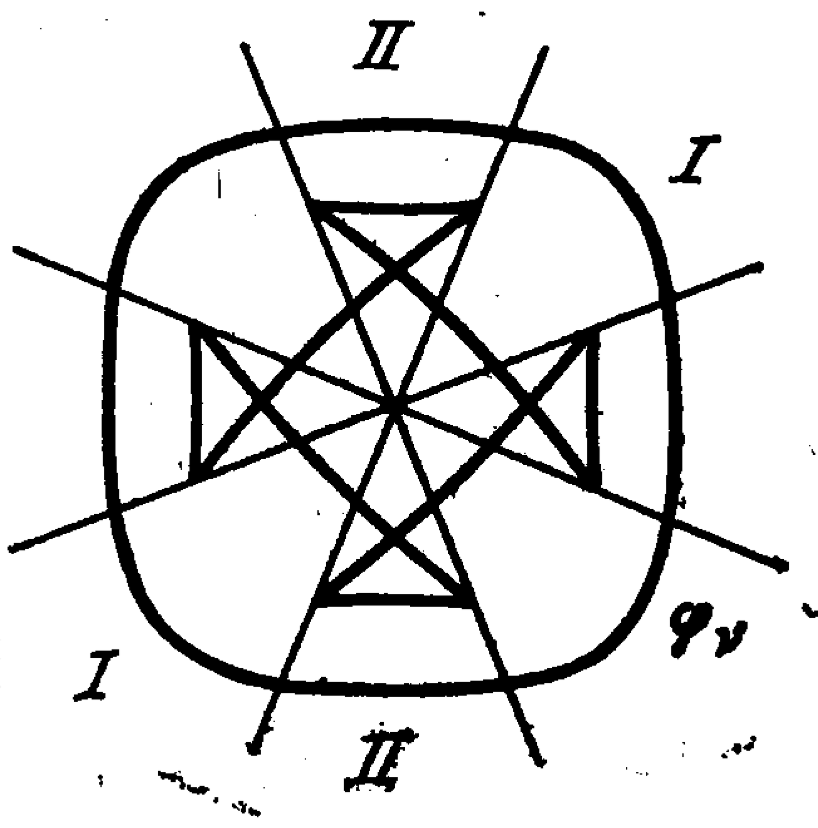
в) в угловых областях второго типа функции u_i^s удовлетворяют на бесконечности условиям

$$(4.3)\qquad u_i^s = \sum_{j=1}^{3} u_{ij}^s,\quad u_{ij}^s = O(r^{-1/2}),\quad \frac{\partial u_{ij}^s}{\partial r} - ik_s^j(\varphi)\,u_{ij}^s = o(r^{-1/2})$$

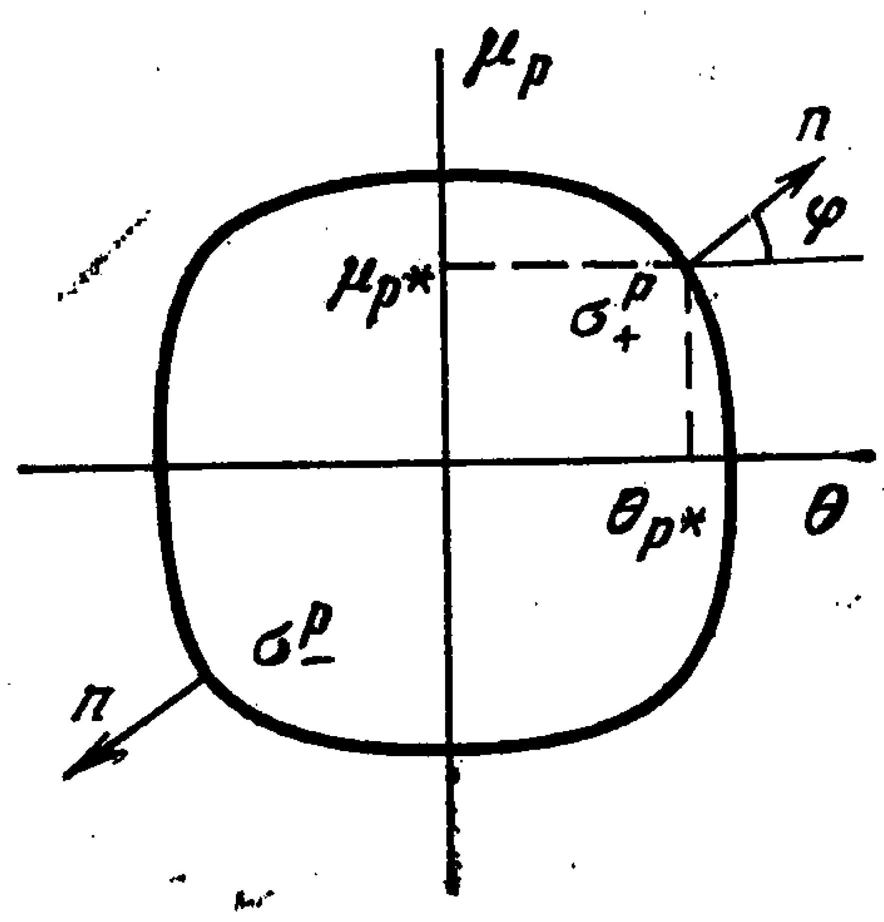
Тогда функции u_i тождественно равны нулю во всей плоскости x_1x_2. Здесь

$$k_p(\varphi) = gc_p(\varphi),\quad k_s(\varphi) = gc_s(\varphi),\quad k_s^j(\varphi) = gc_s^j(\varphi)$$

Разбиение плоскости x_1x_2 в случае, когда на внешней кривой нормалей имеются участки вогнутости, на угловые области первого и второго типа



Фиг. 3



Фиг. 4

производится следующим образом. Из начала координат проводим лучи $\varphi_\nu^*(\nu = 1,2, \ldots, m$; здесь m равно числу точек на кривой вещественных нулей, где кривизна равна нулю) под углами, равными углам наклона нормалей к кривым вещественных нулей в точках, где кривизна равна нулю (точки перегиба). Эти лучи будут проходить через угловые точки на фронтах. К угловым областям первого типа относим угловые области, не содержащие лакун. Угловые области, в которых находятся лакуны, относим ко второму типу. Волновая картина с указанным разбиением плоскости x_1x_2 на угловые области для сред с $\alpha = \beta$, $-2\alpha < \gamma < \alpha(\alpha + 1)$ приведена на фиг. 3.

Рассмотрим прежде всего случай, когда кривые вещественных нулей строго выпуклые. Если $\alpha = \beta$, то это среды с $2\alpha < \gamma < \gamma_*$, $\alpha(\alpha + 1) < \gamma < 2\alpha$. Граничное значение $\gamma = 2\alpha$ относится к изотропным средам. В общем случае $\alpha \neq \beta$ и $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ к данным средам относятся условия

$$\alpha(\beta + 1) < \gamma < \gamma_*^\circ \quad \text{при } \alpha > \beta$$
$$\beta(\alpha + 1) < \gamma < \gamma_*^\circ \quad \text{при } \beta > \alpha$$

Величина $\gamma_*^\circ = \gamma_*(\alpha, \beta)$ приведена в [3].

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

(4.4) $P(D)\,u(x) = f(x)$

Здесь $P(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — некоторый многочлен, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка в n-мерном пространстве, через D обозначен формальный вектор $i^{-1}(d / dx_1, \ldots, d / dx_n)$, через σ обозначим точку $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

Предположим, что выполняются условия:

а) $P(\sigma)$ — гипоэллиптический многочлен;

б) все коэффициенты многочлена $P(\sigma)$ — вещественные числа;

в) для всех вещественных σ, для которых $P(\sigma) = 0$, выполняется условие $\operatorname{grad} P(\sigma) \neq 0$;

г) в каждой точке поверхности вещественных нулей многочлена полная кривизна отлична от нуля.

Из условий б) и в) вытекает, что все вещественные нули многочлена $P(\sigma)$ расположены на одной или на нескольких гладких замкнутых поверхностях размерности $n - 1$. Будем обозначать их через $S_1, \ldots, S_k$.

Рассмотрим одну из поверхностей S_l. Точку поверхности S_l, в которой нормаль к S_l, направленная во внешнюю от S_l сторону, параллельна ω (ω — единичный вектор, $x = \omega r$) и совпадает с ним по направлению, обозначим через $\sigma_+^l(\omega)$, а точку, в которой нормаль имеет противоположное направление, — через $\sigma_-^l(\omega)$. Эти точки определены однозначно, так как каждая из поверхностей S_l строго выпукла (фиг. 4).

Пусть $Q(\omega, D)$ — некоторый фиксированный дифференциальный оператор, коэффициенты которого зависят только от ω, такой, что при любых ω и $1 \leqslant l \leqslant k$ многочлен $Q(\omega, \sigma)$ в одной из точек $\sigma_+^l(\omega)$ и $\sigma_-^l(\omega)$ равен нулю, а в другой — отличен от нуля. Коэффициенты оператора $Q(\omega, D)$ при $x \neq 0$ предполагаются достаточно гладкими.

В [4] доказана следующая теорема единственности: если многочлен $P(\sigma)$ удовлетворяет условиям а) — г), то решение однородного уравнения

(4.5) $P(D)\,u(x) = 0$

удовлетворяющее условиям

(4.6) $u(x) = o(r^{(3-n)/2}), \quad Q(\omega, D)\,u(x) = o(r^{(1-n)/2})$

(4.7) $Q[\omega, \sigma_\pm^l(\omega)] = 0, \quad Q[\omega, \sigma_\mp^l(\omega)] \neq 0, \quad 1 \leqslant l \leqslant k$

обязано быть тождественным нулем. Здесь в индексах берутся верхние или нижние знаки в зависимости от выбора поверхности S_l.

Любые два многочлена $Q_1(\omega, \sigma)$ и $Q_2(\omega, \sigma)$, которые в одной из точек $\sigma_+^l(\omega)$ или $\sigma_-^l(\omega)$ одновременно обращаются в нуль, а в другой в нуль не обращаются, выделяют при помощи условий (4.6), (4.7) одно и то же решение уравнения (4.5).

Согласно [5] всякое решение однородной системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами является также и решением некоторого скалярного уравнения. В рассматриваемом случае уравнение записывается в виде

(4.8) $P(D)u = 0, \quad P(D) = L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}$

где $P(D)$ — дифференциальный оператор четвертого порядка. Для доказательства теоремы достаточно показать, что условия (4.1), (4.2) той же природы, что и условия (4.6), (4.7).

Переписывая выражения, стоящие в (4.1), (4.2) справа, в виде

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} - ik_l(\varphi)\right] u_i^l = o(r^{-1/2}), \quad l = p, s \tag{4.9}$$

и переходя от дифференцирования по радиусу к дифференцированию по x_1, x_2, получаем

$$Q_l(\omega, D) \equiv \frac{\partial}{\partial r} - ik_l(\varphi) = \frac{\partial}{\partial x_1}\cos\varphi + \frac{\partial}{\partial x_2}\sin\varphi - ik_l(\varphi)$$

Заменяя далее формальный вектор $i^{-1}(\partial / \partial x_1, \ \partial / \partial x_2)$ вектором $\sigma = (\sigma_1, \ \sigma_2)$, $\sigma_1 = g\theta$, $\sigma_2 = g\mu$, будем иметь

$$Q_l(\omega, \ \sigma) = ig(\mu \sin\varphi + \theta\cos\varphi) - ik_l(\varphi), \quad l = p,s$$

В качестве $Q(\omega, \ \sigma)$ можно взять многочлен

$$Q_1(\omega, \ \sigma) = Q_p(\omega, \ \sigma)\, Q_s(\omega, \ \sigma)$$

Видно, что $Q_1(\omega, \ \sigma_+^l) = 0$ и $Q_1(\omega, \ \sigma_-^l) \neq 0$ при $l = p, \ s$, если каждый из многочленов $Q_l(\omega, \sigma)$ в соответствующей точке σ_+^l обращается в нуль и в точке σ_-^l в нуль не обращается.

В точках $\sigma_+^l(\omega)$, $\sigma_-^l(\omega)$ (фиг. 4), координаты которых равны $(\theta_{l*}, \ \mu_l(\theta_{l*}))$ и $(-\theta_{l*}, \ -\mu_l(\theta_{l*}))$ соответственно, находим

$$Q_l(\omega, \ \sigma_+^l) = 0, \quad Q_l(\omega, \ \sigma_-^l) = -i2k_l(\varphi)$$

Здесь $l = p$ относится к внутренней и $l = s$ к внешней кривым вещественных нулей. Таким образом, условия (4.6), (4.7) выполняются и, поскольку многочлен $P(\sigma)$, определяемый формулой (4.8), удовлетворяет всем гипотезам а) — г), теорема единственности для системы (3.2) вытекает из теоремы для уравнения (4.5), где $P(\sigma)$ определяется формулой (4.8).

В случае выпуклых кривых вещественных нулей, учитывая асимптотический вид решений неоднородной задачи при $r \to \infty$ [6], условия (4.1), (4.2) можно записать в виде

$$u_i^p = O(r^{-1/2}), \quad \frac{\partial u_i^p}{\partial r} - ik_p(\varphi)\, u_i^p = O(r^{-3/2})$$

$$u_i^s = O(r^{-1/2}), \quad \frac{\partial u_i^s}{\partial r} - ik_s(\varphi)\, u_i^s = O(r^{-3/2})$$

В случае, когда внешняя кривая нормалей имеет точки перегиба, фронты волн имеют остроугольные кромки (точки P_1 и Q_1 на фиг. 2), и направления радиусов векторов, проходящих через угловые точки (P_1 и Q_1), являются особыми. В окрестности данных направлений асимптотика решений неоднородной задачи при $r \to \infty$ не будет равномерной по φ и остаточный член асимптотических разложений не равняется $O(r^{-3/2})$, как в случае обыкновенного направления (или любого φ в случае выпуклых кривых вещественных нулей). Используя асимптотические разложения для окрестности особых направлений, приведенные в [6], доказательство теоремы для случая кривых вещественных нулей, имеющих точки перегиба, можно провести, следуя не работе [4], а путем непосредственной оценки интеграла (3.4), по методу, изложенному в [7].

С точки зрения физического описания процесса распространения установившихся колебаний в анизотропной упругой среде условия (4.1) — (4.3) указывают на то, что решение всякой задачи об установившихся колебаниях неограниченной среды (независимо от конкретного вида и расположения источников, заданных в конечной части пространства) вырождается в бесконечности в бегущие расходящиеся волны, причем кривые равной фазы совпадают с фронтами волн, распространяющихся от сосредоточенного импульсного источника. Отличие от изотропных сред состоит в том, что лучевая скорость в анизотропной среде зависит от направления, и кривые равной фазы не будут окружностями. При переходе к $\alpha = \beta$ и $\gamma = 2\alpha$ (изотропные среды) имеем

$$c_p(\varphi) = a, \quad c_s(\varphi) = b, \quad k_p(\varphi) = k, \quad k_s(\varphi) = l$$

$$k = ga, \quad l = gb, \quad a = \sqrt{\rho / c_1}, \quad b = \sqrt{\rho / c_3}$$

и условия (4.1), (4.2) переходят в известные условия Зоммерфельда для уравнений Гельмгольца. Кривые равной фазы в бесконечности будут представлять собой концентрические окружности.

Каждое из условий (4.1), (4.2) выделяет свой определенный класс единственности решений системы (3.2). Поэтому неоднородная система уравнений (3.2) при заданной правой части допускает одно решение из класса W^p, образуемого функциями u_i^p, и одно решение из класса W^s, образуемого функциями u_i^s. Это означает, что в среде могут распространяться два типа волн — квазипродольная и квазипоперечная.

В рассматриваемом случае всего пространства (плоскости x_1x_2) каждая из типов волн может распространяться отдельно и независимо от другой. Поэтому теорему единственности можно сформулировать отдельно для каждого из классов W^p и W^s.

Иная картина наблюдается, когда переходим к задачам для внешности ограниченных областей (внешности кусочно непрерывно дифференцируемых замкнутых кривых). Здесь в силу определенных условий на границе области оба типа волн оказываются, в общем случае, связанными и решения в отдельно взятом классе W^p или W^s может не существовать.

Формулировка теоремы единственности для внешности ограниченной области G с границей B (внешняя задача теории колебаний) будет отличаться только тем, что всюду в условиях теоремы вместо слов «во всей плоскости x_1x_2» следует писать «во внешности области G» и добавится условие:

д) на границе B области G смещения (или напряжения) равны нулю.

В заключение отметим, что, как и в случае условий Зоммерфельда, главным компонентом условий (4.1) и (4.2) являются соотношения (4.9).

Соотношение $u_i^l = O(r^{-1/2})$ указывает только на то, что решение на бесконечности убывает как $r^{-1/2}$. Таких решений бесконечное число. Указанные условия на бесконечности отвечают расходящимся волнам, когда на бесконечности нет источников возмущений.

Поступила 5 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Будаев В. С.* К оценке степени анизотропии упругих анизотропных сред. ПМТФ, 1975, № 4.
2. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
3. *Будаев В. С.* Распределение колебаний от сосредоточенного импульсного источника в упругой анизотропной полуплоскости. Изв. АН СССР. Физика Земли, 1977, № 2.
4. *Грушин В. В.* Об условиях типа Зоммерфельда для некоторого класса дифференциальных уравнений в частных производных. Матем. сб., 1963, т. 61(103), № 2.
5. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
6. *Будаев В. С.* Об одном классе решений для системы уравнений в частных производных второго порядка динамики упругих анизотропных сред. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 5.
7. *Вайнберг Б. Р.* О некоторых корректных задачах во всей плоскости для гипоэллиптических уравнений. Матем. сб., 1963, т. 62(104), № 2.