Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.3 : 534.1

О НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИН НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Ю. А. Россихин

(Брянск)

Решается задача о колебаниях бесконечной упругой пластины постоянной толщины, покрывающей границу анизотропного упругого полупространства. Предполагается, что трение между пластиной и границей полупространства отсутствует, а в плоскости пластины действуют постоянные нормальные и касательные усилия. Нестационарные колебания вызываются действием на пластину ударных нагрузок, что приводит к появлению в упругом анизотропном полупространстве трех типов плоских ударных волн, за фронтами которых решение строится при помощи лучевых рядов [1].

1. Направление постоянных усилий N_{11}, N_{22}, действующих в плоскости пластины, принимаем за оси x_1, x_2 соответственно, а нормаль к пластине — за ось x_3. Система уравнений, описывающая колебания пластины и динамическое поведение анизотропного полупространства, имеет вид

$$D\Delta\Delta w + \rho_1 h w^{\cdot\cdot} + N_{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} = q, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{1.1}$$

$$\sigma_{ij,j} = \rho v_i^{\cdot\cdot}, \quad \sigma_{ij}^{\cdot} = \lambda_{ijml} v_{m,l} \tag{1.2}$$

Здесь w — прогиб пластинки, D — цилиндрическая жесткость, h — толщина, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, ρ_1 — плотность материала пластинки, $q(x_1, x_2, t)$ — давление полупространства на пластину, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, ρ — плотность материала полупространства, v_i — компоненты вектора скорости перемещений, λ_{ijml} — изотермические коэффициенты жесткости анизотропного материала, латинские индексы принимают значения *1*, *2*, *3*, греческие — *1*, *2*, точки означают производные по времени t, индекс после запятой — производную по соответствующей координате.

Пусть в начальный момент времени точкам пластины сообщается скорость, зависящая от координат x_1, x_2

$$w|_{t=0} = 0, \quad w^{\cdot}|_{t=0} = w_0^{\cdot}(x_\alpha) \tag{1.3}$$

Будем искать величину q в виде ($F_{(k)}$ — неизвестные функции)

$$q = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} F_{(k)}(x_\alpha) t^k \tag{1.4}$$

Внезапное приложение давления к границе анизотропного полупространства приводит к возникновению плоских ударных волн, за фронтами которых искомые функции $Z(x_\alpha, t)$ представляются рядами по степеням $t - x_3 c_{(n)}^{-1} \geqslant 0$, т. е.

$$Z^{(n)}(x_\alpha, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [Z_{,(k)}^{(n)}] \left(t - \frac{x_3}{c_{(n)}}\right)^k \tag{1.5}$$

Здесь $[Z_{,(k)}^{(n)}]$ — скачки производных k-го порядка по времени от функций $Z^{(n)}(x_\alpha, t)$ на фронтах ударных волн, т. е. при $t = x_3 c_{(n)}^{-1}$, индекс n указывает на порядковый номер волны.

Для определения коэффициентов лучевых рядов (1.5) искомых функций σ_{ij}, v_i продифференцируем уравнения системы (1.2) k раз по времени t и возьмем их разность на различных сторонах волновой поверхности. В результате получим

$$[\sigma_{ij,\,j(k)}^{(n)}] = \rho\, [v_{i,\,(k+1)}^{(n)}], \quad [\sigma_{ij,\,(k+1)}^{(n)}] = \lambda_{ijml} [v_{m,\,l(k)}^{(n)}] \tag{1.6}$$

Учитывая условие совместности для разрывов производных $(k+1)$-го порядка от некоторой функции $Z(x_\alpha, t)$ [2]

$$c_{(n)} [Z_{,i(k)}^{(n)}] = -[Z_{,(k+1)}^{(n)}]\, \nu_i + \frac{\delta [Z_{,(k)}^{(n)}]}{\delta t} \nu_i + [Z_{,(k)}^{(n)}]_{,\alpha} x_{i,\alpha} \tag{1.7}$$

из соотношений (1.6) после преобразований имеем

$$\omega_{im}^{(n)} [v_{m,\,(k+1)}^{(n)}] = \Omega_{i(k)}^{(n)}, \quad \omega_{im}^{(n)} = \lambda_{ijml} \nu_j \nu_l - \rho c_{(n)}^2 \delta_{im} \tag{1.8}$$

$$c_{(n)} [\sigma_{ij,\,(k+1)}^{(n)}]\, \nu_j = -\rho c_{(n)}^2 [v_{i,\,(k+1)}^{(n)}] - \lambda_{ijml} \nu_j \nu_l \frac{\delta [v_{m,\,(k)}^{(n)}]}{\delta t} - $$
$$- c_{(n)} \lambda_{ijml} x_{j,\,\alpha} \nu_l [v_{m,\,(k)}^{(n)}]_{,\alpha} + F_{i(n)}^{(k-1)}$$

$$\Omega_{i(k)}^{(n)} = 2\lambda_{ijml} \nu_j \nu_l \frac{\delta [v_{m,\,(k)}^{(n)}]}{\delta t} + c_{(n)} \lambda_{ijml} (x_{l,\,\alpha} \nu_j + x_{j,\,\alpha} \nu_l) [v_{m,\,(k)}^{(n)}]_{,\alpha} - F_{i(n)}^{(k-1)}$$

$$F_{i(n)}^{(k-1)} = \lambda_{ijml} \nu_j \nu_l \frac{\delta^2 [v_{m,\,(k-1)}^{(n)}]}{\delta t^2} + c_{(n)} \lambda_{ijml} (x_{l,\,\alpha} \nu_j + x_{j,\,\alpha} \nu_l) \times$$
$$\times \frac{\delta [v_{m,\,(k-1)}^{(n)}]_{,\alpha}}{\delta t} + c_{(n)}^2 \lambda_{ijml} x_{j,\,\alpha} x_{l,\,\beta} [v_{m,\,(k-1)}^{(n)}]_{,\alpha\beta}$$

Здесь ν_i — нормаль к волновой поверхности, δ_{im} — символ Кронекера, $c_{(n)}$ — скорость распространения ударных волн, $\delta[Z] / \delta t = \lim [([Z]_2 - [Z]_1) / \Delta t]$ при $\Delta t \to 0$, где $[Z]_1$ — значение скачка величины Z в некоторой точке M волновой поверхности $\Sigma(t)$, $[Z]_2$ — значение скачка в точке пересечения с поверхностью $\Sigma(t + \Delta t)$ вектора нормали к поверхности $\Sigma(t)$ в точке M [2].

Из уравнений (1.8) для скачкой нулевого порядка получим

$$\omega_{im}^{(n)} [v_m^{(n)}] = 0, \quad c_{(n)} [\sigma_{ij}^{(n)}]\, \nu_j = -\rho c_{(n)}^2 [v_i^{(n)}]$$

Отсюда следует, что величины $\rho c_{(n)}^2$ — главные значения, а векторы $[v_m^{(n)}]$ — соответствующие главные направления симметричного тензора второго ранга $\lambda_{ijml}\, \nu_j \nu_l$.

Учитывая, что

$$\lambda_{ijml}\nu_j\nu_l = \sum_{j=1}^{3} \rho c_{(f)}^2 l_i^{(f)} l_m^{(f)}, \quad \omega_{im}^{(n)} l_i^{(n)} = 0, \quad \omega_{im}^{(n)} l_i^{(f)} = \rho\,(c_{(f)}^2 - c_{(n)}^2)\, l_m^{(f)}$$
$$(f \neq n)$$

где $l_i^{(n)}$ — единичные векторы главных направлений, из соотношений (1.8) находим

$$(1.9) \qquad 2\rho c_{(n)}^2 \frac{\delta v_{(k)}^{(n,\,n)}}{\delta t} + c_{(n)} b_\alpha^{(n,\,n)} v_{(k),\,\alpha}^{(n,\,n)} = F_{i(n)}^{(k-1)} l_i^{(n)} - c_{(n)} \sum_{\substack{f=1\\(f\neq n)}}^{3} b_\alpha^{(n,\,f)} v_{(k),\,\alpha}^{(n,\,f)}$$

$$v_{(k)}^{(n,\,f)} \rho\,(c_{(f)}^2 - c_{(n)}^2) = 2\rho c_{(f)}^2 \frac{\delta v_{(k-1)}^{(n,\,f)}}{\delta t} + c_{(n)} \sum_{g=1}^{3} b_\alpha^{(f,\,g)} v_{(k-1),\,\alpha}^{(n,\,g)} - F_{i(n)}^{(k-2)} l_i^{(f)}$$
$$(f \neq n)$$

$$F_{i(n)}^{(k)} l_i^{(f)} = \rho c_{(f)}^2 \frac{\delta^2 v_{(k)}^{(n,\,f)}}{\delta t^2} + c_{(n)} \sum_{g=1}^{3} b_\alpha^{(g,\,f)} \frac{\delta v_{(k),\,\alpha}^{(n,\,g)}}{\delta t} + c_{(n)}^2 \sum_{g=1}^{3} a_{\alpha\beta}^{(g,\,f)} v_{(k),\,\alpha\beta}^{(n,\,g)}$$

$$v_{(k)}^{(n,\,f)} = [v_{m,\,(k)}^{(n)}]\, l_m^{(f)}, \quad b_\alpha^{(n,\,f)} = \lambda_{ijml} l_i^{(n)} l_m^{(f)} (x_{l,\,\alpha}\nu_j + x_{j,\,\alpha}\nu_l)$$
$$a_{\alpha\beta}^{(n,\,f)} = \lambda_{ijml} l_i^{(f)} l_m^{(n)} x_{j,\,\alpha} x_{l,\,\beta}$$

Ограничиваясь в дальнейшем тремя членами лучевых рядов для искомых функций, из уравнения (1.9) при $k = 0,\ 1,\ 2$ получим

$$(1.10) \qquad v_{(0)}^{(n,\,n)} = f_{(n)}(y_\alpha), \quad v_{(0)}^{(n,\,f)} = 0 \quad (n \neq f), \quad v_{(1)}^{(n,\,n)} = g_{(n)}(y_\alpha) +$$
$$+ A_{\alpha\beta}^{(n)} f_{(n),\,\alpha\beta} t, \quad v_{(1)}^{(n,\,f)} = \frac{c_{(n)} b_\alpha^{(n,\,f)}}{\rho\,(c_{(f)}^2 - c_{(n)}^2)} f_{(n),\,\alpha}$$

$$v_{(2)}^{(n,\,n)} = k_{(n)}(y_\alpha) + (A_{\alpha\beta}^{(n)} g_{(n),\,\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{(n)} f_{(n),\,\alpha\beta\gamma})\, t + A_{\alpha\beta}^{(n)} A_{\gamma\sigma}^{(n)} \times$$
$$\times f_{(n),\,\alpha\beta\gamma\sigma}\, {}^1\!/_2\, t^2$$

$$v_{(2)}^{(n,\,f)} = B_{\alpha\beta}^{(n,\,f)} f_{(n),\,\alpha\beta} + \frac{c_{(n)} A_{\alpha\beta}^{(n)} b_\gamma^{(n,\,f)}}{\rho\,(c_{(f)}^2 - c_{(n)}^2)} f_{(n),\,\alpha\beta\gamma} t + \frac{c_{(n)} b_\alpha^{(n,\,f)}}{\rho\,(c_{(f)}^2 - c_{(n)}^2)} g_{(n),\,\alpha}$$
$$(n \neq f)$$

$$A_{\alpha\beta}^{(n)} = \frac{1}{2\rho c_{(n)}^2} \left(c_{(n)}^2 a_{\alpha\beta}^{(n,\,n)} - \frac{b_\alpha^{(n,\,n)} b_\beta^{(n,\,n)}}{4\rho} \right) - \frac{1}{2\rho^2} \sum_{\substack{f=1\\(f\neq n)}}^{3} \frac{b_\alpha^{(n,\,f)} b_\beta^{(n,\,f)}}{c_{(f)}^2 - c_{(n)}^2}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{(n)} = \frac{1}{2\rho c_{(n)}} \sum_{\substack{f=1\\(f\neq n)}}^{3} \left\{ \frac{1}{\rho} \left(c_{(n)}^2 a_{\beta\gamma}^{(n,\,f)} - \frac{1}{2\rho} b_\beta^{(n,\,n)} b_\gamma^{(n,\,f)} \right) \frac{b_\alpha^{(n,\,f)}}{c_{(f)}^2 - c_{(n)}^2} - B_{\alpha\beta}^{(n,\,f)} b_\gamma^{(n,\,f)} \right\}$$

$$B_{\alpha\beta}^{(n,\,f)} = -\frac{1}{\rho\,(c_{(f)}^2 - c_{(n)}^2)} \left\{ c_{(n)}^2 a_{\alpha\beta}^{(n,\,f)} - \frac{b_\alpha^{(n,\,f)} b_\beta^{(n,\,n)}}{\rho} \left(\frac{1}{2} - \frac{c_{(f)}^2}{c_{(f)}^2 - c_{(n)}^2} \right) \right\} +$$
$$+ \frac{c_{(n)}^2}{\rho^2 (c_{(f)}^2 - c_{(n)}^2)} \sum_{\substack{g=1\\(g\neq n)}}^{3} \frac{b_\beta^{(n,\,g)} b_\alpha^{(f,\,g)}}{c_{(g)}^2 - c_{(n)}^2} \qquad (n \neq f)$$

Здесь $f_{(n)}$, $g_{(n)}$, $k_{(n)}$ — произвольные функции двух аргументов $y_1 = x_1 - b_1^{(n,\,n)} (2\rho c_{(n)})^{-1} t$, $y_2 = x_2 - b_2^{(n,\,n)} (2\rho c_{(n)})^{-1} t$.

Зная величины $v_{(k)}^{(n,f)}$, определим

$$[v_{m,(k)}^{(n)}] = \sum_{f=1}^{3} v_{(k)}^{(n,f)} l_m^{(f)}$$

затем из (1.8) при k, равном $k-1$, найдем $[\sigma_{ij,(k)}^{(n)}]\nu_j$. Далее при помощи рядов (1.5) подсчитаем компоненты векторов перемещений u_i и силы $\sigma_{ij}\nu_j$ за фронтом каждой ударной волны

$$u_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k!} [v_{i,(k-1)}^{(n)}] \left(t - \frac{x_3}{c_{(n)}}\right)^k \tag{1.11}$$

$$\sigma_{ij}^{(n)}\nu_j = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} [\sigma_{ij,(k)}^{(n)}]\nu_j \left(t - \frac{x_3}{c_{(n)}}\right)^k$$

и, просуммировав эти ряды по n от *1* до *3*, получим

$$u_i = \sum_{n=1}^{3} u_i^{(n)}, \quad \sigma_{ij}\nu_j = \sum_{n=1}^{3} \sigma_{ij}^{(n)}\nu_j \tag{1.12}$$

Произвольные функции $f_{(n)}$, $g_{(n)}$, $k_{(n)}$, входящие в формулы (1.12) определяются из условия, что при $x_3 = 0$ $\sigma_{\alpha j}\nu_j = 0$, $\sigma_{3j}\nu_j = q$. Отсюда, с учетом (1.4), (1.8), (1.10) — (1.12), находим

$$f_{(n)}(x_\alpha) = -\beta_{(n)} F_{(0)}, \quad g_{(n)}(x_\alpha) = -\beta_{(n)} F_{(1)} - \gamma_\alpha^{(n)} F_{(0),\alpha} \tag{1.13}$$

$$k_{(n)}(x_\alpha) = -\beta_{(n)} F_{(2)} - \gamma_\alpha^{(n)} F_{(1),\alpha} - \varkappa_{\alpha\beta}^{(n)} F_{(0),\alpha\beta}$$

Здесь

$$\beta_{(n)} = \frac{\Delta_{3n}}{\rho c_{(n)}\delta}, \quad \gamma_\alpha^{(n)} = \frac{1}{\rho^2 c_{(n)}\delta^2} \sum_{l=1}^{3} M_{i\alpha}^{(l)} \Delta_{in} \frac{\Delta_{3l}}{c_{(l)}}$$

$$\varkappa_{\alpha\beta}^{(n)} = \frac{\Delta_{in}}{\rho c_{(n)}\delta} \sum_{l=1}^{3} \frac{1}{\rho c_{(l)}\delta} \left(M_{i\alpha}^{(l)} \sum_{m=1}^{3} M_{j\beta}^{(m)} \Delta_{jl} \frac{\Delta_{3m}}{\rho c_{(m)}\delta} + G_{i\alpha\beta}^{(l)}\Delta_{3l}\right)$$

$$M_{i\alpha}^{(n)} = \frac{1}{2} b_\alpha^{(n,n)} l_i^{(n)} - \lambda_{ijml}\nu_l x_{j,\alpha} l_{(m)}^{(n)} - c_{(n)}^2 \sum_{\substack{f=1\\(f\neq n)}}^{3} \frac{b_\alpha^{(n,f)}}{c_{(f)}^2 - c_{(n)}^2} l_i^{(f)}$$

$$G_{i\alpha\beta}^{(n)} = -\rho c_{(n)} A_{\alpha\beta}^{(n)} l_i^{(n)} + \frac{1}{4\rho c_{(n)}} b_\alpha^{(n,n)} b_\beta^{(n,n)} l_i^{(n)} - \frac{1}{2\rho c_{(n)}} \lambda_{ijml} (\nu_j x_{l,\beta} +$$

$$+ \nu_l \nu_{j,\beta}) b_\alpha^{(n,n)} l_m^{(n)} + c_{(n)} \lambda_{ijml} x_{j,\alpha} x_{l,\beta} l_m^{(n)} + \sum_{\substack{f=1\\(f\neq n)}}^{3} \Big\{ -\rho c_{(n)} B_{\alpha\beta}^{(n,f)} l_i^{(f)} +$$

$$+ \frac{1}{\rho (c_{(f)}^2 - c_{(n)}^2)} \left(\frac{b_\alpha^{(n,f)} b_\beta^{(n,n)} c_{(f)}^2}{2c_{(n)}} l_i^{(f)} - c_{(n)} \lambda_{ijml} \nu_l x_{j,\beta} b_\alpha^{(n,f)} l_m^{(f)} \right) \Big\}$$

Δ_{ij} — алгебраические дополнения к элементам матрицы $\delta = \| l_i^{(j)} \|$.

При помощи соотношений (1.13) получим выражение u_i через $F_{(0)}$, $F_{(1)}$, $F_{(2)}$. Неизвестные функции $F_{(0)}$, $F_{(1)}$, $F_{(2)}$ находятся из условия непрерывности нормальных перемещений пластины и анизотропного полупространства при $x_3 = 0$. Из этого условия имеем

$$(1.14)\qquad w = -\lambda_3 F_{(0)} t - (\lambda_3 F_{(1)} + \mu_{3\alpha} F_{(0),\alpha})\frac{t^2}{2} -$$
$$-(\lambda_3 F_{(2)} + \mu_{3\alpha} F_{(1),\alpha} + \nu_{3\alpha\beta} F_{(0),\alpha\beta})\frac{t^3}{6}$$
$$\lambda_m = \sum_{n=1}^{3} \beta_{(n)} l_m^{(n)}, \qquad \mu_{m\alpha} = \frac{1}{\rho}\sum_{n=1}^{3}\sum_{\substack{f=1\\(n\neq f)}}^{3} \frac{c_{(n)} l_m^{(f)} b_\alpha^{(n,f)}}{c_{(f)}^2 - c_{(n)}^2}\beta_{(n)} + \sum_{n=1}^{3}\gamma_\alpha^{(n)} l_m^{(n)}$$
$$\nu_{m\alpha\beta} = \frac{1}{\rho}\sum_{n=1}^{3}\sum_{\substack{f=1\\(n\neq f)}}^{3}\left(\frac{c_{(n)} l_m^{(f)} b_\alpha^{(n,f)}}{c_{(f)}^2 - c_{(n)}^2}\gamma_\beta^{(n)} + B_{\alpha\beta}^{(n,f)} l_m^{(f)}\beta_{(n)}\right) + \sum_{n=1}^{3}\varkappa_{\alpha\beta}^{(n)} l_m^{(n)}$$

Так как w — прогиб пластинки, то выражение (1.14) должно удовлетворять начальным условиям (1.3) и уравнению колебаний пластинки (1.1). Начальные условия выполняются, если положить $F_{(0)} = -w_0^{\cdot}\lambda_3^{-1}$. Чтобы удовлетворить уравнению колебаний, нужно подставить формулу (1.14) в (1.1) и приравнять члены при одинаковых степенях t. В результате получим

$$(1.15)\qquad F_{(1)} = \frac{w_0^{\cdot}}{\lambda_3^2\rho_1 h} + \frac{\mu_{3\alpha}}{\lambda_3^2}\dot{w}_{0,\alpha}$$
$$\rho_1 h\lambda_3 F_{(2)} = \left(N_{\alpha\beta} - \frac{\rho_1 h}{\lambda_3^2}\mu_{3\alpha}\mu_{3\beta} + \frac{\rho_1 h}{\lambda_3}\nu_{3\alpha\beta}\right)\dot{w}_{0,\alpha\beta} -$$
$$-2\frac{\mu_{3\alpha}}{\lambda_3^2}\dot{w}_{0,\alpha} - \frac{w_0^{\cdot}}{\lambda_3^2\rho_1 h} + D\Delta\Delta w_0^{\cdot}$$

Зная $F_{(0)}$, $F_{(1)}$, $F_{(2)}$, найдем по формуле (1.14) искомый прогиб w.

2. Предположим, что материал полупространства — гексагональный кристалл цинка [3]. В этом случае два главных значения симметричного тензора $\lambda_{ijml}\nu_j\nu_l$ совпадают ($\rho c_{(1)}^2 = \rho c_{(2)}^2 = \lambda_{1313}$), а соответствующие им главные направления лежат в плоскости x_1x_2 (главное направление, соответствующее третьему главному значению $\rho c_{(3)}^2 = \lambda_{3333}$, совпадает с осью x_3).

Считая, что главными осями служат оси x_1, x_2, x_3, находим

$$(2.1)\qquad l_i^{(i)} = 1, \quad l_i^{(j)} = 0 \quad (i\neq j), \quad b_\alpha^{(\gamma,\sigma)} = b_\alpha^{(3,3)} = 0$$
$$b_\alpha^{(\beta,3)} = b_\alpha^{(3,\beta)} = l_\alpha^{(\beta)}(\lambda_{1313} + \lambda_{1133}), \quad a_{\alpha\alpha}^{(i,i)} = \lambda_{\alpha i\alpha i}$$
$$a_{12}^{(1,2)} = a_{21}^{(2,1)} = \lambda_{1212}, \quad a_{21}^{(1,2)} = a_{12}^{(2,1)} = \lambda_{1122}$$
$$a_{\alpha\alpha}^{(1,2)} = a_{\alpha\alpha}^{(2,1)} = a_{\alpha\beta}^{(\gamma,3)} = a_{\beta\alpha}^{(3,\gamma)} = a_{12}^{(i,i)} = a_{21}^{(i,i)} = 0$$

Учитывая соотношения (2.1), из (1.9) получаем

$$(2.2)\qquad v_{(0)}^{(3,3)} = f_{(3)}(\varkappa_\alpha), \quad v_{(0)}^{(3,\beta)} = v_{(0)}^{(1,3)} = 0, \quad v_{(0)}^{(1,\beta)} = f_{(\beta)}(x_\alpha)$$
$$v_{(1)}^{(3,3)} = g_{(3)}(\varkappa_\alpha) + \frac{a}{2\rho}f_{(3),\alpha\alpha}t, \quad v_{(1)}^{(3,\beta)} = -c_{(3)}bf_{(3),\beta}$$
$$v_{(1)}^{(1,3)} = c_{(1)}bf_{(\alpha),\alpha}, \quad v_{(1)}^{(1,\beta)} = g_\beta(x_\alpha) + \frac{1}{2\rho}(df_{(\alpha),\beta\alpha} + \lambda_{1212}f_{(\beta),\alpha\alpha})t$$
$$v_{(2)}^{(3,3)} = k_{(3)}(\varkappa_\alpha) + \frac{a}{2\rho}g_{(3),\alpha\alpha}t + \frac{a^2}{8\rho^2}f_{(3),\alpha\alpha\beta\beta}t^2$$
$$v_{(2)}^{(3,\beta)} = -bc_{(3)}g_{(3),\beta} - c_{(3)}\frac{ba}{2\rho}f_{(3),\alpha\alpha\beta}t$$

$$v_{(2)}^{(1,3)} = c_{(1)} b g_{(\alpha),\alpha} + \frac{c_{(1)} b}{2\rho} (d + \lambda_{1212}) f_{(\alpha),\alpha\beta\beta} t$$

$$v_{(2)}^{(1,\beta)} = k_{(\beta)}(x_\alpha) + \frac{1}{2\rho} (d g_{(\alpha),\alpha\beta} + \lambda_{1212} g_{(\beta),\alpha\alpha}) t +$$

$$+ \frac{1}{8\rho^2} \{d(d + 2\lambda_{1212}) f_{(\alpha),\alpha\beta\sigma\sigma} + \lambda_{1212}^2 f_{(\beta),\alpha\alpha\sigma\sigma}\} t^2$$

$$a = be + \lambda_{1313}, \quad b = (\lambda_{3333} - \lambda_{1313})^{-1} e$$

$$d = \lambda_{1212} + \lambda_{1122} - be, \quad e = \lambda_{1313} + \lambda_{1133}$$

$$v_{(k)}^{(3,m)} = [v_{m,(k)}^{(3)}], \quad v_{(k)}^{(1,m)} = [v_{m,(k)}^{(1)}]$$

В двух последних соотношениях индексы *3*, *1* соответствуют волнам, распространяющимся со скоростями $c_{(3)}$, $c_{(1)}$.

Произвольные функции $f_{(n)}$, $g_{(n)}$, $k_{(n)}$ определяются так:

$$f_{(3)} = -\frac{F_{(0)}}{\rho c_{(3)}}, \quad f_{(\beta)} = 0, \quad g_{(3)} = -\frac{F_{(1)}}{\rho c_{(3)}} \tag{2.3}$$

$$g_{(\beta)} = -\frac{c_{(1)}(1+b)}{\rho c_{(3)}} F_{(0),\beta}$$

$$k_{(3)} = -\frac{1}{\rho c_{(3)}} \left\{ F_{(2)} + \frac{F_{(0),\alpha\alpha}}{\rho c_{(3)}} \left[c_{(3)} \left(\frac{a}{2} - \lambda_{1133} b \right) + c_{(1)} (1+b)(\lambda_{1133} - \lambda_{3333} b) \right] \right\}$$

$$k_{(\beta)} = -\frac{c_{(1)}(1+b)}{\rho c_{(3)}} F_{(1),\beta}$$

При помощи уравнений (2.2), (2.3), (1.1) прогиб пластины запишем в виде

$$w = -\frac{F_{(0)}}{\rho c_{(3)}} t - \frac{1}{2} \frac{F_{(1)}}{\rho c_{(3)}} t^2 - \frac{1}{6\rho c_{(3)}} (F_{(2)} + \varepsilon F_{(0),\alpha\alpha}) t^3 \tag{2.4}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho c_{(3)}} \left[c_{(3)} \left(\frac{a}{2} - \lambda_{1133} b \right) + c_{(1)} (1+b) \lambda_{1133} - \right.$$

$$\left. - c_{(1)} c_{(3)} \rho b (1+b)(c_{(3)} - c_{(1)}) \right]$$

$$F_{(0)} = -\rho c_{(3)} w_0^{\cdot}, \quad F_{(1)} = \frac{\rho^2 c_{(3)}^2}{\rho_1 h} w_0^{\cdot}, \quad F_{(2)} = -\frac{\rho^3 c_{(3)}^3}{\rho_1^2 h^2} w_0^{\cdot} +$$

$$+ \frac{\rho c_{(3)}}{\rho_1 h} D \Delta\Delta w_0^{\cdot} + \rho c_{(3)} \varepsilon w_{0,\alpha\alpha}^{\cdot} + \frac{\rho c_{(3)}}{\rho_1 h} N_{\alpha\beta} w_{0,\alpha\beta}^{\cdot}$$

Если

$$w_0^{\cdot} = v_0 \sin l_1 x_1 \sin l_2 x_2 \ (v_0, l_1, l_2 = \mathrm{const}), \qquad N_{12} = 0$$

то

$$w = v_0 \left[t - \frac{1}{2} \frac{\rho c_{(3)}}{\rho_1 h} t^2 + \frac{1}{6\rho_1 h} \left(\frac{\rho^2 c_{(3)}^2}{\rho_1 h} + r \right) t^3 \right] \sin l_1 x_1 \sin l_2 x_2 \tag{2.5}$$

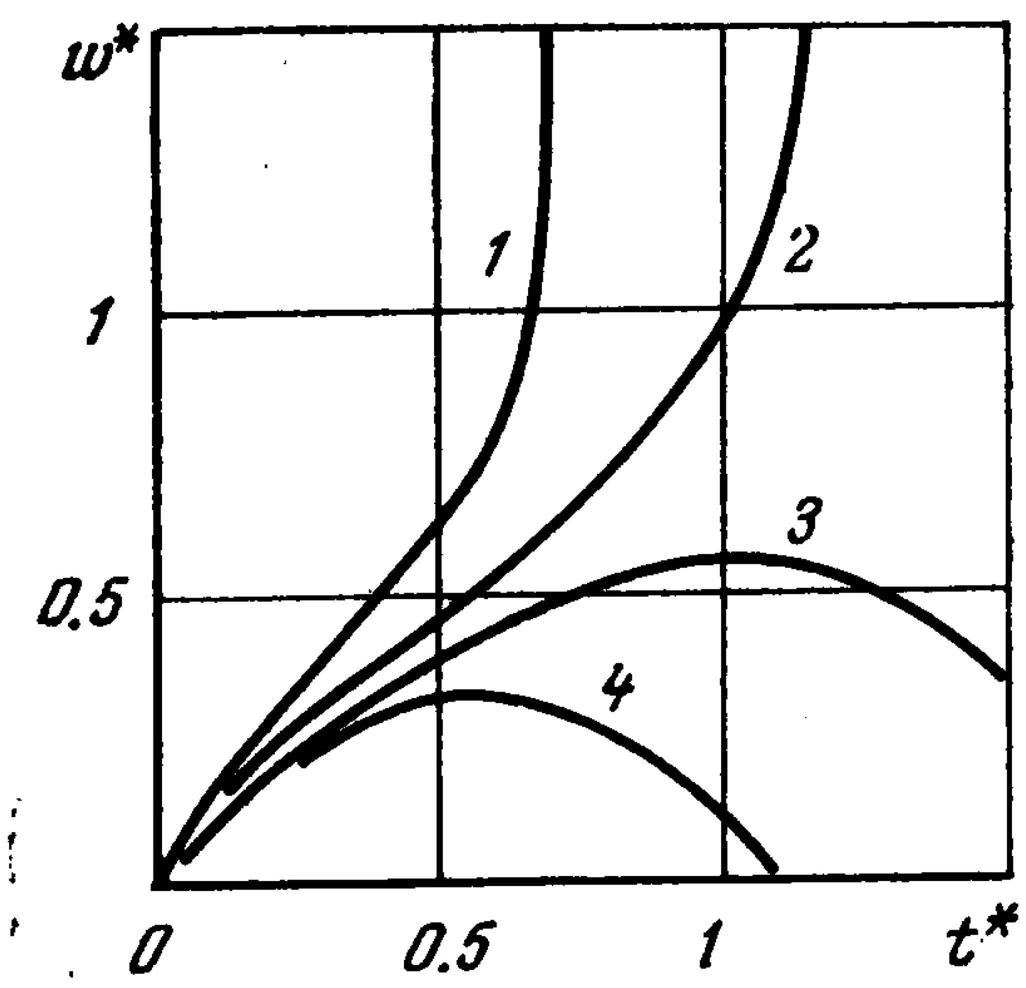
$$r = -D(l_1^2 + l_2^2) + (N_{11} l_1^2 + N_{22} l_2^2)$$

На фигуре представлена зависимость безразмерного прогиба $w^* = w c_{(3)} (v_0 h)^{-1}$ от безразмерного времени $t^* = t c_{(3)} h^{-1}$. Кривые *1—4* соответствуют следующим значениям $r^* = r h \rho_1^{-1} c_{(3)}^{-2}$: 11.19, 2.19, —0.81, —3.81. Отношение $\rho \rho_1^{-1}$ принималось равным 0.9.

Видно, что прогиб пластины зависит от знака величины r^*: для положительных r^* (это соответствует превышению нормальными усилиями критического значения по

Эйлеру [4]) он монотонно возрастает с течением времени, для отрицательных — проходит максимум.

Таким образом, если $w_0^*(x_\alpha)$ — непрерывная, бесконечное число раз дифференцируемая на всей плоскости x_1x_2 функция, то задача о колебаниях пластины может быть полностью решена при помощи лучевых рядов.



Если начальная скорость (начальное напряжение), приложенная к пластине, имеет одну или несколько линий разрыва, на которых меняются скачком сама начальная скорость или ее производные любого порядка, то изложенный метод неприменим. Это связано с перемещением линий разрыва как вдоль пластины (с бесконечной скоростью), так и вдоль границы полупространства (со скоростью волн Релея), что не учитывается полученным решением.

Поступила 11 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Achenbach J. D., Reddy D. P.* Note on wave propagation in linearly viscoelastic media. Z. angew. Math. und Phys., 1967, Bd 18, H.1.
2. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964.
3. *Най Дж.* Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. М., «Мир», 1967.
4. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н., Швайко Ю. Ю.* Теория аэрогидроупругости. В сб.: Прочность. Устойчивость. Колебания. Т. 3. М., «Машиностроение», 1968.