Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЯМ СОВМЕСТНОСТИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Б. А. Горлач

(Куйбышев)

В квадратичном приближении, с учетом сдвиговой деформации получены формулы для определения коэффициентов Ляме, главных радиусов кривизны координат точек срединной поверхности произвольной оболочки вращения после ее нагружения осесимметричной нагрузкой. Коэффициенты Ляме и радиусы кривизны деформированной оболочки удовлетворяют условиям Кодацци — Гаусса и связанным с ними уравнениям совместности конечных деформаций.

Показано, что уравнения совместности конечных деформаций, полученные в работе из условия равенства нулю тензора несовместности деформации [1] трехмерного тела, тождественно удовлетворяются, если компоненты малых деформаций удовлетворяют соответствующим линейным уравнениям совместности деформаций срединной поверхности оболочки.

1. Условия совместности конечных деформаций срединной поверхности оболочек вращения. Исходим из равенства нулю тензора несовместности деформаций, равного разности тензоров Римана — Кристоффеля в деформированном R_{krmn} и недеформированном r_{krmn} состояниях

$$R_{krmn} - r_{krmn} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь и в дальнейшем большие латинские буквы обозначают функции деформированного состояния, аналогичные строчные буквы — недеформированного. Индексы k, r, m, n и другие пробегают значения от 1 до 3.

Компоненты тензора Римана — Кристоффеля выражаются через символы Кристоффеля первого рода P_{krm} и компоненты метрического тензора $G^{\alpha\beta}$ следующим образом [2]:

$$R_{krmn} = \frac{\partial P_{nmk}}{\partial x^r} - \frac{\partial P_{nmr}}{\partial x^k} + G^{\alpha\beta}(P_{\beta mr}P_{\alpha nk} - P_{\beta mk}P_{\alpha nr}) \tag{1.2}$$

(x^r — материальные координаты точек среды; по повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до 3). Аналогичный вид имеет тензор r_{krmn}.

Определяя тензор конечной деформации ξ_{kr} как полуразность компонент метрических тензоров [2]

$$\xi_{kr} = {}^1/_2\,(G_{kr} - g_{kr}) \tag{4.3}$$

уравнения совместности (1.1) перепишем в виде

$$\frac{\partial \xi_{nmk}}{\partial x^r} - \frac{\partial \xi_{nmr}}{\partial x^k} + G^{\alpha\beta}\left[(\xi_{\beta mr} + p_{\beta mr})(\xi_{\alpha nk} + p_{\alpha nk}) - \right. \tag{1.4}$$

$$\left. - (\xi_{\beta mk} - p_{\beta mk})(\xi_{\alpha nr} + p_{\alpha nr})\right] - g^{\alpha\beta}(p_{\beta mr}p_{\alpha nk} - p_{\beta mk}p_{\alpha nr}) = 0$$

$$\xi_{nmk} = P_{nmk} - p_{nmk} = \frac{\partial \xi_{mn}}{\partial x^k} + \frac{\partial \xi_{nk}}{\partial x^m} - \frac{\partial \xi_{mk}}{\partial x^n} \tag{1.5}$$

$$P_{nmk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G_{nm}}{\partial x^k} + \frac{\partial G_{nk}}{\partial x^m} - \frac{\partial G_{mk}}{\partial x^n}\right), \quad p_{nmk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{nm}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{nk}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^n}\right)$$

Контравариантные компоненты метрического тензора $G^{\alpha\beta}$ определяются как элементы матрицы, обратной $G_{\alpha\beta}$ [2]

$$\| G^{\alpha\beta} \| = \| G_{\alpha\beta} \|^{-1} = \| g_{\alpha\beta} + 2\xi_{\alpha\beta} \|^{-1}$$

Элементы этой матрицы могут быть получены следующим образом [1]:

$$G^{\alpha\beta} = \frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial G_{\beta\alpha}}, \quad G = \det \| G_{\alpha\beta} \| \tag{1.6}$$

Подстановка (1.6) в (1.4) позволяет избавиться в уравнениях совместности от компонент метрического тензора деформированного состояния.

Дальнейшее преобразование уравнений совместности (1.4) в общем виде нецелесообразно из-за громоздкости. Преобразуем эти уравнения для осесимметрично деформируемых оболочек, материальные координаты которых в исходном состоянии взаимно ортогональны. В этом случае

$$g_{12} = g_{23} = g_{13} = 0, \quad G_{12} = G_{23} = 0, \quad \xi_{12} = \xi_{23} = 0$$

Вводя коэффициенты Ляме $h_{(k)}$ для ортогональных координат [1]

$$g_{11} = h_{(1)}{}^2, \; g_{22} = h_{(2)}{}^2, \; g_{33} = h_{(3)}{}^2 \tag{1.7}$$

выразим компоненты тензора деформаций через их физические компоненты $\xi_{(kr)}$

$$\xi_{kr} = h_{(k)}h_{(r)}\xi_{(kr)} \tag{1.8}$$

При преобразовании уравнений совместности (1.4) использовались шесть соотношений Ляме [1]. Эти соотношения для осесимметричных оболочек вращения в предположении о линейном законе распределения коэффициентов Ляме по их толщине сводятся к двум соотношениям Кодацци — Гаусса

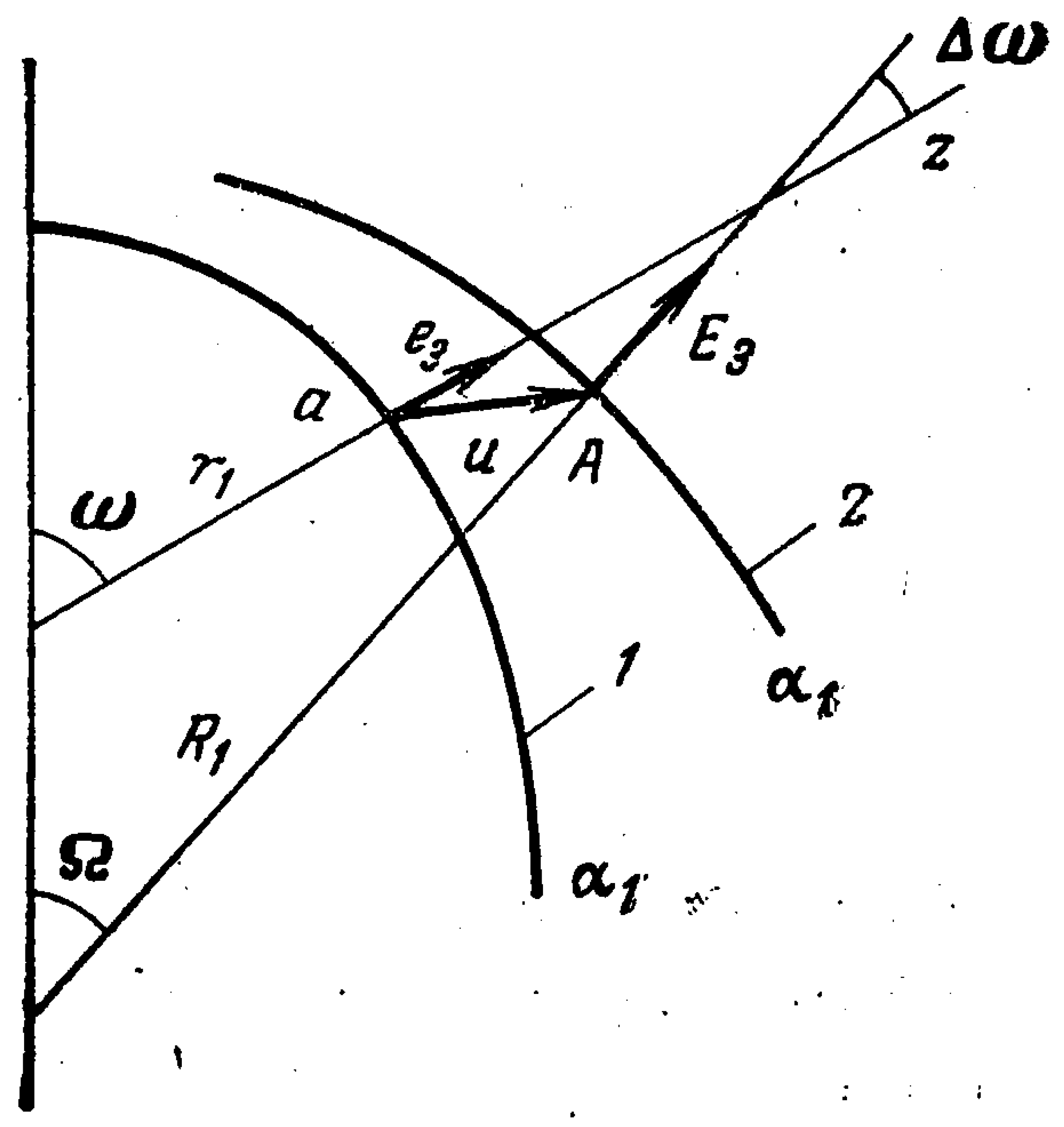
$$\frac{d}{d\alpha_1}\left(\frac{h_2}{r_2}\right) - \frac{1}{r_1}\frac{dh_2}{d\alpha_1} = 0, \quad \frac{d}{d\alpha_1}\left(\frac{1}{h_1}\frac{dh_2}{d\alpha_1}\right) + \frac{h_1h_2}{r_1r_2} = 0 \tag{1.9}$$

$$\left(h_{(1)} = h_1\left(1 + \frac{z}{r_1}\right), \quad h_{(2)} = h_2\left(1 + \frac{z}{r_2}\right), \quad h_{(3)} = 1\right)$$

Здесь h_1, h_2 — коэффициенты Ляме срединной поверхности оболочки, r_1, r_2 — радиусы ее кривизны, $\alpha_1 = x^1$ — криволинейная координата, направленная вдоль образующей оболочки, $z = x^3$ — прямолинейная координата, ортогональная срединной поверхности недеформированной оболочки (последняя показана на фигуре кривой *1*) и направленная в сторону ее внешней нормали (фигура).

Для оболочки вращения при выполнении первого из соотношений (1.9) второе обращается в тождество.

Приведем к срединной поверхности оболочки деформации $\xi_{(kr)}$. Если воспользоваться линейным распределением перемещений по толщине оболочки, можно получить следующие зависимости между конечными деформациями произвольной точки оболочки $\xi_{(kr)}$ с одной стороны и конечными деформациями срединной поверхности ε_{kr} и изменениями кривизн χ_{kr} — с другой:



$$
(1.10) \qquad \begin{aligned}
&\xi_{(11)}\left(1+\frac{z}{r_1}\right)=\varepsilon_{11}+z\chi_{11}\\
&\xi_{(22)}\left(1+\frac{z}{r_2}\right)=\varepsilon_{22}+z\chi_{22}\\
&\xi_{(13)}\left(1+\frac{z}{r_1}\right)=\varepsilon_{13}+z\chi_{13}\\
&\xi_{(33)}=\varepsilon_{33},\quad \chi_{33}=0
\end{aligned}
$$

Компоненты тензора конечной деформации срединной поверхности ε_{kr} и χ_{kr} можно выразить через компоненты тензора малой деформации e_{kr} и изменения кривизн $\varkappa_{kr}$, если воспользоваться формулой (3.9.1) (см. [1], стр. 78). Из нее следует (ϑ — угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки)

$$
(1.11) \qquad \begin{aligned}
&\varepsilon_{11}=e_{11}+{}^1/_2\,[e_{11}{}^2+(\vartheta-2e_{13})^2],\qquad \varepsilon_{22}=e_{22}+{}^1/_2 e_{22}{}^2\\
&\varepsilon_{33}={}^1/_2\vartheta^2,\quad \varepsilon_{13}=e_{13}+{}^1/_2\,e_{11}\vartheta\\
&\chi_{11}=\varkappa_{11}+\frac{1}{2r_1}\,[e_{11}(2r_1\varkappa_{11}-e_{11})+\vartheta^2-4e_{13}^2]\\
&\chi_{22}=\varkappa_{22}+e_{22}\left(\varkappa_{22}-\frac{e_{22}}{2r_2}\right),\quad \chi_{13}=\frac{1}{2}\varkappa_{11}\vartheta
\end{aligned}
$$

Остальные компоненты ε_{kr} и χ_{kr} обращаются в нуль. Можно показать и это сделано, например в [3], что для осесимметричных оболочек

$$
(1.12) \qquad \varkappa_{11}=\frac{1}{h_1}\frac{d\vartheta}{d\alpha_1},\quad \varkappa_{22}=\frac{\vartheta}{h_1h_2}\frac{dh_2}{d\alpha_1}
$$

Подставляя в уравнения совместности деформаций (1.4) соотношения (1.5), (1.6), приводя полученные после этого выражения к срединной поверхности оболочки с использованием соотношений (1.7) — (1.10) и ограничиваясь квадратичным приближением, придем к двум дифференциальным соотношениям

$$
(1.13) \qquad \begin{aligned}
&\frac{d}{d\alpha_1}\left[-\frac{1}{h_1}\frac{d}{d\alpha_1}(h_2\varepsilon_{22})+\frac{\varepsilon_{11}}{h_1}\frac{dh_2}{d\alpha_1}+2\,\frac{h_2}{r_2}\varepsilon_{13}\right]+\frac{h_1h_2}{r_1r_2}(2\varepsilon_{33}-r_1\chi_{11}-r_2\chi_{22})+\\
&+\frac{h_1h_2}{r_1r_2}\,[2\varepsilon_{33}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}-2\varepsilon_{33}+r_1\chi_{11}+r_2\chi_{22})-(\varepsilon_{11}+r_1\chi_{11})\times\\
&\times(\varepsilon_{22}+r_2\chi_{22})-4\varepsilon_{13}^2]+\frac{2}{h_1}\frac{dh_2}{d\alpha_1}\left[(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{11})\frac{d\varepsilon_{11}}{d\alpha_1}+\frac{h_1}{r_1}\varepsilon_{13}(r_1\chi_{11}-\right.\\
&\left.-\varepsilon_{11}+2\varepsilon_{22}-2\varepsilon_{33})-2\varepsilon_{13}\frac{d\varepsilon_{13}}{d\alpha_1}\right]+\frac{h_2}{h_1}\frac{d\varepsilon_{22}}{d\alpha_1}\frac{d}{d\alpha_1}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})+\\
&+2h_2\varepsilon_{13}\left(\frac{1}{r_1}\frac{d\varepsilon_{22}}{d\alpha_1}+\frac{1}{r_2}\frac{d\varepsilon_{11}}{d\alpha_1}\right)+2\,\frac{h_2}{r_2}\frac{d\varepsilon_{13}}{d\alpha_1}(r_2\chi_{22}-\varepsilon_{22}-2\varepsilon_{33})=0
\end{aligned}
$$

$$\frac{d}{d\alpha_1}(h_2\chi_{22}) - \frac{h_2}{r_1}\frac{d\varepsilon_{22}}{d\alpha_1} - \chi_{11}\frac{dh_2}{d\alpha_1} + (\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})\frac{1}{r_1}\frac{dh_2}{d\alpha_1} + 2\varepsilon_{13}\frac{h_1h_2}{r_1r_2} - \frac{h_2}{r_2}\frac{d\varepsilon_{33}}{d\alpha_1} +$$
$$+\frac{2}{r_1}\frac{dh_2}{d\alpha_1}[(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})(r_1\chi_{11}-\varepsilon_{11}) - 2\varepsilon_{13}^2] + 2\varepsilon_{13}(r_1\chi_{11}+r_2\chi_{22} -$$
$$-\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\frac{h_1h_2}{r_1r_2} - \frac{h_2}{r_2}\frac{d\varepsilon_{22}}{d\alpha_1}\left[\frac{r_2}{r_1}(r_1\chi_{11}-\varepsilon_{11}) + r_2\chi_{22} - \varepsilon_{22}\right] = 0$$

Уравнения (1.13) — уравнения совместности конечных деформаций срединной поверхности оболочек вращения. После подстановки в них соотношений (1.11) и (1.12) уравнения совместности можно привести к виду

$$(1.14) \qquad (1+e_{22})\frac{d\Psi}{d\alpha_1} - \left(\frac{de_{11}}{d\alpha_1} + 2e_{13}\frac{h_1}{r_1}\right)\Psi = 0$$
$$\left(1+e_{22}-e_{11}+\frac{r_1}{h_1}\frac{d\vartheta}{d\alpha_1}\right)\Psi = 0$$
$$\left(\Psi = \frac{1}{h_1}\frac{d}{d\alpha_1}(h_2e_{22}) - \frac{e_{11}}{h_1}\frac{dh_2}{d\alpha_1} + (\vartheta - 2e_{13})\frac{h_2}{r_2}\right)$$

Последнее выражение соответствует линейной части уравнения совместности малых деформаций осесимметричных оболочек вращения [3].

Из второго уравнения (1.14) с учетом того, что при произвольных деформациях сомножитель в скобках отличен от нуля, следует

$$(1.15) \qquad \Psi = 0$$

При соблюдении условия (1.15) первое уравнение (1.14), очевидно, обращается в тождество.

Таким образом, уравнения совместности конечных деформаций осесимметрично деформируемых оболочек вращения будут тождественно удовлетворены, если удовлетворяется линейное уравнение совместности (1.15).

2. Определение геометрических характеристик деформированной оболочки. Воспользуемся зависимостью между коэффициентами Ляме в деформированном и недеформированном состояниях [4]

$$(2.1) \qquad H_1 = h_1\sqrt{1+2\varepsilon_{11}}, \quad H_2 = h_2\sqrt{1+2\varepsilon_{22}}$$

Подставляя в (2.1) выражения (1.11), раскладывая множители при h_1 и h_2 в степенной ряд и ограничиваясь квадратами компонент малой деформации, получим

$$(2.2) \qquad H_1 = h_1[1+e_{11}+{}^1/_2(\vartheta - 2e_{13})^2], \quad H_2 = h_2(1+e_{22})$$

Для определения радиусов кривизны деформированной поверхности R_1 и R_2 воспользуемся формулами, приведенными в монографии [5]

$$(2.3) \qquad \frac{1}{R_1} = -\frac{1}{H_1}\frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial\alpha_1}\cdot\mathbf{E}_3, \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{1}{H_2}\frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial\alpha_1}\cdot\mathbf{E}_3$$

Здесь $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ — базисные орты деформированного состояния.

Свяжем радиус-вектор деформированного состояния $\mathbf{R}$ с радиус-вектором исходного состояния $\mathbf{r}$ и вектором перемещения $\mathbf{u}$

$$(2.4) \qquad \mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{u}$$

Это равенство позволяет выразить базисные единичные векторы деформированного состояния через базисные векторы недеформированного состояния $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Следуя [1], запишем ($\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ — ковариантные базисные векторы)

$$(2.5)\qquad \mathbf{E}_1=\frac{\mathbf{R}_1}{H_1},\quad \mathbf{E}_2=\frac{\mathbf{R}_2}{H_2}\quad \left(\mathbf{R}_1=\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\alpha_1},\ \mathbf{R}_2=\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\alpha_2}\right)$$

Раскладывая вектор перемещения $\mathbf{u}$ по базисным векторам исходного состояния и взяв производную от $\mathbf{R}$ по координате α_1, получим

$$(2.6)\qquad \mathbf{R}_1=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1}\mathbf{e}_1+\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1}\mathbf{e}_2+\frac{\partial u_3}{\partial\alpha_1}\mathbf{e}_3+u_1\frac{\partial\mathbf{e}_1}{\partial\alpha_1}+u_2\frac{\partial\mathbf{e}_2}{\partial\alpha_1}+u_3\frac{\partial\mathbf{e}_3}{\partial\alpha_1}$$

$$(\mathbf{u}=u_1\mathbf{e}_1+u_2\mathbf{e}_2+u_3\mathbf{e}_3)$$

Используя далее деривационные формулы для осесимметричной поверхности [5]

$$\frac{\partial\mathbf{e}_1}{\partial\alpha_1}=-\frac{h_1}{r_1}\mathbf{e}_3,\quad \frac{\partial\mathbf{e}_2}{\partial\alpha_1}=0,\quad \frac{\partial\mathbf{e}_3}{\partial\alpha_1}=\frac{h_1}{r_1}\mathbf{e}_1$$

преобразуем (2.6) к виду

$$(2.7)\qquad \mathbf{R}_1=h_1\left[(1+e_{11})e_1-(\vartheta-2e_{13})\mathbf{e}_3\right]$$

Аналогично можно получить

$$(2.8)\qquad \mathbf{R}_2=h_2(1+e_{22})\mathbf{e}_2$$

В последних формулах

$$e_{11}=\frac{1}{h_1}\frac{du_1}{d\alpha_1}+\frac{u_3}{r_1},\quad e_{22}=\frac{u_1}{h_1h_2}\frac{dh_2}{d\alpha_1}+\frac{u_3}{r_2}$$

$$\vartheta-2e_{13}=\frac{u_1}{r_1}-\frac{1}{h_1}\frac{du_3}{d\alpha_1}$$

Для определения единичных базисных векторов деформированного состояния достаточно умножить согласно (2.1) и (2.5) выражения (2.7) и (2.8) соответственно на $\sqrt{1+2\varepsilon_{11}}$ и $\sqrt{1+2\varepsilon_{22}}$. Раскладывая последние множители в степенной ряд и произведя умножение, получим с принятой точностью

$$(2.9)\qquad \mathbf{E}_1=[1-{}^1/_2(\vartheta-2e_{13})^2]\mathbf{e}_1-(1-e_{11})(\vartheta-2e_{13})\mathbf{e}_3,\quad \mathbf{E}_2=\mathbf{e}_2$$

Третий базисный вектор $\mathbf{E}_3$ получим, умножая векторно $\mathbf{E}_1$ на $\mathbf{E}_2$, что дает

$$(2.10)\qquad \mathbf{E}_3=(1-e_{11})(\vartheta-2e_{13})\mathbf{e}_1+[1-{}^1/_2(\vartheta-2e_{13})^2]\,\mathbf{e}_3$$

Подставляя теперь в формулы (2.3) соотношения (2.4), (2.5), (2.9), (2.10), дифференцируя и ограничиваясь квадратами деформаций, получим

$$(2.11)\qquad \frac{1}{R_1}=\frac{1}{r_1}\left[1-e_{11}+e_{11}^2-\frac{1}{2}(\vartheta-2e_{13})^2\right]+\frac{1}{h_1}\left[(1-2e_{11})\times\right.$$
$$\left.\times\frac{d}{d\alpha_1}(\vartheta-2e_{13})-(\vartheta-2e_{13})\frac{de_{11}}{d\alpha_1}\right]$$
$$\frac{1}{R_2}=\frac{1}{r_2}\left[1-e_{22}+e_{22}^2-\frac{1}{2}(\vartheta-2e_{13})^2\right]+\frac{1}{h_1h_2}\frac{dh_2}{d\alpha_1}(\vartheta-2e_{13})\times$$
$$\times(1-e_{11}-e_{22})$$

Если сдвиговая деформация отсутствует ($e_{13}=0$), то

$$\frac{1}{R_1}=\frac{1}{r_1}\left(1-e_{11}+e_{11}^2-\frac{1}{2}\vartheta^2\right)+\varkappa_{11}(1-2e_{11})-\frac{\vartheta}{h_1}\frac{de_{11}}{d\alpha_1}$$
$$\frac{1}{R_2}=\frac{1}{r_2}\left(1-e_{22}+e_{22}^2-\frac{1}{2}\vartheta^2\right)+\varkappa_{22}(1-e_{11}-e_{22})$$

Для того чтобы срединная поверхность полученной после деформирования оболочки оставалась сплошной, необходимо, чтобы коэффициенты Ляме и радиусы ее кривизны удовлетворяли условиям Кодацци — Гаусса (1.9), которые для деформированного состояния запишутся в виде

$$\frac{d}{d\alpha_1}\left(\frac{H_2}{R_2}\right) - \frac{1}{R_1}\frac{dH_2}{d\alpha_1} = 0, \quad \frac{d}{d\alpha_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\alpha_1}\right) + \frac{H_1H_2}{R_1R_2} = 0 \tag{2.12}$$

Подставляя в последние соотношения выражения для коэффициентов Ляме (2.2) и радиусов кривизны (2.11) для деформированного состояния и вычитая из (2.12) выражения, соответствующие условиям Кодацци — Гаусса для недеформированного состояния (1.9), придем после громоздких преобразований к двум уравнениям

$$\frac{d}{d\alpha_1}[(1 - e_{11})\Psi] = 0, \quad \left[1 - e_{11} + \frac{r_1}{h_1}\frac{h}{d\alpha_1}(\vartheta - 2e_{13})\right]\Psi = 0 \tag{2.13}$$

где величина Ψ определена равенством в скобках в формулах (1.14).

Нелинейные уравнения (2.13) будут, очевидно, выполняться, если удовлетворяется линейное уравнение (1.15). Таким образом, полученные выражения для определения коэффициентов Ляме (2.2) и радиусов кривизны (2.11) для деформированной оболочки отвечают условиям непрерывности ее срединной поверхности.

Пусть в недеформированном состоянии координата α_1 некоторой точки a (фигура) соответствует углу ω, отсчитываемому от оси симметрии до направления нормали $\mathbf{e}_3$ к срединной поверхности оболочки. В деформированном состоянии этой же точке (точке A), имеющей координату α_1, соответствует угол Ω, который определим следующим образом:

$$\Omega = \omega + \Delta\omega, \quad \Delta\omega = \arccos(\mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{e}_3)$$

Используя выражение (2.10), получим

$$\Delta\omega = \arccos\left[1 - {}^1/_2(\vartheta - 2e_{13})^2\right]$$

Поступила 7 IV 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
2. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1970.
3. *Черника В. С.* Статика тонкостенных оболочек вращения. М., «Наука», 1968.
4. *Новожилов В. В.* Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958.
5. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.