Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ ЭВРИСТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ДЛЯ ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

А. Д. Чернышов

(Воронеж)

Основная идея предлагаемого метода заключается в том, чтобы некоторую информацию качественного или количественного характера о свойствах величин, фигурирующих в нелинейной краевой задаче, использовать при ее постановке и тем самым упростить исходную задачу. Источниками информации могут быть решения других подобных задач, экспериментальные данные и некоторые другие соображения. Естественно, что степень упрощения зависит от характера имеющейся информации и от форм ее использования. Приближенное решение задачи, полученное после использования такой информации, будем называть нулевым приближением. Основное отличие предлагаемого ниже итерационного метода от известных методов заключается в способе отыскания нулевого приближения, также в алгоритме итерационного процесса. После применения этого метода задача в частных производных приводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения для каждого приближения, что позволяет во много раз сократить объем вычислительных работ по сравнению с объемом работ при использовании метода конечных разностей или метода конечных элементов. Нулевое приближение предлагаемым методом часто равноценно двум-трем приближениям по методу малого параметра (в зависимости от величины малого параметра). Вопросы сходимости метода в данной работе не рассматриваются, но доказывается теорема о равномерной сходимости итерационного процесса к решению.

1. Приведем пример одного наиболее эффективного способа введения информации в начальную постановку краевой задачи. Для простоты рассмотрим нелинейное уравнение эллиптического типа

$$D^* (U_{xx},\ U_{xy},\ U_{yy},\ U_x,\ U_y,\ U,\ x,\ y) = 0 \tag{1.1}$$

Здесь D^* — аналитическая функция восьми аргументов, U — искомая функция, зависящая от координат x и y. Решение уравнения (1.1) ищется в двусвязной области Ω, ограниченной двумя кривыми Γ_1 и Γ_2 в плоскости $(x,\ y)$, уравнения которых запишем в форме $\xi_{01}(x,\ y) = \alpha_1$ и $\xi_{02}(x,\ y) = \alpha_2$ соответственно. Пусть граничные условия для уравнения (1.1) имеют вид

$$U(x,\ y)|_{\Gamma_i} = v_i = \text{const}, \quad i = 1, 2 \tag{1.2}$$

Предположим, что вид кривых $U(x,\ y) = \text{const}$ заранее известен из каких-либо соображений. Запишем приближенное уравнение кривых, на которых искомая функция принимает постоянные значения в виде

$$\xi = \xi(x,\ y) \tag{1.3}$$

Согласно (1.2) функция U на границах Γ_1, Γ_2 принимает постоянные значения, поэтому

$$\xi(x, y)|_{\Gamma_i} = \alpha_i = \text{const} \tag{1.4}$$

Равенства (1.4) можно рассматривать как уравнения границ Γ_1 и Γ_2 соответственно. При решении краевых задач вид функции (1.3) часто известен только на границах Γ_1 и Γ_2, т. е.

$$\xi|_{\Gamma_i} = \xi_{0i}(x, y) = \alpha_i \tag{1.5}$$

Естественно предположить, что внутри области Ω функция $\xi(x, y)$ некоторым непрерывным образом изменяется в пределах $[\alpha_1, \alpha_2]$. Простейшим способом приближенного задания такой функции, при котором, согласно (1.5), справедливо условие (1.4), служит соотношение

$$[\xi_{01}(x, y) - \alpha_1](\xi - \alpha_2) = [\xi_{02}(x, y) - \alpha_2](\xi - \alpha_1) \tag{1.6}$$

Зависимость (1.6) может быть усложнена с учетом дополнительной информации о функции $\xi(x, y)$.

Таким образом, рассматривается случай, когда имеющаяся информация о поведении искомой функции $U(x, y)$ позволяет приближенно записать уравнение семейства кривых (в приведенном примере $\xi = \text{const}$), на которых функция U изменяется мало.

В задаче (1.1), (1.2) перейдем от переменных (x, y) к переменным (ξ, η), где переменная $\eta = \eta(x, y)$ может быть произвольной, но такой, чтобы якобиан преобразования $(x, y) \to (\xi, \eta)$ был отличен от нуля в области $\overline{\Omega}$. Уравнение (1.1) и граничные условия (1.2) в новых переменных запишем в форме

$$D(U_{\xi\xi}, U_{\xi\eta}, U_{\eta\eta}, U_\xi, U_\eta, U, \xi, \eta) = 0 \tag{1.7}$$
$$U = v_i \quad \text{при } \xi = \alpha_i, \; i = 1, 2$$

Если окажется, что в дифференциальное уравнение (1.7) переменная η не входит явно, то это означает, что переменная ξ из (1.3) является автомодельной, и задача приводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения. В противном случае функция U изменяется вдоль кривых $\xi(x, y) = \text{const}$. Однако, согласно способу введения переменной ξ из (1.3), изменение U вдоль кривой $\xi = \text{const}$ должно быть малым, так что при нахождении нулевого приближения производными U_η, $U_{\xi\eta}$ и $U_{\eta\eta}$ в уравнении (1.7) можно пренебречь по сравнению с остальными членами. Тогда для нахождения нулевого приближения $U_0(\xi, \eta)$ придем к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с двумя граничными условиями

$$D_0(U_{0\xi\xi}, 0, 0, U_{0\xi}, \; 0, U_0, \xi, \eta) = 0 \tag{1.8}$$
$$U_0 = v_i \quad \text{при } \xi = \alpha_i, \; i = 1, 2$$

При интегрировании уравнения (1.8) переменная η играет роль параметра, поэтому приближение U_0 из (1.8) будет зависеть от двух переменных ξ и η.

Обозначим функцию $\xi\ (x,\ y)$ из (1.3) через $\xi_0\,(x,\ y)$, так как эта функция была использована при нахождении нулевого приближения. После нахождения $U_0\ (\xi_0,\ \eta)$ естественно предположить, что более точное уравнение кривой, вдоль которой искомое решение $U\ (x,\ y)$ не изменяется, имеет вид $\xi = U_0\ (\xi_0,\ \eta)$, поэтому вместо ξ_0 введем новую переменную

$$\xi_1 = U_0\,(\xi_0,\ \eta) \tag{1.9}$$

Вводя замену переменных $(x,\ y) \to (\xi_1,\ \eta)$ и повторяя рассуждения, подобные тем, что проводились после введения переменных при получении нулевого приближения, подобно (1.8) придем к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для первого приближения

$$\begin{gathered} D_1\,(U_{1\xi\xi},\ 0,\ 0,\ U_{1\xi},\ 0,\ U_1,\ \xi_1,\ \eta) = 0 \\ U_1 = v_i \quad \text{при } \xi_1 = v_i,\ i = 1,\ 2 \end{gathered} \tag{1.10}$$

Для нахождения k-го приближения необходимо сделать замену переменных $(x,\ y) \to (\xi_k,\ \eta)$, где введено обозначение

$$\xi_k = U_{k-1}\,(\xi_{k-1},\ \eta) \tag{1.11}$$

При преобразовании (1.11) область $\overline{\Omega}$ переходит в двусвязное замкнутое множество $\overline{\Omega}_k\,(\xi_k,\ \eta)$, где $\overline{\Omega}$ — замыкание области Ω. Поскольку вопросы сходимости в данной работе не рассматриваются, то предполагаем, что двусвязное множество $\{\overline{\Omega}_k\}$ имеет своим пределом двусвязное множество $\overline{\Omega}^*$. Положим частные производные по переменной η от искомой функции $U_k\ (\xi_k,\ \eta)$ равными нулю

$$\frac{\partial U_k}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 U_k}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 U_k}{\partial \xi_k \partial \eta} = 0 \tag{1.12}$$

Тогда уравнение в частных производных (1.1) вновь будет иметь вид нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$D_k\,(U_{k\xi_k\xi_k},\ 0,\ 0,\ U_{k\xi_k},\ 0,\ U_k,\ \xi_k,\ \eta) = 0 \tag{1.13}$$

с граничными условиями

$$U_k = v_i \quad \text{при } \xi_k = v_i,\quad i = 1, 2 \tag{1.14}$$

Заметим, что функция U_k служит приближенным решением задачи (1.1), (1.2) лишь потому, что предположение (1.12) строго не выполняется. Если же окажется, что некоторое приближение U_n зависит только от переменной ξ_n и не зависит от η, то для U_n предположение (1.12) будет выполняться точно, т. е. функция $U_n\ (\xi_n)$ будет точным решением исходной задачи. В этом случае уравнение (1.13) для U_n не будет содержать η.

Для равномерно сходящегося итерационного процесса выполняется соотношение

$$\lim\ [U_k\ (\xi_k,\ \eta) - \xi_k] = 0, \qquad k \to \infty \tag{1.15}$$

Предельную функцию последовательности $\{\xi_k\}$ обозначим через ξ^*. Выясним, будет ли предел ξ^* служить решением исходной задачи?

В этой связи докажем следующую теорему: если в указанном выше итерационном процессе последовательность функций $\{U_k\}$ вместе со всеми своими первыми и вторыми частными производными по переменным ξ_k, η равномерно сходится в двусвязной области $\overline{\Omega}$ к некоторой функции ξ^*, дважды непрерывно дифференцируемой по совокупности переменных, то эта предельная функция будет решением исходной задачи (1.1), (1.2).

Для доказательства достаточно убедиться в том, что функция ξ^* точно удовлетворяет предположению (1.12), т. е.

$$\frac{\partial \xi^*}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial \xi^* \partial \eta} = \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial \eta^2} = 0 \tag{1.16}$$

Последнее равенство в (1.16) очевидно, если справедливо первое равенство. Согласно условиям теоремы можно продифференцировать равенство (1.15) по переменной η, после чего с учетом, что ξ_k, η — независимые переменные, получим

$$\lim dU_k(\xi_k, \eta) / d\eta = 0, \quad k \to \infty \tag{1.17}$$

Так как $\lim dU_k / d\eta = d\xi^* / d\eta$ при $k \to \infty$, то из (1.17) получаем доказательство равенств (1.16).

Дифференцируя равенство (1.15) по переменной ξ_k частным образом один и два раза последовательно, найдем, что приближения U_k для сходящегося процесса обладают свойством

$$\lim \frac{\partial U_k(\xi_k, \eta)}{\partial \xi_k} = 1, \quad \lim \frac{\partial^2 U_k}{\partial \xi_k^2} = 0, \; k \to \infty \tag{1.18}$$

Указанный алгоритм получения приближенного решения задачи (1.1), (1.2) допускает модификации. Так, вместо (1.11) можно предложить иной способ введения переменной ξ_k, например следующий:

$$\xi_{k+1} = \nu_k U_k(\xi_k, \eta) + (1 - \nu_k)\, \xi_k, \quad 1 \geqslant \nu_k(x, y) > 0, \quad k \geqslant 1 \tag{1.19}$$

Соотношение (1.19) непригодно для введения ξ_1, т. е. при $k = 0$, так как способы введения функций ξ_0 и ξ_k $(k \geqslant 1)$ принципиально различные. Поэтому для ξ_1 можно предложить следующее определение:

$$\xi_1 = \nu_0 U_0(\xi_0, \eta) + (1 - \nu_0)\, U_0(\xi_0, \eta^*), \quad 1 \geqslant \nu_0(x, y) > 0 \tag{1.20}$$

где η^* — некоторое характерное значение переменной η, соответствующее области $\overline{\Omega}$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что из равномерной в $\overline{\Omega}$ сходимости итерационного процесса (1.19) следует равномерная в $\overline{\Omega}$ сходимость функций U_k к той же предельной функции. Поэтому для случая (1.19) остается справедливой теорема о сходимости приближений к решению.

2. В качестве примера рассмотрим задачу о чистом сдвиге вязкопластического материала между двумя цилиндрическими поверхностями [1], когда в области течения отсутствуют жесткие зоны. В прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) поверхности неподвижной Γ_1 и подвижной Γ_2 пластин задаются уравнениями

$$y = y_0 = h \; (\Gamma_1), \quad y = y_1 = h\delta \cos x \; (\Gamma_2)$$

Подвижная пластина совершает поступательное движение с постоянной скоростью v_0 параллельно оси z. При малых амплитудах δ эту задачу можно решать методом малого параметра, где нулевым приближением служит решение задачи Куэтта. Не делая пока никаких предположений относительно величины параметра δ, будем решать задачу изложенным в п. 1 методом.

В рассматриваемой задаче предполагается, что каждая частица имеет одну компоненту скорости U, параллельную оси z, т. е.

$$u_z = U(x, y), \quad u_x = u_y = 0$$

Из компонент тензора скорости деформаций отличными от нуля будут компоненты

$$\gamma_x = \partial U / \partial x, \quad \gamma_y = \partial U / \partial y$$

Отнесем скорость U к величине v_0, напряжения τ_x, τ_y — к пределу текучести k_0, координаты x, y — к величине h, скорости сдвига γ_x, γ_y — к величине v_0/h. Тогда связь напряжений τ_x и τ_y с γ_x и γ_y для вязкопластической среды принимает вид

$$\tau_x = G\gamma_x, \quad \tau_y = G\gamma_y, \quad G = (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^{-1/2} + \eta_0 v_0 / k_0 h \tag{2.1}$$

где η_0 — коэффициент вязкости. Подстановка (2.1) в уравнение равновесия приводит к нелинейному уравнению в частных производных второго порядка с граничными условиями (считаем, что частицы среды прилипают к жестким границам)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(G \frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(G \frac{\partial U}{\partial y}\right) = 0 \tag{2.2}$$

$$U|_{\Gamma_1} = 0, \quad U|_{\Gamma_2} = 1$$

Можно привести несколько примеров частных решений краевых задач о сдвиге вязкопластического материала [2, 3], из которых следует, что линии с равными скоростями имеют форму, близкую к форме границ области течения. В непосредственной близости от Γ_1 и Γ_2 линии $U = \mathrm{const}$ почти точно повторяют форму этих границ. В связи с этой информацией ξ и η введем по формулам

$$y = y_0 + \xi (y_1 - y_0), \qquad x = \eta \tag{2.3}$$

$$\xi = (1 - y)/(1 - \delta \cos x), \quad 1 \geqslant \xi \geqslant 0$$

Замена (2.3) такова, что линии $\xi = \mathrm{const}$ — косинусоиды, подобные линии Γ_2, с затухающей амплитудой по мере приближений к Γ_1. Преобразование (2.3) будет невырожденным во всей области между Γ_1 и Γ_2 при условии $\delta < 1$.

Заметим, что для применимости метода малого параметра необходимо выполнение более сильного неравенства $\delta \ll 1$.

Делая замену $(x, y) \to (\xi, \eta)$ и опуская производные от U по переменной η, из (2.2) получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с граничными условиями

$$[1 + (\xi\delta \sin x)^2]\, V_\xi + \xi (\delta \sin x)^2\, V = 0, \quad V = G U_{0\xi} \tag{2.4}$$

$$\xi = 0, \ U_0 = 0; \quad \xi = 1, \ U_0 = 1$$

В (2.4) переменная x играет роль параметра. Интегрируя это уравнение и определяя постоянные интегрирования при помощи граничных условий, получим решение задачи в нулевом приближении

$$U_0 = I(\xi, x) / I(1, x)$$

$$I(\xi, x) = \ln\left[\xi\delta \sin x + \sqrt{1 + (\xi\delta \sin x)^2}\right]$$

В пределе при $\delta \to 0$ решение (2.4) переходит в решение задачи Куэтта. Решение задачи (2.2) методом малого параметра с учетом нулевого, первого и второго приближений, где δ принимается за малый параметр, связано с большим объемом вычислительной работы и из-за громоздкости не выписывается.

Ниже приведены численные значения координат линии, на которой скорость U принимает значение 0.5:

x	0	45	90	120	180
y_0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
y_1	0.5364	0.5263	0.5000	0.4792	0.4562
y_2	0.5413	0.5296	0.5015	0.4820	0.4634
y^*	0.5403	0.5286	0.5012	0.4829	0.4656
y	0.5419	0.5298	0.5014	0.4819	0.4628

Через y_0, y_1 и y_2 обозначены координаты y линии $U = 0.5$, полученные методом малого параметра в нулевом, первом и втором приближениях соответственно; y^* — координаты, полученные после одной итерации предлагаемого в данной работе метода, y — предельное значение этих координат, найдено этим же методом на третьей итерации.

Автор благодарит А. В. Резунова за проведение численных расчетов на ЭВМ.

Поступила 14 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математические теории неупругой сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
2. *Мясников В. П.* Некоторые точные решения для прямолинейных движений вязкопластической среды. ПМТФ, 1961, № 2.
3. *Быковцев Г. И., Чернышов А. Д.* О вязкопластическом течении в некруговых цилиндрах при наличии перепада давления. ПМТФ, 1964, № 4.