

**О РЕШЕНИИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
В ТЕОРИИ ПРОТОЧНОГО РЕАКТОРА**

**Б. М. Маркеев, А. А. Платонов**

(Москва)

Построено асимптотическое разложение решения двухточечной краевой задачи для сингулярно возмущенной системы из двух уравнений с малыми параметрами при старших производных, возникающей в теории проточного реактора. Получены выражения для концентрации реагентов, равномерно пригодные во всем реакторе с двухстадийной последовательной реакцией с точностью до квадратичного члена по малым параметрам. Дано сравнение численного решения с асимптотическим.

По-видимому, первой работой, в которой исследовался стационарный режим работы реактора с одностадийной изотермической реакцией для больших чисел Пекле на основе приближенных методов нелинейной механики [1], можно считать [2]. Формальное обобщение метода [2] для некоторых предельных случаев на систему уравнений было проведено в [3, 4].

1. Полная система уравнений, описывающая изотермический реактор с последовательной двухстадийной реакцией, включает в себя уравнения сохранения для исходного и промежуточного продуктов [5]. Для стационарного режима работы реактора математическая формулировка задачи при ряде предположений [5, 6] следующая:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_\alpha y_\alpha'' &= y_\alpha' + \lambda_\alpha y_\alpha^n, \quad \varepsilon_\beta y_\beta'' = y_\beta' + \lambda_\beta y_\beta^m - \lambda_\alpha y_\alpha^n \\ \varepsilon_\alpha y_\alpha' &= y_\alpha - 1, \quad \varepsilon_\beta y_\beta' = y_\beta \quad \text{при } t = +0 \\ y_\alpha' &= y_\beta' = 0 \quad \text{при } t = 1 \\ (\varepsilon_\gamma &= D_\gamma / u_0 L, \quad \lambda_\gamma = k_\gamma L y_\alpha^{s-1} (-0) / u_0; \quad \gamma = \alpha, \beta; s = n, m) \end{aligned}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по аргументу функции;  $\varepsilon_\gamma^{-1}$  — число Пекле, где  $\gamma = \alpha, \beta$  — индекс исходного и промежуточного продуктов,  $u_0$  — средняя скорость смеси в трубе реактора,  $D_\gamma$  — парциальный коэффициент диффузии,  $L$  — длина реактора,  $t = z / L$  — безразмерная координата вдоль оси реактора,  $k_\gamma$  — константа скорости реакции,  $y_\gamma = c_\gamma / c(-0)$  — безразмерная парциальная концентрация, где  $c(-0)$  — парциальная концентрация на входе реактора. Реактор занимает область  $0 \leq t \leq 1$ .

Исследуем наиболее интересный с практической точки зрения случай больших чисел Пекле, т. е.  $\varepsilon_\gamma \ll 1$ . Тогда (1.1) представляет собой двухточечную краевую задачу для системы из двух уравнений с малыми параметрами при старших производных. Причем данная система по отношению к малым параметрам  $\varepsilon_\alpha$  и  $\varepsilon_\beta$  является сингулярно возмущенной.

Построим решение задачи (1.1) во внешней области, представляющей собой полуинтервал  $0 \leq t < 1$ . Выражение для концентрации исходного продукта представим в виде асимптотического разложения

$$(1.2) \quad y_{\alpha}(t) = \chi_{\alpha}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{\alpha}^n \chi_{\alpha}^{(n)}(t)$$

по малому параметру  $\varepsilon_{\alpha}$ . Из-за относительной сложности второго уравнения системы (1.1) выражение для промежуточного продукта представим посредством асимптотического ряда

$$(1.3) \quad y_{\beta}(t) = \chi_{\beta}(t) = \sum_{k=n=0}^{\infty} \varepsilon_{\alpha}^k \varepsilon_{\beta}^n \chi_{\beta}^{(k,n)}(t)$$

по двум малым параметрам  $\varepsilon_{\alpha}$  и  $\varepsilon_{\beta}$ .

Определяющей для построения асимптотических разложений решений (1.2), (1.3) представляется система нулевого приближения, которая следует из (1.1), если положить  $\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_{\beta} = 0$ , и описывает работу изотермического реактора с последовательной реакцией в режиме идеального вытеснения. В качестве граничных условий используется значение концентраций реагентов на входе в реактор. В режиме идеального вытеснения значения исходного продукта по длине реактора определяются простой формулой

$$(1.4) \quad \chi_{\alpha}^{(0)}(t) = \{-(1-n)\lambda_{\alpha}t + 1\}^{-1}$$

Вместе с тем аналитическое решение второго уравнения системы нулевого приближения, которое определяет значения промежуточного продукта, в общем случае представляет трудности. Рассмотрим реакцию второго порядка, т. е.  $n = m = 2$ . В этом случае искомое уравнение представляет собой уравнение Риккати. В итоге значения концентрации промежуточного продукта определяются следующим соотношением:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \chi_{\beta}^{(0,0)}(t) &= A \chi_{\alpha}^{(0)}(t) + z(t) \\ z(t) &= -(\chi_{\alpha}^{(0)}(t))^a \{1 + A[\lambda_{\beta} / (\lambda_{\alpha} a)] [(\chi_{\alpha}^{(0)}(t))^a - 1]\}^{-1} \\ A &= (\lambda_{\alpha} / (2\lambda_{\beta})) (1 + a), \quad a = (1 + 4\lambda_{\beta} / \lambda_{\alpha})^{1/2} \end{aligned}$$

При асимптотическом разложении решения во внешней области влияние эффектов диффузии на процессы, протекающие в реакторе, учитывается в следующих приближениях по малым параметрам  $\varepsilon_{\alpha}$  и  $\varepsilon_{\beta}$ . Из (1.1) следует, что первый и последующие члены внешних разложений (1.2) и (1.3) подчиняются неоднородным линейным уравнениям

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \chi_{\alpha}^{(m)'} + 2\lambda_{\alpha}\chi_{\alpha}^{(0)}\chi_{\alpha}^{(m)} &= F_{\alpha}^{(m)}(t), \quad m \geq 1 \\ \chi_{\beta}^{(m,s)'} + 2\lambda_{\beta}\chi_{\beta}^{(0,0)}\chi_{\beta}^{(m,s)} &= F_{\beta}^{(m,s)}(t), \quad m+s \geq 1 \\ \chi_{\alpha}^{(m)} &= \chi_{\alpha}^{(m-1)}, \quad \chi_{\beta}^{(m,s)} = \chi_{\beta}^{(m,s-1)} \quad \text{при } t = +0 \end{aligned}$$

Правая часть данной системы уравнений определяется через решения

низших приближений посредством следующих соотношений:

$$F_{\alpha}^{(m)} = \chi_{\alpha}^{(m-1)'} - \lambda_{\alpha} \sum_{1 \leq n \leq m-1} \chi_{\alpha}^{(m-n)} \chi_{\alpha}^{(n)}$$

$$F_{\beta}^{(m, n)} = \chi_{\beta}^{(m, s-1)'} - \lambda_{\beta} \sum_{1 \leq n \leq m-1} \sum_{1 \leq k \leq s-1} \chi_{\beta}^{(m-n, s-k)} \chi_{\beta}^{(n, k)} +$$

$$+ \lambda_{\alpha} \delta_{s0} \sum_{0 \leq n \leq m} \chi_{\alpha}^{(m-n)} \chi_{\alpha}^{(n)}$$

Решения первого и последующих приближений можно выразить через решение нулевого приближения, что упрощает построение асимптотического разложения решения во внешней области по сравнению с методом работы [2]. Так, первый и второй члены асимптотического разложения (1.2) для исходного продукта, например, можно представить соотношениями

$$\chi_{\alpha}^{(1)}(t) = -\chi_{\alpha}^{(0)2}(t) [1 + 2 \ln \chi_{\alpha}^{(0)}(t)]$$

$$\chi_{\alpha}^{(2)}(t) = (\lambda_{\alpha} \chi_{\alpha}^{(0)}(t))^2 \{9(\chi_{\alpha}^{(0)}(t) - 1) + 4[\chi_{\alpha}^{(0)}(t) \times$$

$$\times \ln \chi_{\alpha}^{(0)}(t) (2 + \ln \chi_{\alpha}^{(0)}(t)) + 1]\}$$

Вместе с тем, благодаря линейности системы (1.6) относительно неизвестных функций, ее решение определим посредством общих соотношений

$$(1.7) \quad \chi_{\alpha}^{(m, s)}(t) = \chi_{\alpha}^{(0)2}(t) \left\{ \chi_{\alpha}^{(m-1)'}(+0) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t dt' (\chi_{\alpha}^{(0)}(t'))^{-2} F_{\alpha}^{(m)}(t') \right\} + O(\varepsilon_{\alpha})$$

$$\chi_{\beta}^{(m, s)}(t) = \varphi(t) \left\{ \chi_{\beta}^{(m, s-1)'}(+0) + \int_0^t dt' F_{\beta}^{(m, s)}(t') \varphi^{-1}(t') + \right.$$

$$\left. + O(\max(\varepsilon_{\alpha}, \varepsilon_{\beta})) \right\}$$

$$\varphi(t) = \exp \left\{ -2\lambda_{\beta} \int_0^t \chi_{\beta}^{(0, 0)}(t') dt' \right\}$$

Первое соотношение получено с точностью  $O(\varepsilon_{\alpha})$ , а второе —  $O(\max(\varepsilon_{\alpha}, \varepsilon_{\beta}))$ .

На фигуре приведены зависимости  $\chi_{\beta}^{(n, m)}(t)$  для значений  $\lambda_{\alpha} = \lambda_{\beta} = 1$ ,  $\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_{\beta} = 0.1$ . Значения  $n$  и  $m$  на фигуре приведены в скобках.

2. Чтобы подчинить решение, равномерно пригодное на всем отрезке  $0 \leq t \leq 1$ , граничным условиям, введем на выходе реактора «пограничный слой» в окрестности точки  $t = 1$ . Произведя замену переменных  $\eta_{\gamma} = (1 - t) / \varepsilon_{\gamma}$  ( $\gamma = \alpha, \beta$ ), запишем исходную систему уравнений (1.1) в «пограничном слое» для частного случая реакции второго порядка

$$(2.1) \quad \psi_{\alpha}'' + \psi_{\alpha}' = \varepsilon_{\alpha} \lambda_{\alpha} \psi_{\alpha}^2, \quad \psi_{\beta}'' + \psi_{\beta}' = \varepsilon_{\beta} [\lambda_{\beta} \psi_{\beta}^2 - \lambda_{\alpha} \psi_{\alpha}^2]$$

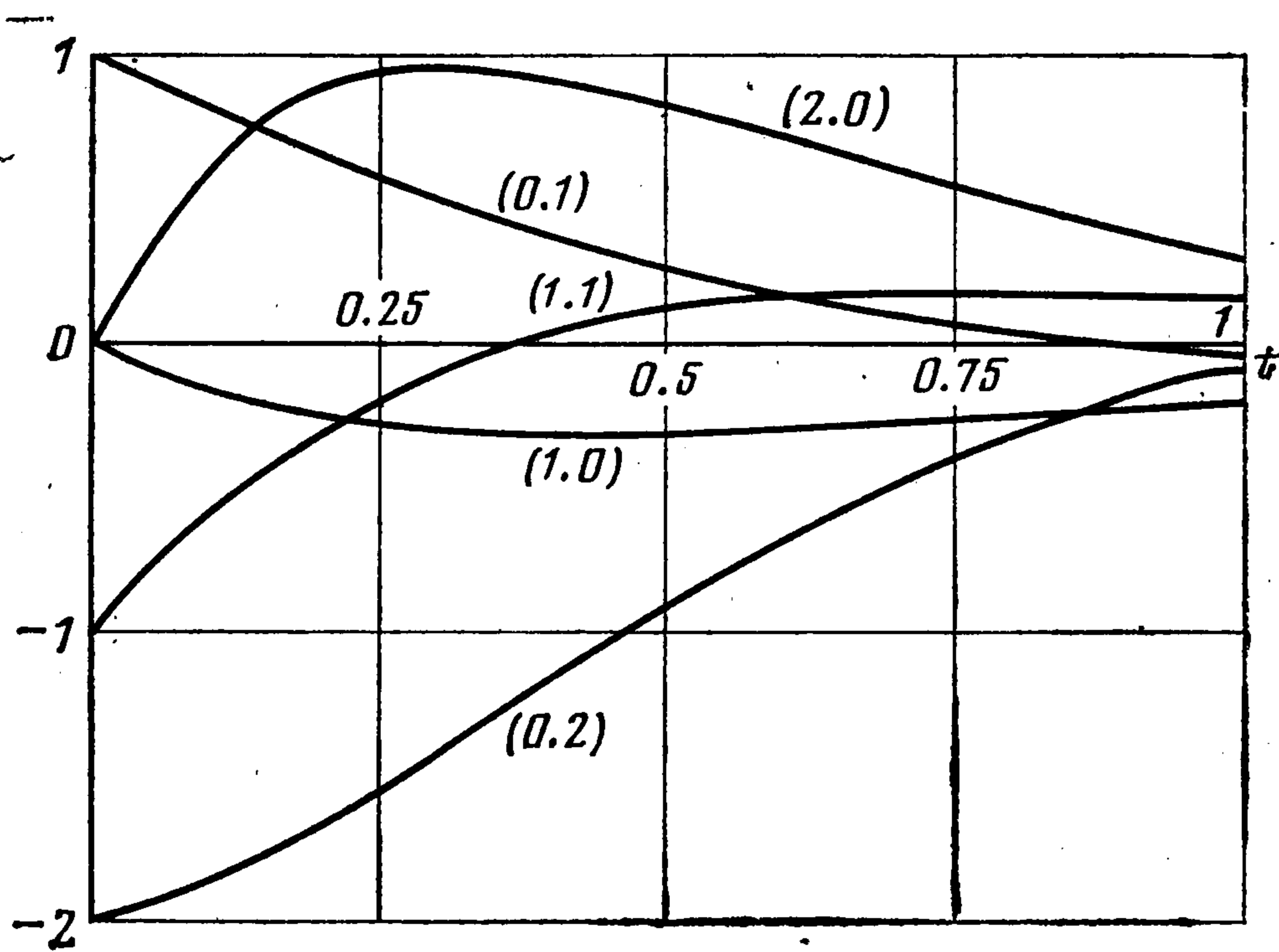
$$\psi_{\alpha}' = \psi_{\beta}' = 0 \quad \text{при } \eta_{\gamma} = 0$$

$$(y_{\alpha}(t) = \psi_{\alpha}(\eta_{\alpha}), \quad y_{\beta}(t) = \psi_{\beta}(\eta_{\beta}))$$

Асимптотическое разложение решения системы (2.1) по малым параметрам  $\varepsilon_\alpha$  и  $\varepsilon_\beta$  определим соотношениями

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \psi_\alpha(\eta_\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_\alpha^n \psi_\alpha^{(n)}(\eta_\alpha), \quad \psi_\beta(\eta_\beta) = \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_\alpha^m \varepsilon_\beta^n \psi_\beta^{(m,n)}(\eta_\beta) \end{aligned}$$

В нулевом приближении во внутренней области не осуществляется режим идеального вытеснения, так как диффузионный перенос реагента здесь становится сравним с конвективным. Изменением концентрации



Фиг. 1

за счет химической реакции пренебрегается. Система уравнений нулевого приближения следует из (2.1), если положить  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = 0$ , и имеет простое решение  $\psi_\alpha^{(0)}(\eta_\alpha) = h_{\alpha 0}^{(0)}$ ,  $\psi_\beta^{(0,0)}(\eta_\beta) = h_{\beta 0}^{(0,0)}$ . Постоянные  $h_{\alpha 0}^{(0)}$  и  $h_{\beta 0}^{(0,0)}$ , фигурирующие в нулевом приближении, должны быть определены из процедуры сращивания внешнего решения, представленного в виде асимптотического разложения (1.2), (1.3), с решением (2.2) в пограничном слое. Изменение концентрации реагентов из-за химической реакции учитывается в первом и последующих приближениях разложения (2.2).

Так, обращаясь к системе уравнений первого приближения

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \psi_\alpha^{(n)''} + \psi_\alpha^{(n)'} &= F_\alpha^{(n)}, \quad n = 1; \quad \psi_\beta^{(m,n)''} + \psi_\beta^{(m,n)'} = F_\beta^{(m,n)}, \quad m + n = 1 \\ \psi_\alpha^{(n)'} &= \psi_\beta^{(m,n)'} = 0 \quad \text{при } \eta_\alpha = \eta_\beta = 0 \\ F_\alpha^{(n)} &= \lambda_\alpha \psi_\alpha^{(0)2}, \quad F_\beta^{(0,1)} = \lambda_\beta \psi_\beta^{(0,0)2} - \lambda_\alpha \psi_\alpha^{(0)2}, \quad F_\beta^{(1,0)} = 0 \end{aligned}$$

получим выражение для первого члена разложения (2.2)

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \psi_\alpha^{(1)} &= h_{\alpha 0}^{(1)} + h_{\alpha 1} \Phi_\alpha, \quad \psi_\beta^{(0,1)} = h_{\beta 0}^{(0,1)} + h_{\beta 1} \Phi_\beta \\ \psi_\beta^{(1,0)} &= h_{\beta 0}^{(1,0)}, \quad h_{\alpha 1} = \lambda_\alpha h_{\alpha 0}^{(0)2}, \quad h_{\beta 1} = \lambda_\beta h_{\beta 0}^{(0,0)2} - \lambda_\alpha h_{\alpha 0}^{(0)2} \\ \Phi_\gamma &= \eta_\gamma + e^{-\eta_\gamma}, \quad \gamma = \alpha, \beta \end{aligned}$$

удовлетворяющее граничному условию обращения производной в нуль

на правом конце отрезка. В этом случае постоянные  $h_\alpha^{(1)}$  и  $h_\beta^{(0,1)}$  представляют собой функции от  $h_\alpha^{(0)}$  и  $h_\beta^{(0,0)}$ , а постоянные  $h_{\alpha 0}^{(1)}$ ,  $h_{\beta 0}^{(0,1)}$ ,  $h_{\beta 0}^{(1,0)}$ , фигурирующие в (2.4), должны быть определены из процедуры сращивания искомого решения с решением (1.2), (1.3).

При вычислении следующих приближений асимптотического разложения (2.2) необходимо использовать указанный выше алгоритм построения решения. Так, из уравнений второго приближения, отличающихся от уравнения (2.3) значениями функций, фигурирующих в ее правой части

$$F_\alpha^{(2)} = 2\lambda_\alpha h_{\alpha 0}^{(0)} \psi_\alpha^{(1)}, \quad F_\beta^{(1,1)} = (F_\beta^{(0,0)} - F_\alpha^{(2)}),$$

$$F_\beta^{(0,2)} = 2\lambda_\beta h_{\beta 0}^{(0,0)} \psi_\beta^{(0,1)}, \quad F_\beta^{(2,0)} = 0$$

и определенных через решения низших приближений, имеем второй член разложения (2.2)

$$(2.5) \quad \psi_\alpha^{(2)} = (F_\alpha^{(2)} \Phi_\alpha + h_\alpha h_\alpha^{(1)} \Phi_\alpha + h_{\alpha 0}^{(2)})$$

$$\psi_\beta^{(0,2)} = F_\beta^{(0,2)} \Phi_\beta + h_\beta h_\beta^{(0,1)} \Phi_\beta + h_{\beta 0}^{(0,2)}$$

$$\psi_\beta^{(2,0)} = h_{\beta 0}^{(2,0)}, \quad \psi_\beta^{(1,1)} = (F_\beta^{(0,2)} - F_\alpha^{(2)}) \Phi_\beta -$$

$$- h_\alpha h_\alpha^{(1)} \left[ \frac{\varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\beta} \left( \frac{\eta_\beta^2}{2} - \eta_\beta \right) + \Delta_\beta^{-1} e^{-\eta_\alpha} \right]$$

$$h_\alpha = 2\lambda_\alpha \psi_\alpha^{(0)}, \quad h_\beta = 2\lambda_\beta \psi_\beta^{(0,0)}, \quad \Delta_\beta = \frac{\varepsilon_\beta}{\varepsilon_\alpha} \left( \frac{\varepsilon_\beta}{\varepsilon_\alpha} - 1 \right)$$

$$\Phi_\gamma = \left( \frac{\eta_\gamma^2}{2} - \eta_\gamma \right) - (\eta_\gamma + 1) e^{-\eta_\gamma}, \quad \gamma = \alpha, \beta$$

удовлетворяющий граничному условию обращения производной в нуль на выходе из реактора. При получении выражения для  $\psi_\beta^{(1,1)}$  предполагалось, что  $|\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta| = O(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta)$ . В случае  $|\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta| = o(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta)$  в  $\psi_\beta^{(1,1)}$  необходимо заменить величину  $\Delta_\beta^{-1}$  на  $-(\eta_\beta + 1)$ . Значения постоянных  $h_{\alpha 0}^{(2)}$ ,  $h_{\beta 0}^{(m,k)}$  ( $m + k = 2$ ), как и в низших приближениях, должны быть определены из процедуры сращивания асимптотических разложений. Можно выписать общий член асимптотического разложения (2.2), причем для исходного продукта по порядку величины  $\psi_\alpha^{(n)} = O(\varepsilon_\alpha^n \exp \{-\eta_\alpha\})$ , а промежуточного  $\psi_\beta^{(n,m)} = O(\max(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta)^{n+m} \exp \{-\eta_\beta\})$ .

3. В решениях пограничного слоя фигурируют постоянные, значения которых необходимо получить из процедуры сращивания асимптотических разложений решений во внутренней и внешней областях. С этой целью перейдем к «промежуточным переменным»  $\eta_\gamma = \eta_\gamma^* / \mu_\gamma$ ,  $t = 1 - (\varepsilon_\gamma / \mu_\gamma) \eta_\gamma^*$  ( $\gamma = \alpha, \beta$ ), предполагая  $\mu_\gamma = \mu_\gamma(\varepsilon_\gamma)$  и  $\mu_\gamma^* = o(\varepsilon_\gamma)$ . При сращивании асимптотических разложений удобно внешнее решение, представляющее собой функцию от  $t = 1 - (\varepsilon_\gamma / \mu_\gamma) \eta_\gamma^*$ , разложить в ряд Тейлора по малому параметру  $\varepsilon_\gamma / \mu_\gamma$ . Ограничимся сращиванием внутреннего асимптотического разложения решения с внешним при нулевой, первой и второй степенях промежуточной переменной, что соответствует сращиванию до членов порядка  $(\varepsilon_\gamma / \mu_\gamma)^2 \ll 1$ . Например, в нулевом приближении для внешнего решения по малым параметрам  $\varepsilon_\alpha$  и  $\varepsilon_\beta$ , пренебрегая малыми экспоненциальными членами во внутреннем решении и

приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях промежуточной переменной внутреннего и внешнего разложений, имеем систему

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \chi_{\alpha}^{(0)}(1) &= h_{\alpha 0}^{(0)}, \quad \chi_{\beta}^{(0,0)}(1) = h_{\beta 0}^{(0,0)}, \quad \chi_{\alpha}^{(0)'}(1) = -h_{\alpha}^{(1)}, \quad \chi_{\beta}^{(0,0)'}(1) = h_{\beta}^{(0,1)} \\ \chi_{\alpha}^{(0)''} &= 2\lambda_{\alpha} h_{\alpha}^{(1)}, \quad \chi_{\beta}^{(0,0)''}(1) = 2[\lambda_{\beta} h_{\beta}^{(0,1)} - \lambda_{\alpha} h_{\alpha}^{(1)}] \end{aligned}$$

Первые два соотношения непосредственно определяют постоянные  $h_{\alpha 0}^{(0)} = \chi_{\alpha}^{(0)}(1)$  и  $h_{\beta 0}^{(0,0)} = \chi_{\beta}^{(0,0)}(1)$  через значения нулевого члена асимптотического разложения внешнего решения, а четвертое, пятое и шестое соотношения при этом удовлетворяются тождественно.

Чтобы доказать последнее утверждение, достаточно выразить первые и вторые производные от  $\chi_{\alpha}^{(0)}$  и  $\chi_{\beta}^{(0,0)}$  через значения этих функций, используя систему уравнений для определения нулевого члена асимптотического разложения внешнего решения, и затем представить их в (3.1). В первом приближении для внешнего решения, чтобы не превышать точности сравнения решений нулевого приближения по параметрам  $\varepsilon_{\alpha}$ ,  $\varepsilon_{\beta}$ , ограничимся сращиванием внешнего решения с внутренним при нулевой и первой степенях промежуточной переменной. Как и выше, опуская экспоненциально малые члены в асимптотическом разложении внутреннего решения, приходим, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях промежуточной переменной внутреннего и внешнего разложений, к системе из шести уравнений. При этом три уравнения определяют постоянные  $h_{\alpha 0}^{(1)} = \chi_{\alpha}^{(1)}(1)$ ,  $h_{\beta 0}^{(0,1)} = \chi_{\beta}^{(0,1)}(1)$ ,  $h_{\beta 0}^{(1,0)} = \chi_{\beta}^{(1,0)}(1)$  через значения первых членов асимптотического разложения внешнего решения. Прочие соотношения данной системы обращаются в тождество. Это можно показать, используя доказательство, приведенное выше при иллюстрации алгоритма отыскания неизвестных постоянных, фигурирующих во внутреннем решении, на примере нулевого приближения по малым параметрам  $\varepsilon_{\alpha}$  и  $\varepsilon_{\beta}$ .

Следует отметить, что в теории изотермического реактора с одностадийной последовательной реакцией [2] внутреннее решение определялось посредством итераций. При этом вследствие смешения порядков по малому параметру данной задачи, во внутреннем решении усложнялось определение неизвестных постоянных внутреннего решения. В более сложном случае системы с несколькими малыми параметрами указанный метод построения асимптотического решения оказался мало эффективным, так как не позволял аналитически определить неизвестные постоянные и получить равномерно пригодное решение на всем отрезке. В то же время изложенный алгоритм построения асимптотического разложения решения двухточечной краевой задачи позволяет получить равномерно пригодное решение в более сложном случае системы уравнений с несколькими малыми параметрами.

В случае изотермического реактора с двухстадийной последовательной реакцией второго порядка, выделяя общую часть, находим отрезок асимптотического ряда решения задачи (1.1), равномерно пригодного на всем интервале

$$(3.2) \quad \begin{aligned} y_{\alpha}^{(n=2)}(t) &= \sum_{n=0}^{n=2} \varepsilon_{\alpha}^n \left\{ \chi_{\alpha}^{(n)}(t) - \sum_{l=0}^{l+n=2} \frac{1}{l!} \frac{\partial^l \chi_{\alpha}^{(n)}(1)}{\partial t^l} (1-t)^l + \right. \\ &+ \left. \psi_{\alpha}^{(n)}\left(\frac{1-t}{\varepsilon_{\alpha}}\right) \right\}, \quad y_{\beta}^{(n=2)}(t) = \sum_{k, m=0}^{n=k+m=2} \varepsilon_{\alpha}^k \varepsilon_{\beta}^m \left\{ \chi_{\beta}^{(k, m)}(t) - \sum_{l=0}^{l+n=2} \frac{1}{l!} \times \right. \\ &\times \left. \frac{\partial^l \chi_{\beta}^{(k, m)}(1)}{\partial t^l} (1+t)^l + \psi_{\beta}^{(k, m)}\left(\frac{1-t}{\varepsilon_{\beta}}\right) \right\} \end{aligned}$$

Он выписан с точностью до членов, квадратичных по малым параметрам  $\varepsilon_{\alpha}$  и  $\varepsilon_{\beta}$ . Два последних члена определяют экспоненциальную часть

решения, которая существенна в пограничном слое вблизи  $t = 1$ . Выражения для членов асимптотического разложения во внешней области  $\chi_\alpha^{(n)}$ ,  $\chi_\beta^{(n,m)}$  и внутренней  $\psi_\alpha^{(n)}$ ,  $\psi_\beta^{(n,m)}$  приведены в (1.4), (1.5), (1.7), (2.4), (2.5). Благодаря граничным условиям, требующим обращения производной от концентрации реагента на выходе реактора в нуль, вклад экспоненциальной части в решение (3.2) присутствует, начиная с первого приближения по малым параметрам  $\varepsilon_\alpha$ ,  $\varepsilon_\beta$ . Причем в первом приближении этот вклад для исходного и промежуточного продуктов определяется парциальной диффузией соответствующего продукта. Однако уже во втором приближении пограничный слой для промежуточного продукта формируется под влиянием диффузии как промежуточного, так и исходного продуктов.

	$t$	$y_\alpha \times 10^3$	$y_\alpha^{(1)} \times 10^3$	$y_\alpha^{(2)} \times 10^3$	$y_\beta \times 10^3$	$y_\beta^{(1)} \times 10^3$	$y_\beta^{(2)} \times 10^3$
А	0.0	924	900	940	72	100	60
	0.2	797	789	799	194	204	191
	0.4	698	698	697	273	279	277
	0.6	620	623	618	333	331	335
	0.8	560	564	558	369	364	370
	1.0	527	535	527	385	378	384
Б	0.0	878	800	960	065	100	040
	0.2	769	746	784	173	174	179
	0.4	684	683	678	244	231	257
	0.6	616	627	605	288	272	299
	0.8	567	585	556	314	299	320
	1.0	545	570	540	326	313	338
В	0.0	813	600	240	105	200	040
	0.2	658	648	634	269	235	349
	0.4	550	579	487	366	322	431
	0.6	472	508	418	422	388	456
	0.8	418	455	379	452	429	465
	1.0	394	431	374	464	452	474

Обратимся к решению двухточечной краевой задачи (1.1), представляющему собой бесконечный отрезок асимптотического ряда. Можно утверждать, что для конечного ряда асимптотического разложения найдется такое положительное число  $\varepsilon > 0$  и число  $N$ , зависящее от  $\varepsilon$ , что для всех  $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta < \varepsilon$  и  $n > N$  остаточный член  $|y_\gamma^{(n)} - y_\gamma| < O(\varepsilon^{n+1})$ ,  $\gamma = \alpha, \beta$ . При этом асимптотическое решение  $y_\gamma$  ( $\gamma = \alpha, \beta$ ) задачи (1.1) существует и единственно. Для доказательства данных утверждений достаточно учесть оценку общего члена асимптотических разложений внутреннего и внешнего решений, приведенных в конце п. 1,2, и использовать стандартный метод доказательства, предложенный в [3]. Однако вопрос о конкретном определении величины  $\varepsilon$ , представляющей собой радиус сходимости асимптотических разложений, остается открытым.

В таблице приведены для сравнения значения концентраций исходного и промежуточного продуктов по длине реактора для случаев: А)  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = 0.1$ ,  $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = 1$ , Б)  $\varepsilon_\alpha = 0.2$ ,  $\varepsilon_\beta = 0.1$ ,  $\lambda_\alpha = 1$ ,  $\lambda_\beta = 2$ , В)  $\varepsilon_\alpha = 0.2$ ,  $\varepsilon_\beta = 0.1$ ,  $\lambda_\alpha = 2$ ,  $\lambda_\beta = 1$ , полученные из решения (1.1) методом пристрелки на ЭВМ, и значения конечного ряда асимптотического разложения решения двухточечной краевой задачи, состоящего из двух и трех членов для различного набора параметров. Как следует из приведенной таблицы

трехчленное асимптотическое разложение хорошо сходится к численному решению в достаточно широкой области параметров, представляющей интерес с практической точки зрения. Причем сходимость улучшается с уменьшением величины параметров  $\varepsilon_\gamma$ ,  $\lambda_\gamma$ ,  $\gamma = \alpha, \beta$ . Ухудшение сходимости заметно из таблицы в случае  $B$  для  $\varepsilon_\alpha = 0.2$ ,  $\varepsilon_\beta = 0.1$ ,  $\lambda_\alpha = 2$ ,  $\lambda_\beta = 1$  на входе в реактор.

В связи с этим следует отметить работу [7], где на основе сравнения решений двухточечной задачи во внутренних и внешних координатах на входе в реактор выводился критерий сходимости асимптотического решения. Однако такой подход к отысканию критериев сходимости представляется интуитивным, а сами критерии необоснованно жесткими.

Авторы благодарят В. В. Струминского за интерес к работе, а Ю. П. Гупало и Ю. С. Рязанцева за дискуссию.

Поступила 29 VI 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.
2. Freeman L. B., Houghton G. Singular perturbations of nonlinear boundary value problems arising in chemical flow reactors. Chem. Engng Sci., 1966, vol. 21, No 11, p. 1011—1024.
3. Chen J., O'Malley R. E. On the asymptotic solution of a two-parameter boundary value problem of chemical reactor theory. SIAM J. Appl., 1974, vol. 26, No. 4, p. 717—729.
4. Rahman M. Some aspects of perturbation solutions arising in non-isothermal tubular chemical flow reactors. Chem. Engng Sci., 1974, vol. 29, No. 11, p. 2169—2176.
5. Арус. Р. Анализ процессов в химических реакторах. Л., «Химия», 1967.
6. Иоффе И. И., Письмен Л. М. Инженерная химия гетерогенного катализа. Л., «Химия», 1965.
7. Turian R. M. Solutions of problems in chemical flow reactors by perturbation methods. Chem. Engng Sci., 1973, vol. 28, No. 11, p. 2021—2031.