

О ДИФФУЗИОННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ПЕКЛЕ

А. Д. Полянин

(Москва)

Методом сращиваемых асимптотических разложений (по большому числу Пекле) исследуется трехмерная задача стационарной конвективной диффузии к поверхностям твердых частиц, обтекаемых ламинарным потоком вязкой несжимаемой жидкости, поле скоростей которого известно из решения соответствующей гидродинамической задачи. Для осесимметричных частиц, расположенных на оси потока, аналогичный анализ проведен в работах [1, 2].

Показано, что в потоке существуют цепочки частиц, которые не оказывают взаимного диффузионного влияния одна на другую, а распределение концентрации и полный диффузионный поток на частицу определяются диффузией к частицам, расположенным выше по потоку в той же цепочке. Для случая, когда расстояние между частицами в цепочке много меньше $aP^{1/3}$ (P — число Пекле, a — характерный размер частиц), получены формулы для распределения концентрации и полного диффузионного потока на поверхность каждой частицы. В цепочках с периодической структурой поля течения полный диффузионный поток на частицу равен

$$I_k = I_1 [k^{2/3} - (k - 1)^{2/3}]$$

где I_1 — полный поток на первую частицу, k — номер частицы в цепочке.

Проведен качественный анализ массообмена твердой фазы с жидкой в концентрированных дисперсных системах в зависимости от числа Рейнольдса.

Рассмотрена плоская задача о диффузии к цепочке цилиндров.

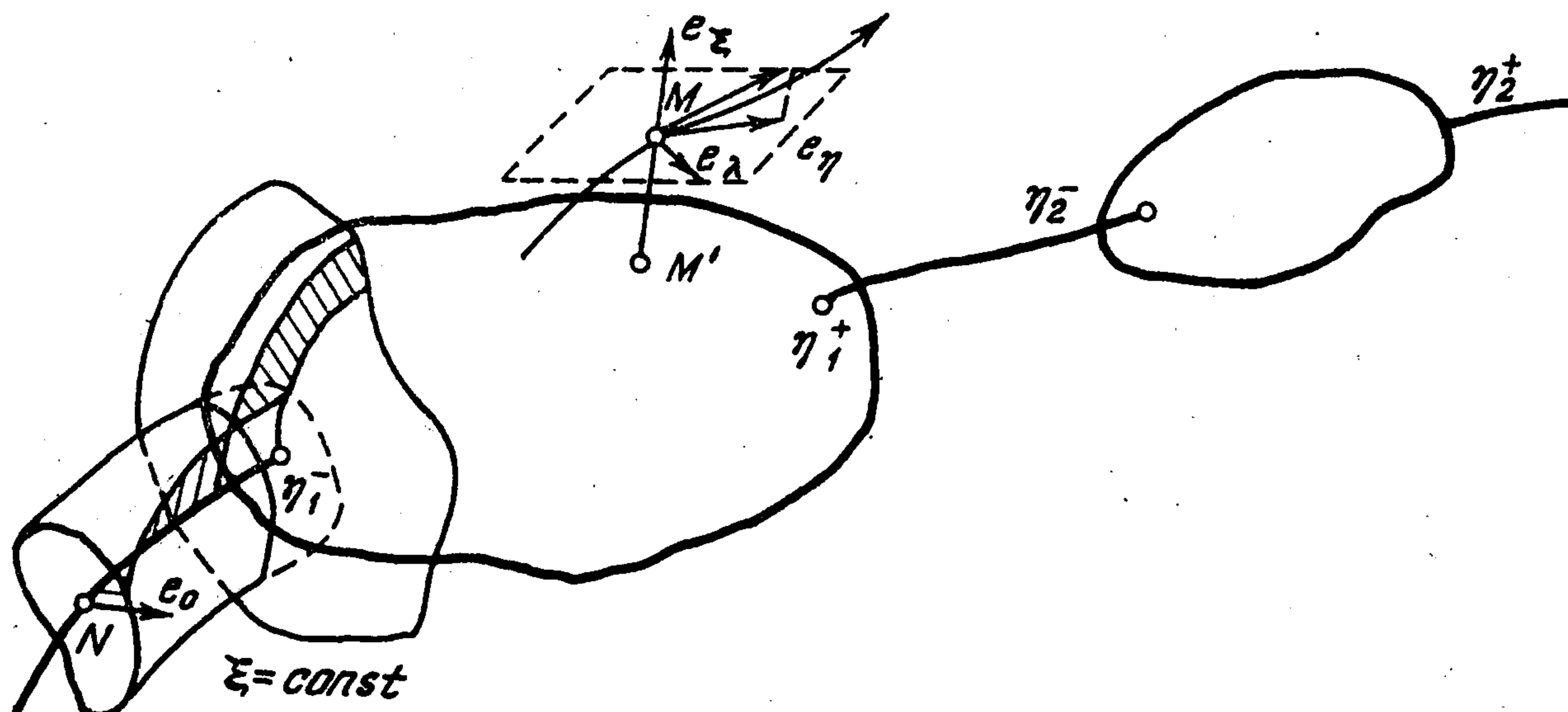
1. Постановка задачи. Рассмотрим трехмерную задачу о стационарной конвективной диффузии к поверхностям твердых частиц, обтекаемых ламинарным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Предполагается, что в любой точке поверхности каждой частицы может быть проведена единственная нормаль и существует область, в которой эти нормали не пересекаются.

Назовем точкой натекания (вытекания) критическую точку поверхности частицы (т. е. точку, к которой подходит линия тока), в окрестности которой нормальная компонента скорости жидкости направлена к поверхности (от поверхности), а линию тока, выходящую из нее, — траекторией натекания (вытекания). Траектории натекания и вытекания называем несущими линиями. Критические точки могут быть как изолированными, так и образовывать критические линии на поверхности частицы.

Пока будем считать, что на поверхности каждой частицы есть только две изолированные критические точки. Тогда в силу закона сохранения массы одна из них — точка натекания, а вторая — точка вытекания. Мно-

жество частиц и выходящих из них несущих линий называем цепочкой, если любые частицы этого множества могут быть соединены непрерывной кривой, проходящей по поверхностям частиц и несущим линиям (фиг. 1). Нумерация частиц в цепочке ведется от крайней частицы, на которую приходит траектория натекания из бесконечности.

Считая, что поле течения жидкости найдено из решения соответствующей гидродинамической задачи, введем для каждой цепочки локальную



Фиг. 1

ортогональную систему координат ξ, η, λ . Для этого нужно указать направление ортов в любой точке M , лежащей вблизи цепочки, и указать, как ведется отсчет криволинейных координат.

Ближайшая к M точка M' , принадлежащая цепочке, определяет направление орта e_ξ , а отрезок $|MM'|$ задает безразмерную координату ξ (обезразмеривание проводится с помощью характерного размера частиц, который считается единым для всей цепочки). Так как несущие линии выходят с поверхности частиц, то введенные таким образом координатные поверхности $\xi = \text{const}$ не являются гладкими. Поэтому устроим локальное сглаживание.

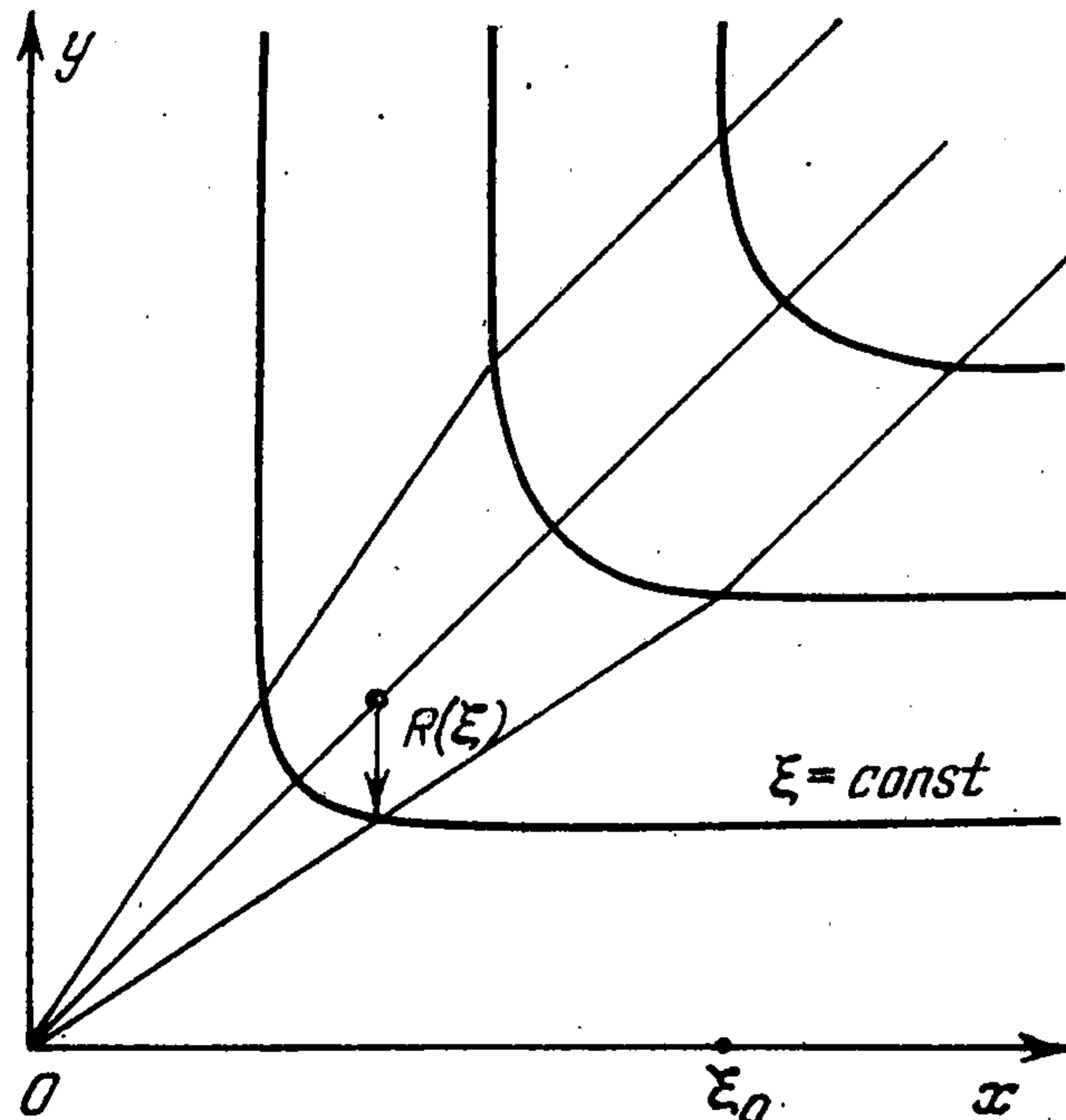
Рассмотрим простейший случай, когда несущая линия подходит по нормали к поверхности частицы. На фиг. 2 показаны координатные поверхности $\xi = \text{const}$ в окрестности критической точки, где ось x направлена по несущей линии, а y лежит в касательной плоскости к поверхности частицы в этой точке. Для фиксированного ξ кривой

$$\begin{aligned} [x - \xi + R(\xi)]^{2n} + [y - \xi - R(\xi)]^{2n} &= R^{2n}(\xi) \\ x &\leq \xi + R(\xi), \quad y \leq \xi + R(\xi) \\ R(\xi) &= \begin{cases} \alpha, & \xi \geq \xi_0 \\ \alpha \xi \xi_0^{-1}, & \xi < \xi_0 \end{cases} \quad (\alpha > 0, \xi_0 > 1) \end{aligned}$$

можно сгладить координатные поверхности $\xi = \text{const}$ до любой гладкости (в зависимости от n). Поэтому в дальнейшем везде считаем, что эти координатные поверхности сглажены с помощью аналогичной процедуры.

Направление орта e_η определится проекцией вектора скорости жидкости в точке M на плоскость, перпендикулярную e_ξ , а орт e_λ выбирается

так, чтобы система векторов e_ξ, e_η, e_λ составляла ортогональную правую тройку. Через произвольную точку N , лежащую на траектории натекания первой частицы, проводим координатную поверхность, на которой вторая криволинейная координата (η) сохраняет постоянное значение. В касательной плоскости к точке N этой поверхности произвольным образом фиксируем вектор e_0 . Направление несущей линии и этого вектора определяет координатную поверхность $\lambda = 0$, от которой в дальнейшем ведется отсчет. При этом величину λ определим углом между e_0 и вектором нормали к координатной поверхности $\lambda = \text{const}$ в точке N ($0 \leq \lambda \leq 2\pi$). Координату η определим длиной дуги от точки N вдоль линии пересечения поверхности $\lambda = 0$ и поверхности цепочки ($\xi = 0$) (фиг. 1).



Фиг. 2

В такой системе координат вектор скорости жидкости в каждой точке имеет вид $u = \{u_\xi, u_\eta, 0\}$ и обладает следующими свойствами вблизи цепочки (при $\xi \rightarrow 0$):

$$(1.1) \quad u_\xi = \xi^2 O(1), \quad u_\eta = \xi O(1)$$

$$(1.2) \quad u_\xi = \xi O(1), \quad u_\eta = O(1)$$

Здесь первое свойство справедливо вблизи поверхностей частиц и вытекает из гидродинамического граничного условия прилипания, а второе выполняется вблизи несущих линий, так как направляющий вектор этих траекторий совпадает с направлением вектора скорости жидкости. Эти свойства нарушаются вблизи критических точек.

Компоненты метрического тензора обладают следующими свойствами при $\xi \rightarrow 0$:

$$(1.3) \quad g_{11} = O(1), \quad g_{22} = O(1), \quad g_{33} = O(1)$$

$$(1.4) \quad g_{11} = O(1), \quad g_{22} = O(1), \quad g_{33} = \xi^2 O(1)$$

где свойство (1.3) выполняется вблизи поверхностей частиц, а (1.4) — вблизи несущих линий.

В дальнейшем считаем, что соответствующее поле течения квазистационарно и на рассматриваемом интервале времени частицы принадлежат одной и той же цепочке (в частности, это будет выполнено, если система частиц неподвижна (закреплена), а поток жидкости установившийся).

С учетом этого, пренебрегая производными по времени, запишем безразмерное уравнение стационарной конвективной диффузии в предположении полного поглощения диффундирующего вещества на поверхностях

частиц и постоянства концентрации вдали от них

$$(1.5) \quad \frac{u_\xi}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial c}{\partial \xi} + \frac{u_\eta}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial c}{\partial \eta} =$$

$$= \frac{\varepsilon^3}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \frac{\partial c}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\sqrt{g}}{g_{22}} \frac{\partial c}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \frac{\partial c}{\partial \lambda} \right\}$$

$$c|_{\xi \rightarrow 0, \eta_k^- \leq \eta \leq \eta_k^+} = 0, \quad c|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 1 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$g = g_{11}g_{22}g_{33}, \quad \varepsilon^{-3} = P = aU / D$$

Здесь P — число Пекле, a — характерный размер частиц, U — характерная скорость натекающего потока, D — коэффициент диффузии, η_k^- (η_k^+) — координата точки натекания (вытекания) k -й частицы.

2. Диффузия к одиночной частице. Уравнение неразрывности несжимаемой жидкости имеет вид

$$(2.1) \quad (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(u_\xi \sqrt{\frac{g}{g_{11}}} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u_\eta \sqrt{\frac{g}{g_{22}}} \right) \right] = 0$$

Определим функцию $\Phi(\xi, \eta, \lambda)$ как решение системы

$$(2.2) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi = \sqrt{\frac{g}{g_{22}}} u_\eta, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi = -\sqrt{\frac{g}{g_{11}}} u_\xi, \quad \Phi(0, 0, \lambda) = 0$$

Тогда уравнение неразрывности удовлетворяется автоматически. Система (2.2) имеет единственное решение, так как ввиду (2.1) выполнено условие интегрируемости [3]. Функция Φ обращается в нуль на поверхности цепочки.

Поверхности $\Phi(\xi, \eta, \lambda) = \text{const}$ имеют простой физический смысл для однородного и прямолинейного потока на бесконечности. Траектория натекания вдали от первой частицы в этом случае представляет собой прямую линию. Выделенные элементы жидкости, лежащие на равном расстоянии от этой прямой вдали от частицы, дадут наглядное представление о поверхности $\Phi = \text{const}$, если проследить за ними в процессе обтекания цепочки. Если поле течения обладает осевой симметрией, то Φ совпадает с обычной функцией тока.

Можно показать, что поверхность $\Phi(\xi, \lambda, \eta) = \text{const}$ образована линиями тока, а пересечение поверхностей $\Phi = \text{const}$ и $\lambda = \text{const}$ выделяет фиксированную линию тока.

Задача (1.5) с учетом (2.2) принимает вид

$$(2.3) \quad -\frac{\partial(c, \Phi)}{\partial(\xi, \eta)} = \varepsilon^3 \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \frac{\partial c}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\sqrt{g}}{g_{22}} \frac{\partial c}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \frac{\partial c}{\partial \lambda} \right\}$$

$$c|_{\xi \rightarrow 0, \eta_k^- \leq \eta \leq \eta_k^+} = 0, \quad c|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 1 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Из свойств (1.1) — (1.4) видно, что функцию Φ вблизи цепочки ($\xi \rightarrow 0$) можно представить в виде

$$(2.4) \quad \Phi(\xi, \eta, \lambda) = \xi^2 f(\eta, \lambda)$$

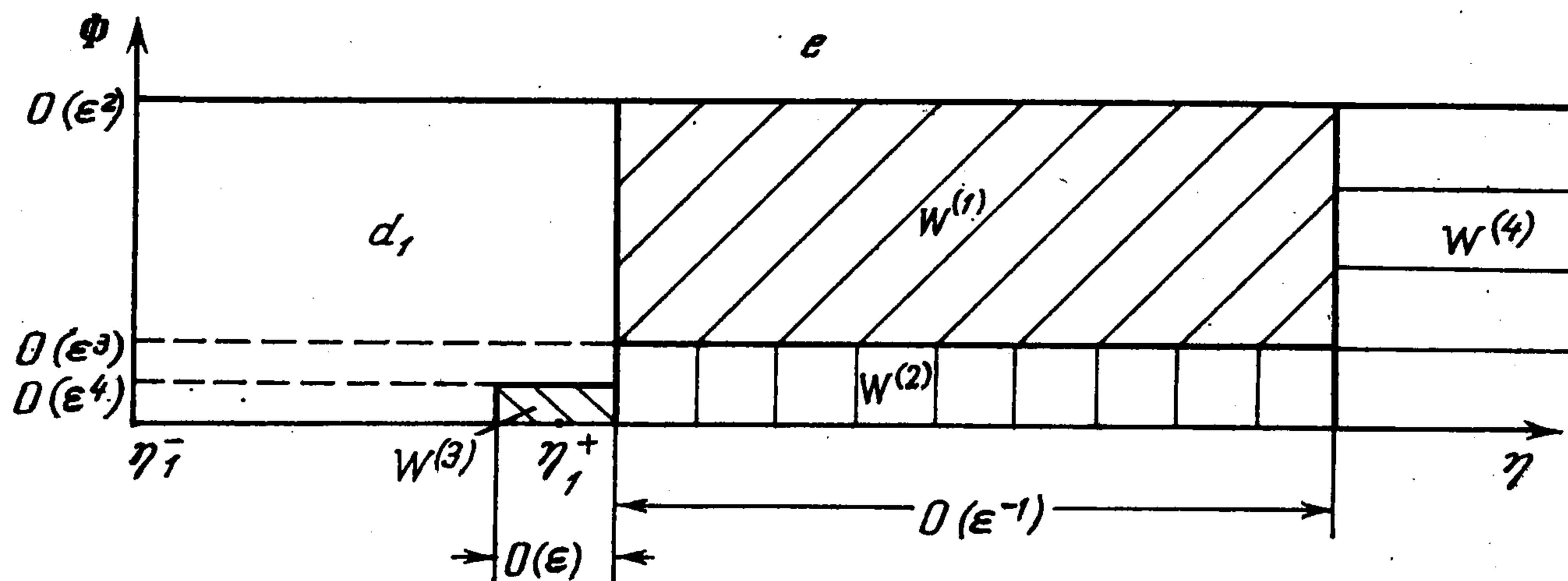
$$f(\eta, \lambda)|_{\eta \rightarrow \eta_k^-} \rightarrow \alpha_k^-(\lambda) (\eta - \eta_k^-)^2$$

$$f(\eta, \lambda)|_{\eta \rightarrow \eta_k^+} \rightarrow \alpha_k^+(\lambda) (\eta - \eta_k^+)^2$$

В дальнейшем считаем, что число Пекле велико, т. е. $\varepsilon \ll 1$.

Асимптотический анализ уравнения (2.3) с учетом (2.4) показывает, что при $\varepsilon \ll 1$ в окрестности частицы можно выделить несколько областей с раз-

личным механизмом массопереноса, которые схематически показаны на фиг. 3. Это внешняя область e , область передней критической точки b , диффузионный погранслой d и область диффузионного следа W , которая, в свою очередь, состоит из подобластей $W^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3, 4$). В каждой из этих областей уравнение (2.1) заменяется приближенным путем выделения главных членов разложений по малому параметру ε . Соответствие между



Фиг. 3

решениями в отдельных областях устанавливается асимптотическим сравнением.

Во внешней области $e = \{O(\varepsilon) < \xi, O(\varepsilon) < |\eta - \eta_k^+|, O(\varepsilon) < |\eta - \eta_k^-|\}$ (здесь и далее неравенства в фигурных скобках указывают порядок характерных размеров рассматриваемой области, где область изменения параметра $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 2\pi$ опущена) правая часть уравнения (2.3) несущественна. Поэтому концентрация растворенного компонента в e сохраняет постоянное значение, равное единице.

Массообмен в пограничном слое $d_1 = \{\Phi < O(\varepsilon^2), O(\varepsilon) < \eta - \eta_1^-, O(\varepsilon) < \eta_1^+ - \eta\}$ характеризуется тем, что диффузионным переносом вещества вдоль поверхности частицы можно пренебречь по сравнению с переносом по нормали. Введя переменные $\zeta = \varepsilon^{-1}\Phi^{1/2}, \eta, \lambda$ из уравнения (2.3) с учетом (2.4) получаем следующую задачу для определения концентрации в d_1 :

$$(2.5) \quad L(t_1, \zeta) c_1^{(d)} = 0, \quad L = \frac{\partial}{\partial t} - \zeta^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}$$

$$c_1^{(d)}|_{t_1=0} = 1, \quad c_1^{(d)}|_{\zeta=0} = 0, \quad c_1^{(d)}|_{\zeta \rightarrow \infty} \rightarrow 1$$

$$t_1 = \tau(\eta, \eta_1^-, \lambda), \quad \tau = (\eta, \mu, \lambda) = \frac{1}{2} \int_{\mu}^{\eta} f^{1/2}(\eta, \lambda) \Lambda(\eta, \lambda) d\eta$$

$$\Lambda(\eta, \lambda) = [V \bar{g} g_{11}^{-1}]_{\xi=0}$$

Здесь начальное условие соответствует условию натекания на переднюю критическую точку. Решение задачи (2.5) имеет вид

$$(2.6) \quad c_1^{(d)}(\zeta, t_1) = \Gamma^{-1}(1/3) \gamma(1/3, \zeta^3 / 9t_1)$$

где $\gamma(1/3, x)$ — неполная гамма-функция.

Локальный и полный диффузионные потоки на поверхность частицы определяются формулами

$$(2.7) \quad j(\eta, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{g_{11}^0}} \frac{\partial c_1^{(d)}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{f^{1/3}(\eta, \lambda)}{\varepsilon \sqrt{g_{11}^0} \Gamma(1/3)} \frac{3^{1/3}}{t_1^{1/3}(\eta, \lambda)}, \quad g_{11}^0 = [g_{11}]_{\xi=0}$$

$$I = \int_s j ds = \int_0^{2\pi} \int_{\eta_1^-}^{\eta_1^+} j(\eta, \lambda) \Lambda(\eta, \lambda) \sqrt{g_{11}^0} d\eta d\lambda$$

Анализ оставленных и отброшенных членов уравнения (2.3) показывает, что решение (2.6) становится непригодным при $\eta \rightarrow \eta_1^+$. Поэтому здесь, как и для осесимметричного обтекания частицы [1], необходимо рассмотреть диффузионный след $W_1 = \{\Phi < O(\varepsilon^2), \eta_1^+ - \varepsilon < \eta\}$, состоящий из четырех подобластей $W_1^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3, 4$), фиг. 3.

В конвективно-погранслошной области $W_1^{(1)} = \{\Phi < O(\varepsilon^2), O(\varepsilon) < \eta - \eta_1^+\}$ правая часть уравнения (1.5) несущественна, поэтому концентрация здесь зависит лишь от Φ и λ и вдоль линий тока сохраняет постоянное значение, равное значениям на выходе из диффузионного погранслоя.

Явное выражение для концентрации в $W_1^{(1)}$ определяется сращиванием с решением (2.6) и имеет вид

$$(2.8) \quad c_1^{(1)}(\xi, \lambda) = c_1^{(d)}(\xi, \eta, \lambda)_{\eta \rightarrow \eta_1^+} = \Gamma^{-1}(1/3) \gamma(1/3, \xi^3 / 9t_1^0(\lambda))$$

$$t_1^0(\lambda) = t_1(\eta, \lambda)_{\eta = \eta_1^+}$$

Области задней критической точки $W_1^{(3)} = \{\Phi < O(\varepsilon^4), |\eta - \eta_1^+| < O(\varepsilon)\}$, где существенны как нормальный, так и тангенциальный перенос, внутренняя область следа $W_1^{(2)} = \{\Phi < O(\varepsilon^3), O(\varepsilon) < \eta - \eta_1^+ < O(\varepsilon^{-1})\}$ и область смещения $W_1^{(4)} = \{\Phi < O(\varepsilon^2), O(\varepsilon^{-1}) < \eta - \eta_1^+\}$, где существен лишь нормальный перенос, здесь рассматриваться не будут. Отметим лишь порядок (по ε) концентрации в этих областях: $c_1^{(2)} \sim \sqrt{\varepsilon}$, $c_1^{(3)} \sim \varepsilon$, $c_1^{(4)} \sim 1$. Подробный анализ этих областей в случае осесимметричного обтекания проведен в [1, 4-6]. Следует отметить, что более сложный анализ трехмерного диффузионного пограничного слоя проведен в [7], где для уравнения стационарной конвективной диффузии, записанного в погранслошных координатах, было найдено преобразование, сводившее его к уравнению с разделяющимися переменными.

3. Диффузия к произвольной частице цепочки. Здесь предполагаем, что расстояние между частицами удовлетворяет условию $\eta_{k+1} - \eta_k^+ < O(\varepsilon^{-1})$. На поверхности второй частицы можно выделить области задней $W_2^{(3)} = \{\Phi < O(\varepsilon^4), |\eta - \eta_2^+| < O(\varepsilon)\}$ и передней $b_2 = \{\Phi < O(\varepsilon^4), |\eta - \eta_2^-| < O(\varepsilon)\}$ критических точек и область диффузионного пограничного слоя $d_2 = \{\Phi < O(\varepsilon^2), O(\varepsilon) < \eta - \eta_2^-, O(\varepsilon) < \eta_1^+ - \eta\}$. Вклады областей $W_2^{(3)}$ и b_2 в полный диффузионный поток несущественны по сравнению с вкладом d_2 . Поэтому для нахождения главного члена разложения полного диффузионного потока на вторую частицу по степеням ε достаточно получить решение в диффузионном погранслое d_2 .

Уравнение и граничные условия для концентрации в диффузионном пограничном слое второй частицы имеют вид

$$(3.1) \quad L(t_2, \zeta) c_2^{(d)} = 0, \quad t_2(\eta, \lambda) = \tau(\eta, \eta_2^-, \lambda) \\ c_2^{(d)}|_{\zeta \rightarrow 0, \eta_2^- \leq \eta \leq \eta_2^+} = 0, \quad c_2^{(d)}|_{\zeta \rightarrow \infty} \rightarrow 1 \quad (\zeta = \varepsilon^{-1} \Phi^{1/2})$$

где τ и L определены в выражении (2.5).

Условие натекания для диффузионного погранслоя второй частицы определяется сращиванием с решениями в областях $W_1^{(1)}$ и $W_1^{(2)}$ первой частицы. Используя решение уравнения (3.1) с произвольным начальным условием, можно показать, что распределение концентрации во внутренней области следа первой частицы не влияет на старший член разложения по степеням ε решения в d_2 . Поэтому условие натекания для второй частицы определяется выражением (2.8).

Аналогично рассуждениям, проведенным для первой частицы, можно показать, что уравнения (3.1) недостаточно для получения распределения концентрации в окрестности точки вытекания второй частицы. Поэтому необходимо рассмотреть диффузионный след второй частицы W_2 , конвективно-погранслоя область $W_2^{(1)} = \{\Phi < O(\varepsilon^2), O(\varepsilon) < \eta - \eta_2^+\}$ которого будет определять условие натекания для диффузионного пограничного слоя третьей частицы.

Рекуррентная система уравнений, описывающая распределение концентрации в диффузионном погранслое любой частицы, имеет вид

$$(3.2) \quad L(t_k, \zeta) c_k^{(d)} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \\ c_k^{(d)}|_{\zeta=0, \eta_k^- \leq \eta \leq \eta_k^+} = 0, \quad c_k^{(d)}|_{\zeta \rightarrow \infty} \rightarrow 1 \\ c_k^{(d)}|_{t_k=0} = c_{k-1}^{(d)}(\zeta, t_{k-1}^0), \quad c_0^{(d)} = 1 \\ t_k = \tau(\eta, \eta_k^-, \lambda), \quad t_k^0 = \tau(\eta_k^+, \eta_k^-, \lambda) \quad (\zeta = \varepsilon^{-1} \Phi^{1/2})$$

где τ и L определены в уравнении (2.5).

Введение новой переменной

$$(3.3) \quad t_* = t_*(\eta, \lambda) = \sum_{i=1}^{k-1} t_i^0 + t_k$$

сводит систему (3.2) к одному уравнению

$$(3.4) \quad L(t_*, \zeta) c = 0, \quad c|_{t_*=0} = 1 \\ c|_{\zeta=0} = 0, \quad c|_{\zeta \rightarrow \infty} \rightarrow 1$$

решение которого имеет вид [8]

$$(3.5) \quad c = \Gamma^{-1}(1/3) \gamma(1/3, \zeta^3 / 9t_*)$$

Локальный и полный диффузионные потоки на k -ю частицу определяются формулами

$$(3.6) \quad j_k(\eta, \lambda) = \frac{f^{1/2}(\eta, \lambda)}{\varepsilon \sqrt{g_{11}^0} \Gamma(1/3)} \frac{3^{1/3}}{t_*^{1/3}} \quad (\eta_k^- \leq \eta \leq \eta_k^+)$$

$$I_k = \int_0^{2\pi} \int_{\eta_k^-}^{\eta_k^+} j_k \Lambda \sqrt{g_{11}^0} d\eta d\lambda = I_{\Sigma}^{(k)} - I_{\Sigma}^{(k-1)}$$

$$I_{\Sigma}^{(k)} = \varepsilon^{-1} \Gamma^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) 3^{4/3} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{i=1}^k t_i^0(\lambda) \right]^{2/3} d\lambda$$

Используя выражения (3.3), (3.6), исследуем поведение полного потока на частицу в цепочке для больших номеров k

$$(3.7) \quad k \rightarrow \infty, \quad I_k \rightarrow \frac{2 \cdot 3^{1/3}}{\varepsilon \Gamma(1/3)} \int_0^{2\pi} t_k^0(\lambda) \left[\sum_{i=1}^k t_i^0(\lambda) \right]^{-1/3} d\lambda$$

Для цепочки периодической структуры (любой гидродинамический параметр, описывающий цепочку, удовлетворяет условию $\alpha(\eta + T, \lambda) = \alpha(\eta, \lambda)$, $T = \eta_2^- - \eta_1^-$) из выражения (3.7) имеем

$$(3.8) \quad I_{\Sigma}^{(k)} = I_1 k^{2/3}, \quad I_k = I_1 [k^{2/3} - (k-1)^{2/3}]$$

$$k \rightarrow \infty, \quad I_k \rightarrow 2/3 I_1 k^{-1/3}, \quad I_1 = \varepsilon^{-1} \Gamma^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) 3^{4/3} \int_0^{2\pi} t_1^{2/3}(\lambda) d\lambda$$

где I_1 — полный диффузионный поток на первую частицу.

Рассмотрим теперь поле течения, задающее, помимо изолированных критических точек, критические линии на поверхностях частиц. Такие линии определяют двумерные несущие поверхности, которые могут быть исследованы аналогично [2], где показано, что диффузионный след в этом случае состоит лишь из области задней критической точки (вытекания) и области смещения с общей протяженностью $O(R^{-1/2})$. Это указывает на то, что при конечных размерах области замкнутой циркуляции (возникающей за частицами при $R \gg 10$, R — число Рейнольдса) диффузионное взаимодействие в цепочке незначительно, и полный поток вещества к каждой частице может быть вычислен лишь по локальному полю скоростей вблизи ее поверхности.

Поясним это на примере цепочки с периодической структурой поля течения. Считаем, что поле течения вблизи фиксированной частицы зависит от некоторого параметра ω (например числа Рейнольдса) и ведет себя следующим образом при увеличении ω : при $0 \leq \omega \leq \omega_1$ на поверхностях частиц есть только две изолированные критические точки, при $\omega_1 < \omega$ за частицами появляются области замкнутой циркуляции, размеры которых увеличиваются при дальнейшем возрастании ω , при $\omega_2 < \omega$ характерные размеры области замкнутой циркуляции становятся много больше $R^{-1/2}$.

Исследуем массообмен такой системы в зависимости от величины параметра ω . При $0 \leq \omega \leq \omega_1$ для полного диффузионного потока на частицы справедливы выражения (3.8). При $\omega_1 < \omega$ за частицами появляются области замкнутой циркуляции, диффузионный след начинает перестраиваться и при $\omega_2 < \omega$ будет состоять лишь из области задней критической точки и области смещения. При этом диффузионным взаимодействием частиц можно пренебречь, и полные диффузионные потоки определяются по формуле

$$I_k = I_1, \quad I_{\Sigma}^{(k)} = k I_1$$

В случае $\omega_1 < \omega < \omega_2$ диффузионное влияние частиц одна на другую требует отдельного изучения, однако можно утверждать, что для суммарного диффузионного потока во всем диапазоне изменения параметра ω справедлива формула

$$(3.9) \quad I_{\Sigma}^{(k)} = I_1(\omega) k^{\gamma(\omega)}, \quad 2/3 \leq \gamma(\omega) \leq 1$$

Отметим, что все полученные выше формулы (п. 2,3) остаются справедливыми в любой системе координат $(\xi^*, \eta^*, \lambda^*)$, эквивалентной (ξ, η, λ) (т. е. $e_{\xi} = e_{\xi^*}$, $e_{\eta} = e_{\eta^*}$, $e_{\lambda} = e_{\lambda^*}$, $g_{kk} / g_{kk}^* = O(1)$, $k = 1, 2, 3$).

Осесимметричный случай. В этом случае $\partial / \partial \lambda = 0$, и введенная в п. 1 система координат вблизи поверхности частиц переходит в обычную систему координат, которая часто используется при исследовании гидродинамического пограничного слоя.

Для полного диффузионного потока выражение (3.6) упрощается и принимает вид

$$(3.10) \quad I_{\Sigma}^{(k)} = 2\pi \varepsilon^{-1/3} \Gamma^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) \left[\sum_{i=1}^k t_i^0 \right]^{2/3}, \quad \Lambda(\eta) = [V \bar{g} g_{11}^{-1}]_{\xi=0}$$

$$t_k^0 = 2^{-3/2} \int_{\eta_k^-}^{\eta_k^+} \left[\Lambda \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \right)^{1/2} \right]_{\xi=0} d\eta$$

Рассмотрим теперь цепочку сфер с радиусами $\kappa(k) = O(1)$, расположенных на расстояниях $1 \ll l_k \ll \varepsilon^{-1}$ одна за другой на оси поступательного стока потока. За характерный размер частиц считаем радиус первой сферы. В сферической системе координат, неподвижно связанной с центром k -й частицы, для функции тока имеем

$$(3.11) \quad \psi_k = 3/4 (r_k - \kappa(k))^2 \sin^2 \theta_k + O(l_*^{-1}) + O(r_k - \kappa(k))^3$$

$$l_* = \min_k l_k$$

Учитывая, что вблизи поверхности сферы $\Lambda = \kappa^2(k) \sin^2 \theta_k$, и используя выражения (3.10), (3.11), для полных диффузионных потоков получаем

$$(3.12) \quad I_{\Sigma}^{(k)} = I_1 \left[\sum_{i=1}^k \kappa^2(i) \right]^{2/3}, \quad I_k = I_{\Sigma}^{(k)} - I_{\Sigma}^{(k-1)}$$

$$k \rightarrow \infty, \quad I_k \rightarrow \frac{2}{3} \kappa^2(k) \left[\sum_{i=1}^k \kappa^2(i) \right]^{-1/3} I_1$$

$$I_1 = (3\pi)^{2/3} / (2\varepsilon \Gamma(1/3))$$

Полагая в (3.12) $\kappa(k) = 1$, получаем результат [1].

При $\kappa(k) = k^{\nu}$ из формул (3.12) получаем следующие выражения для диффузионных потоков:

$$(3.13) \quad k \rightarrow \infty, \quad I_{\Sigma}^{(k)} \rightarrow (2\nu + 1)^{-2/3} k^{(4\nu+2)/3} I_1$$

$$I_k \rightarrow 2/3 (2\nu + 1)^{1/3} k^{(4\nu-1)/3} I_1 \quad (\nu > -1/2)$$

Определим закон роста радиусов сфер $\kappa(k)$ в цепочке, при котором полные диффузионные потоки на каждую из них равны между собой, т. е.

$I_k = I_1$. Используя (3.12) и учитывая, что $I_\Sigma^{(k)} = kI_1$, для радиусов сфер имеем

$$(3.14) \quad \kappa(k) = \sqrt{k^{3/2} - (k-1)^{3/2}}, \quad \kappa(k \rightarrow \infty) \rightarrow \sqrt{3/2} k^{1/4}$$

4. Плоский случай. Рассмотрим задачу о диффузии к цепочке цилиндров, обтекаемых ламинарным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Считаем, что функция тока известна из решения соответствующей задачи о гидродинамическом обтекании и у каждого цилиндра есть лишь две критические точки. Цепочка разделяет всю область течения на две подобласти, в которых постоянен знак функции тока.

Введем координаты ξ и η , нумерацию тел и обозначения, аналогично тому, как это делалось в п. 1, 2. Распределение концентрации в потоке определяется решением уравнения (2.3) с учетом того, что $\partial / \partial \lambda = 0$, $g_{33} = 1$. Вблизи цепочки функцию тока можно представить в виде

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \xi \rightarrow 0, \quad \psi(\xi, \eta) &\rightarrow \xi^2 f(\eta) \quad (\eta_k^- < \eta < \eta_k^+) \\ \xi \rightarrow 0, \quad \psi(\xi, \eta) &\rightarrow \xi h(\eta) \quad (\eta_k^+ < \eta < \eta_{k+1}^-) \end{aligned}$$

В дальнейшем, без ограничения общности, рассмотрим область $\psi \geq 0$.

Асимптотический анализ задачи (2.3), (4.1) показывает (при $\varepsilon \rightarrow 0$), что вблизи поверхностей цилиндров существуют четыре области с различным механизмом массопереноса [2]. Это внешняя область e , область диффузионного погранслоя $d_k = \{\xi < O(\varepsilon), \eta_k^+ - \eta < O(\varepsilon), \eta - \eta_k^- < O(\varepsilon)\}$, область задней критической точки $W_k^{(3)} = \{\xi < O(\varepsilon), |\eta - \eta_k^+| < O(\varepsilon)\}$ и область смешения $W_k^{(4)} = \{\psi < O(\varepsilon^2), O(\varepsilon) < \eta - \eta_k^+ < O(\varepsilon^{1/3})\}$. Конвективно-погранслои и внутренняя области диффузионного следа в данном случае отсутствуют, а общая протяженность диффузионного следа имеет порядок $\varepsilon^{1/3}$. Поэтому, если расстояния между цилиндрами много больше $R^{-1/3}$, то полный диффузионный поток на любой цилиндр определяется лишь локальным полем течения вблизи его поверхности.

Распределение концентрации в диффузионном погранслое k -го цилиндра определяется решением уравнения (2.5) с начальным условием, которое задается концентрацией в диффузионном следе предыдущего $(k-1)$ -го цилиндра. Для первого цилиндра имеем $c_1^{(d)}(t_1 = 0) = 1$.

При $l_k^r = \eta_{k+1}^- - \eta_k^+ < O(\varepsilon)$ происходит непосредственное взаимодействие диффузионных погранслоев цилиндров. В этом случае для концентрации в d_k можно построить рекуррентную систему уравнений, аналогичную (3.2). Поэтому для концентрации и локального диффузионного потока можно воспользоваться формулами (3.5), (3.6) с учетом того, что $g_{33} = 1$. Для полного диффузионного потока (на часть поверхности цилиндра, прилегающей к области $\psi \geq 0$) получаем

$$(4.2) \quad I_\Sigma^{(k)} = \varepsilon^{-13/3} \Gamma^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) \left[\sum_{i=1}^k t_i^0 \right]^{2/3}, \quad I_k = I_\Sigma^{(k)} - I_\Sigma^{(k-1)}$$

$$t_i^0 = \frac{1}{2} \int_{\eta_i^-}^{\eta_i^+} f^{1/2} \Lambda d\eta, \quad \Lambda = \left[\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \right]_{\xi=0}$$

Для цепочки цилиндров периодической структуры выражения для полных диффузионных потоков определяются формулами (3.8), где I_1 — полный диффузионный поток на первый цилиндр. В частности, для пучка цилиндров, состоящего из параллельных цепочек круговых цилиндров равного радиуса, расположенных на общей оси на расстоянии $l < O(\varepsilon)$ один от другого, имеем

$$I_1 = \frac{\varepsilon^{-1} 3^{4/3} (2\pi\Omega)^{1/3}}{\Gamma(1/3)} \left(\frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(5/4)} \right)^{2/3}, \quad f(\theta) = \Omega \sin \theta$$

где Ω — постоянная, зависящая от пористости пучка, разная в разных ячеечных моделях (см., например, [9,10]).

При $O(\varepsilon) < l_k < O(\varepsilon^{1/3})$ условие натекания на k -й цилиндр определяется концентрацией в области смешения $(k-1)$ -го цилиндра. В дальнейшем для упрощения считаем, что особая линия тока лежит на оси симметрии потока. Заменой

$$x_k = x_k(\eta) = \varepsilon^{-1} \int_{\eta_k^+}^{\eta} h(\eta) \Lambda(\eta) d\eta, \quad z = \varepsilon^{-2} \psi \quad (z = \zeta^2)$$

задача о распределении концентрации в области смешения сводится к обычному уравнению теплопроводности [2]

$$(4.3) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) c_k^{(4)} = 0, \quad \frac{\partial c_k^{(4)}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad c_k^{(4)} \Big|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 1$$

начальным условием, задаваемым концентрацией на выходе из диффузионного погранслоя d_k .

Используя решения уравнений (2.5), (4.3) с произвольным начальным условием, получаем следующее выражение для концентрации в диффузионном погранслое произвольного цилиндра:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} c_k^{(d)}(\zeta, t_k) &= A(\zeta, t_k) * c_{k-1}^{(4)}(z, x_{k-1}^0), \quad c_0^{(4)} = 1 \quad (z = \zeta^2) \\ c_k^{(4)}(z, x_k) &= B(z, x_k) * c_k^{(d)}(\zeta, t_k^0), \quad x_k^0 = x_k(\eta_{k+1}^-) \\ A(\zeta, \tau) * u(\zeta) &= \int_0^\infty \zeta^* \frac{(\zeta \zeta^*)^{1/2}}{3\tau} \exp\left(-\frac{\zeta^3 + \zeta^{*3}}{9\tau}\right) I_{1/3}\left(\frac{2\zeta^{3/2} \zeta^{*3/2}}{9\tau}\right) \times \\ &\times u(\zeta^*) d\zeta^* \\ B(z, \tau) * u(z) &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{z^2 + z^{*2}}{4\tau}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{zz^*}{2\tau}\right) u(z^*) dz^* \end{aligned}$$

Можно показать, что выражения (4.4) справедливы для любых расстояний между цилиндрами в цепочке $0 \leq l_k < \infty$.

5. Обсуждение результатов. Для трехмерных тел конечных размеров аналогично [1] можно исследовать область смешения диффузионного следа $W_k^{(4)} = \{\Phi < O(\varepsilon^2), \rho_k = \varepsilon(\eta - \eta_{k+1}^-) = O(1)\}$. Концентрация в этой области при $\rho_k \rightarrow \infty$ выравнивается до необедненной ($c_k^{(4)} \rightarrow 1$). Поэтому, если расстояния между частицами в цепочке достаточно велики $\eta_k^- - \eta_{k-1}^+ > O(\varepsilon^{-1})$, распределение концентрации и диффузионные потоки на k -ю частицу определяются лишь по локальному полю скоростей вблизи ее поверхности.

Из результатов п. 1—3 видно, что вблизи цепочки при $\Phi \gg \varepsilon^2$ концентрация растворенного в потоке вещества практически не отличается от

концентрации в натекающем потоке. Поэтому, если расстояния между цепочками велики по сравнению с $P^{-1/3}$, они не оказывают никакого влияния (по диффузии) одна на другую.

Проведенный анализ качественно согласуется с экспериментальными данными по тепломассообмену в дисперсных системах (см., например, [11]). В частности, из результатов п. 3,4 следует, что при небольших числах Рейнольдса в концентрированных дисперсных системах, в массообмене твердой фазы с жидкой решающую роль играет структура особых линий тока, начинающихся и оканчивающихся на поверхностях частиц. В этом случае в потоке имеется значительное число цепочек, внутренний массообмен в которых сильно заторможен взаимодействием диффузионных следов и погранслоев частиц, принадлежащих цепочке. Например, в цепочках с периодической структурой полный диффузионный поток на частицы убывает как $k^{-1/3}$, $k \rightarrow \infty$ (k — номер частицы в цепочке), а суммарный поток на все частицы цепочки пропорционален $k^{2/3}$ и значительно меньше суммарного потока, вычисленного по автомодельному решению [8] (без учета диффузионного взаимодействия частиц), где он пропорционален k .

Эта закономерность остается справедливой при увеличении числа Рейнольдса до тех пор, пока за частицами отсутствуют области замкнутой циркуляции, содержащие кольцевой вихрь. С появлением области замкнутой циркуляции диффузионные следы начинают «размываться» и для достаточно большого вихря имеют характерные размеры порядка $P^{-1/3}$ [2]. При этом для частиц, удаленных одна от другой на расстояния много больше $P^{-1/3}$, массообмен твердой фазы с жидкой носит аддитивный характер, т. е. полный диффузионный поток на частицу определяется лишь локальным полем течения вблизи ее поверхности.

Автор благодарит Ю. П. Гупало и Ю. С. Рязанцева за внимание к работе.]

Поступила 26 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. О массообмене частиц, расположенных на оси потока, при больших числах Пекле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 2.
2. Полянин А. Д. О структуре диффузионного следа поглощающей частицы вблизи критических линий. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 3.
3. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М., «Наука», 1966.
4. Sin P. H., Newman J. Mass transfer to the rear of a sphere in Stokes flow. Internat. J. Heat Mass Transfer, 1967, vol. 10, p. 1749—1756.
5. Newman J. Mass transfer to the rear of a cylinder at high Schmidt numbers. J. I. Fundamentals, 1969, vol. 8, No. 3, p. 553—557.
6. Полянин А. Д. Распределение концентрации в диффузионном следе частицы, обтекаемой стоксовым потоком. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 1.
7. Волощук В. М. Фундаментальные решения уравнения диффузионного пограничного слоя. Тр. Ин-та экспериментальной метеорологии, 1973, вып. 3 (37).
8. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
9. Happel J. Viscous flow relative to arrays of cylinders. AIChE Journal, 1959, vol. 5, No. 2.
10. Kuwabara S. The forces experienced by randomly distributed parallel circular cylinders or spheres in a viscous flow at small Reynolds numbers. J. Phys. Soc. Japan, 1959, vol. 14, No. 4.
11. Аэров М. Э., Годес О. М. Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим зернистым слоем. М., «Химия», 1968.