

**О КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ
НАКЛОННОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ
ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ**

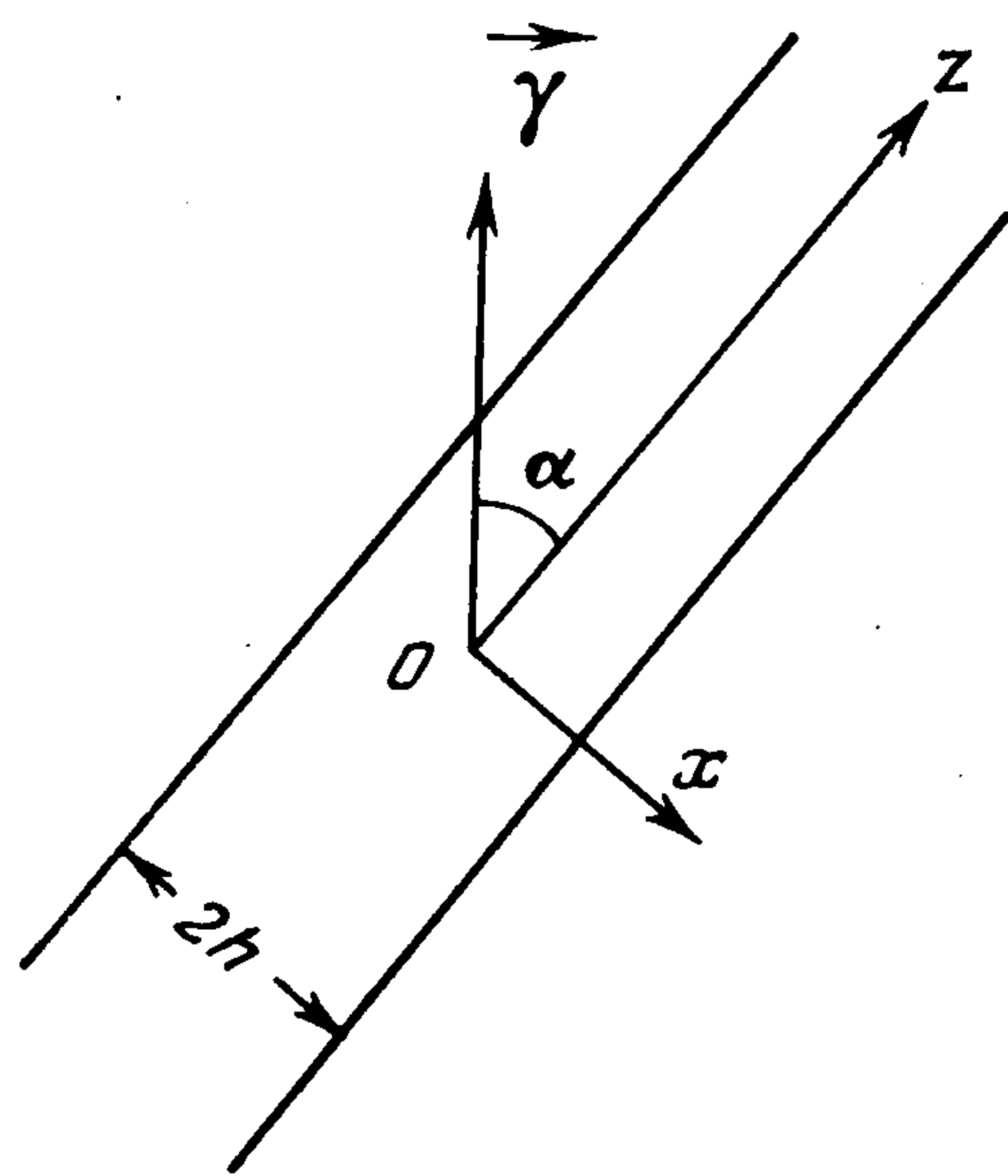
Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, С. М. Иоршина

(Пермь)

Рассматривается конвективная устойчивость равновесия наклонного слоя жидкости относительно нормальных пространственных возмущений. Установлено, что в наклонном слое наиболее опасны пространственные возмущения, что согласуется с экспериментальными результатами [1].

Ранее [2, 3] аналогичная задача устойчивости рассматривалась в случае плоских возмущений.

1. Амплитудные уравнения. Рассмотрим плоский слой жидкости толщиной $2h$, наклоненный к вертикали на угол α . Расположение осей координат указано на фиг. 1; ось y направлена горизонтально. Слой подогревается снизу таким образом, что обеспечивается возможность механического равновесия жидкости, при котором градиент температуры в ней постоянен и вертикален



Фиг. 1

$$(1.1) \quad \nabla T_0 = -A\gamma$$

Безразмерные уравнения малых нейтральных возмущений равновесия получаются обычным образом из уравнений конвекции, записанных в приближении Буссинеска. Эти уравнения имеют вид (единицы измерения выбраны так же, как в [2], R — число Релея)

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \Delta v + RT\gamma &= \nabla p, \\ \Delta T &= -(\mathbf{v} \gamma), \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \\ R &= g\beta Ah^4 / (\nu\chi) \end{aligned}$$

Будем рассматривать нормальные пространственные возмущения вида

$$(1.3) \quad (v_x, v_y, v_z, T, p) \sim \exp i(k_y y + k_z z)$$

Из (1.2) можно получить систему амплитудных уравнений. Исключая из этой системы амплитуды v_y , v_z , и p , получим систему уравнений восьмого порядка для амплитуд поперечной компоненты скорости u и темпера-

туры θ

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \Delta^2 u - ikaR \cos \alpha\theta' + k^2 R \sin \alpha\theta &= 0 \\ \Delta^2 \theta + (a^2 - 1) R \cos^2 \alpha\theta - \sin \alpha\Delta u + \frac{ia}{k} \cos \alpha\Delta u' &= 0 \\ \Delta = d^2 / dx^2 - k^2, \quad k = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}, \quad a = k_z / k \end{aligned}$$

Штрих означает дифференцирование по поперечной координате x , k — модуль волнового вектора, a — параметр пространственных возмущений. Считаем, что границы слоя твердые и на них поддерживается линейное по z распределение температуры, обеспечивающее условие равновесия (1.1). Тогда для амплитуд возмущений u и θ будем иметь однородные граничные условия

$$(1.5) \quad u = u' = 0, \quad \theta = \theta' = 0, \quad x = \pm 1$$

Краевая задача (1.4), (1.5) определяет спектр критических значений числа Релея R . Параметрами служат угол наклона α и характеристики пространственных возмущений k и a . Предельный случай плоских возмущений, рассмотренный в [2], соответствует $k_y = 0$, т. е. $k = k_z$, $a = 1$.

2. Длинноволновые возмущения. В предельном случае длинноволновых возмущений ($k \ll 1$) собственные функции и собственные числа задачи (1.4), (1.5) можно искать в виде разложений по степеням малого параметра (ik)

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u &= iku_0 + (ik)^2 u_1 + (ik)^3 u_2 + \dots \\ \theta &= \theta_0 + ik\theta_1 + (ik)^2 \theta_2 + \dots, \quad R = R_0 + k^2 R_2 + \dots \end{aligned}$$

Подставляя разложения в (1.4), получим системы уравнений последовательных приближений

$$(2.2) \quad \begin{aligned} u_0^{IV} - aR_0 \cos \alpha\theta_0' &= 0 \\ \theta_0^{IV} + (a^2 - 1) R_0 \cos^2 \alpha\theta_0 - a \cos \alpha u_0''' &= 0 \end{aligned}$$

$$(2.3) \quad \begin{aligned} u_1^{IV} - aR_0 \cos \alpha\theta_1' &= R_0 \sin \alpha\theta_0 \\ \theta_1^{IV} + (a^2 - 1) R_0 \cos^2 \alpha\theta_1 - a \cos \alpha u_1''' &= \sin \alpha u_0'' \end{aligned}$$

$$(2.4) \quad \begin{aligned} u_2^{IV} - aR_0 \cos \alpha\theta_2' &= -2u_0'' - aR_2 \cos \alpha\theta_0' + R_0 \sin \alpha\theta_1 \\ \theta_2^{IV} + (a^2 - 1) R_0 \cos^2 \alpha\theta_2 - a \cos \alpha u_2''' &= -2\theta_0'' + \\ &+ (a^2 - 1) R_2 \cos^2 \alpha\theta_0 + \sin \alpha u_1'' + a \cos \alpha u_0' \end{aligned}$$

Граничные условия для амплитуд различных порядков совпадают с (1.5).

Система (2.2) с соответствующими граничными условиями определяет критическое число Релея и форму возмущений с $k = 0$ для произвольных a . Амплитудная задача в нулевом приближении имеет решения двух типов, различающиеся четностью собственных функций. Определенным образом нормированные решения, которые далее будут называться «четными», имеют вид

$$(2.5) \quad \begin{aligned} u_0 &= -\frac{a\gamma \cos \gamma}{\cos \alpha} \left[\frac{\sin \gamma x}{\cos \gamma} - \frac{\text{sh } \gamma x}{\text{ch } \gamma} + \gamma^3 \frac{a^2 - 1}{3a^2} (x^3 - 3x) \right] \\ \theta_0 &= \cos \gamma \left[\frac{\cos \gamma x}{\cos \gamma} + \frac{\text{ch } \gamma x}{\text{ch } \gamma} - 2 \right], \quad \gamma^4 = R_0 \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

Собственные числа R_0 определяются трансцендентным уравнением

$$(2.6) \quad \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{th} \gamma = \frac{2}{3} \gamma^3 \frac{a^2 - 1}{a^2}$$

«Нечетные» решения определяются формулами

$$(2.7) \quad u_0 = \frac{a\gamma \cos \gamma}{\cos \alpha} \left(\frac{\cos \gamma x}{\cos \gamma} - 1 \right), \quad \theta_0 = \sin \gamma x, \quad \gamma^4 = R_0 \cos^2 \alpha$$

Собственные значения для этой части спектра не зависят от параметра a и определяются уравнением

$$(2.8) \quad \sin \gamma = 0; \quad \gamma = \pi, 2\pi, \dots; \quad R_0 = \frac{\pi^4}{\cos^2 \alpha}, \frac{(2\pi)^4}{\cos^2 \alpha}, \dots$$

Таким образом, критическое число Релея для неустойчивости относительно возмущений с $k = 0$ определяется по формуле

$$(2.9) \quad R_0 = \gamma^4 / \cos^2 \alpha$$

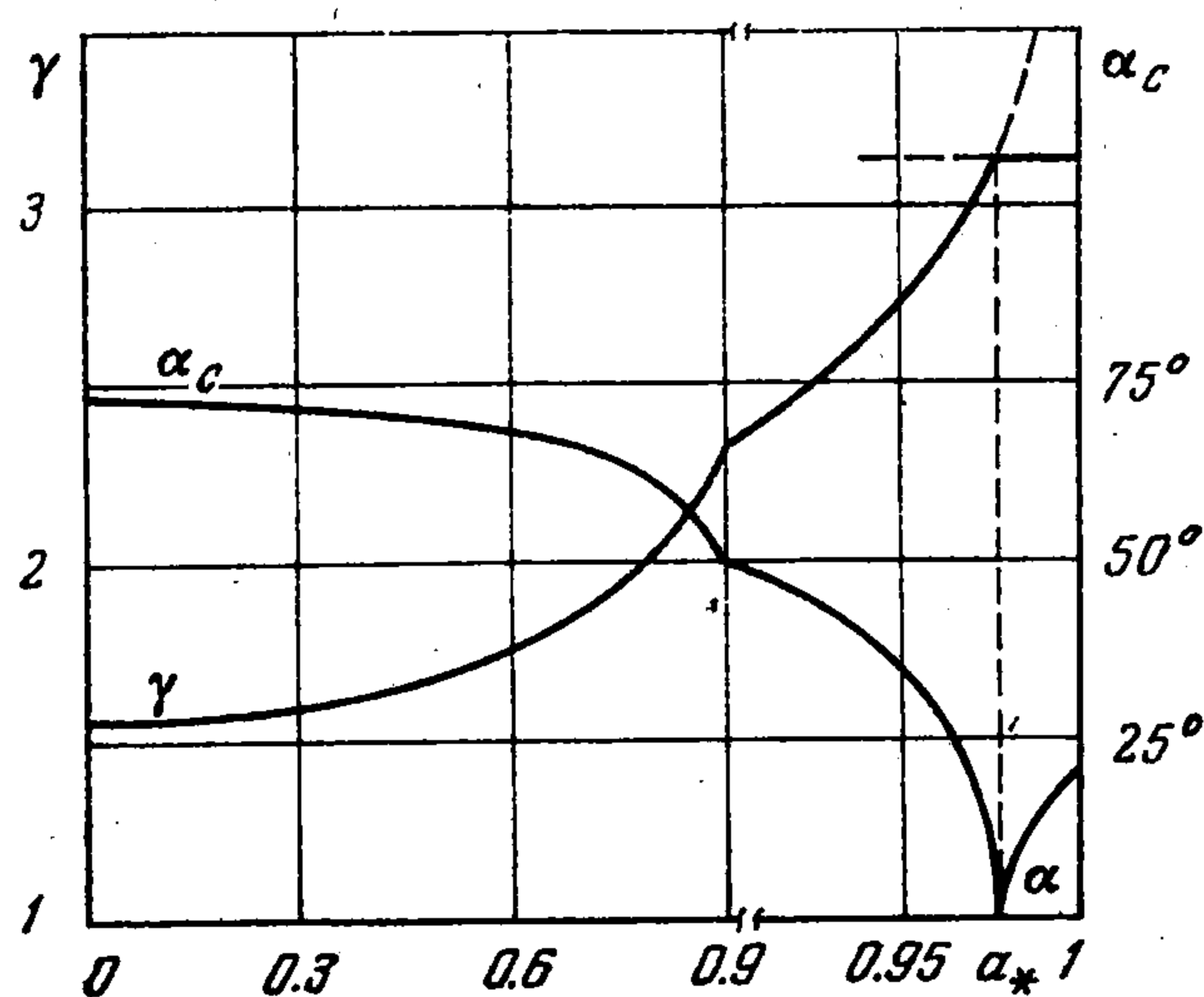
где γ — нижний корень характеристических уравнений (2.6) или (2.8). Нижний корень (2.6) зависит от a . При $a = 0$ имеем $\gamma = \pi / 2$, с ростом a критическое число γ монотонно возрастает и $\gamma \rightarrow 3.927$ при $a \rightarrow 1$. Нижний корень (2.8) не зависит от a и равен $\gamma = \pi$. Минимальное критическое число γ в зависимости от a представлено на фиг. 2 (сплошная линия). Как видно, в области $a < a_* = 0.9767$ среди возмущений с $k = 0$ наиболее опасны возмущения четного типа, а при $a > a_*$ — нечетного.

Для суждения о том, будут ли среди длинноволновых возмущений наиболее опасными возмущения с $k = 0$, необходимо знать знак квадратичной поправки R_2 в разложении (2.1). При $R_2 > 0$ возмущения с $k = 0$ дают минимальное значение критического числа Релея и, стало быть, наиболее опасны; при $R_2 < 0$ точка $k = 0$ соответствует максимуму на кривой $R(k)$, и наиболее опасными в этом случае будут «ячейстые» возмущения с $k \neq 0$.

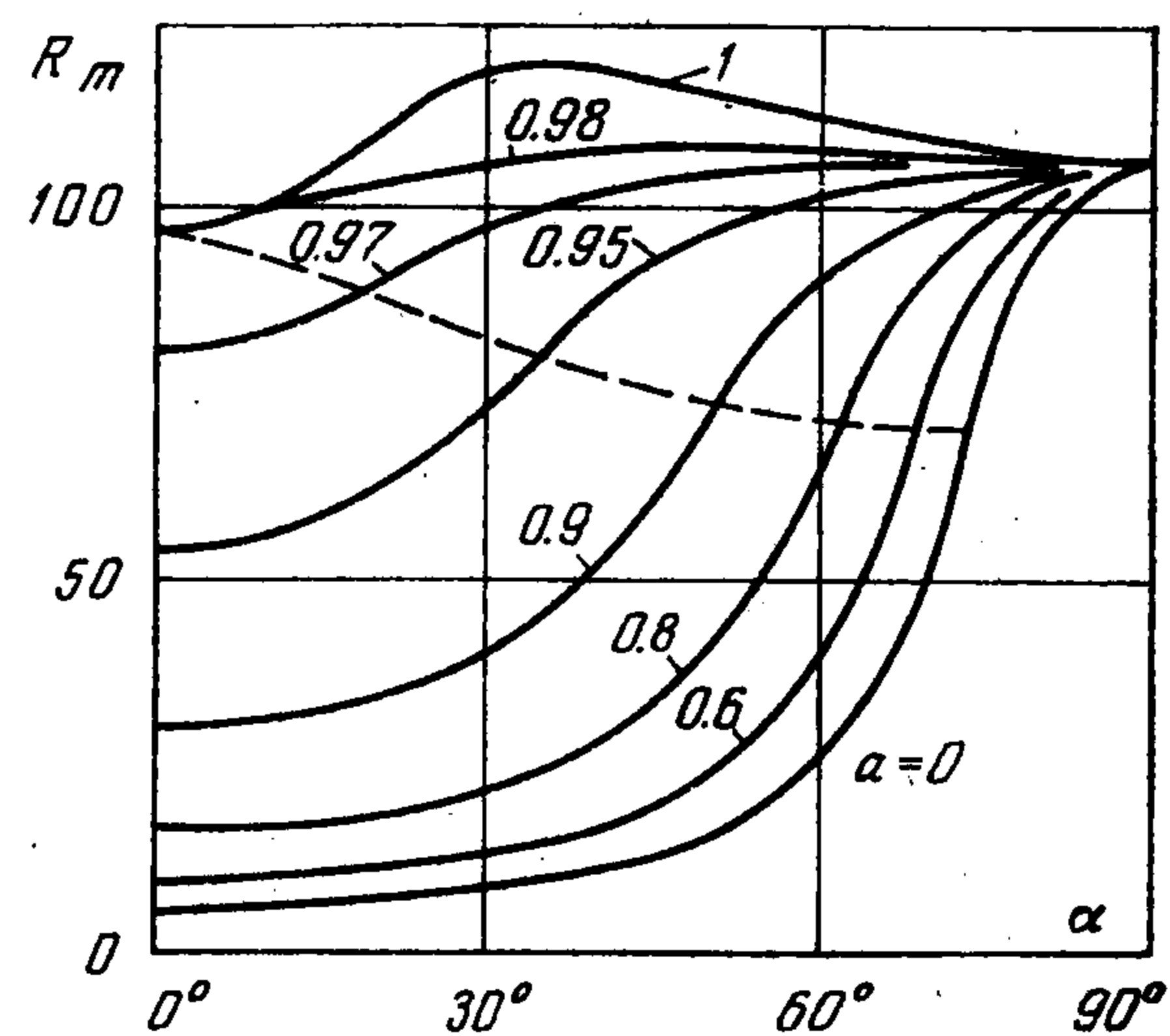
Квадратичная поправка R_2 определяется из условия разрешимости неоднородной системы второго приближения (2.4). Для составления условия разрешимости нужно знать решение систем уравнений нулевого и первого порядков (2.2), (2.3), а также решение однородной задачи, сопряженной к (2.2). Условие $R_2(\alpha, a) = 0$ позволяет найти критический угол наклона $\alpha_c(a)$, при котором меняется форма неустойчивости — наступает переход от возмущений с $k = 0$ к ячейстым возмущениям.

Формулы для поправок R_2 и критических углов α_c в четном и нечетном случаях выглядят весьма громоздко и здесь не приводятся. Приведем лишь график зависимости критического угла α_c от параметра трехмерных возмущений a (фиг. 2). В предельном случае $a = 1$ ($k_y = 0$; плоские возмущения, см. [2]) $\alpha_c = 20^\circ 46'$. Противоположный предельный случай $a = 0$ соответствует $k_z = 0$, $k_y \neq 0$ («спиральные» возмущения типа валов, вытянутых вдоль оси z); в этом случае $\alpha_c = 72^\circ 53'$. График на фиг. 2 позволяет найти критический угол для произвольного значения параметра a . Обращение α_c в нуль имеет место в точке $a = a_*$, где происходит изменение «четности» уровня неустойчивости.

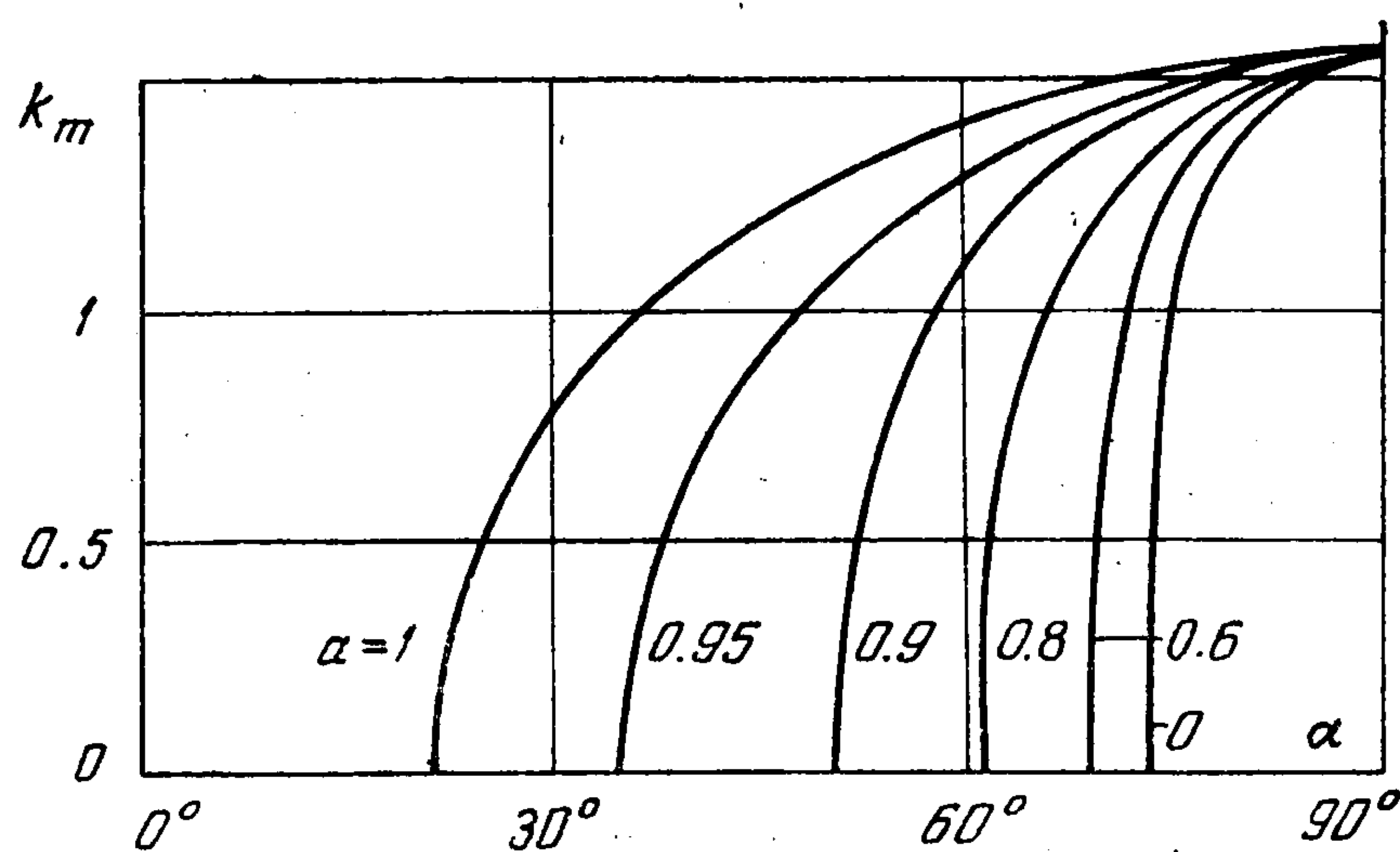
3. Численное решение для произвольных k . Формула (2.9) дает минимальное (по k) критическое число Релея, определяющее границу устойчивости в области углов $\alpha < \alpha_c$. При $\alpha > \alpha_c$ абсолютный минимум на нейтральных кривых $R(k; \alpha, a)$ достигается при конечных значениях волнового числа. Для определения границы устойчивости в этом случае краевая задача (1.4), (1.5) решалась численно. Амплитудные уравнения (1.4) сводились к системе 16 вещественных уравнений первого порядка; эта система



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

интегрировалась методом Рунге — Кутты. Минимизация по k найденных таким путем собственных значений R дает минимальное критическое число $R_m(\alpha, a)$ и волновое число наиболее опасных возмущений $k_m(\alpha, a)$.

Результаты представлены на фиг. 3 и 4. Семейство кривых на фиг. 3 изображает зависимость минимального критического числа Релея R_m от угла наклона слоя к вертикали. Штриховая линия служит линией переходов к ячеистым структурам. При $a < a_*$ в области ниже штриховой линии ответственными за неустойчивость являются возмущения с $k_m = 0$. Участки кривых выше этой линии соответствуют ячеистым возмущениям с $k_m \neq 0$. При $a > a_*$ кривые $R_m(\alpha)$ для разных a совпадают в области $0 < \alpha < \alpha_c(a)$. Как видно, во всей области углов пространственные возмущения более опасны, чем плоские, причем абсолютный минимум критического числа Релея реализуют спиральные возмущения ($a = 0$). Обращает на себя внимание существенное понижение устойчивости при отно-

чительно слабом отклонении структуры возмущений от плоской. При $\alpha \rightarrow 90^\circ$ наступает «вырождение»: в горизонтальном слое, как известно, плоские и пространственные возмущения соответствуют одному и тому же критическому числу Релея $R_m = 106.7$ (при выборе в качестве характерной длины полной толщины слоя $R_m = 1708$).

Минимальные значения k_m в зависимости от α представлены на фиг. 4. Изображены некоторые кривые, соответствующие параметру пространственных возмущений $a < a_*$, а также кривая для плоских возмущений ($a = 1$).

Экспериментально было показано [1], что кризис равновесия в наклонном слое почти во всей области углов связан с развитием пространственных возмущений. Количественное сравнение результатов расчета с экспериментом, к сожалению, затруднено, поскольку расчет относится к случаю идеально проводящих ограничивающих плоскостей, тогда как в эксперименте использовался слой керосина между пластинами из плексигласа (отношение теплопроводностей $\kappa \approx 0.7$).

Авторы благодарят Д. В. Любимова и В. М. Шихова за полезное обсуждение.

Поступила 11 VIII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Путин Г. Ф., Старикова Т. Е. Конвективная устойчивость равновесия плоского наклонного слоя жидкости. В сб.: Гидродинамика, вып. 6. Изд-во Пермск. ун-та, 1975.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудаков Р. Н. К теории релеевской неустойчивости. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О релеевской неустойчивости плоского слоя жидкости со свободными границами. В сб.: Гидродинамика, вып. 1. Изд-во Пермск. ун-та, 1968.