Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 533.6.011

ПОСТРОЕНИЕ ВЫСШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О СПЕЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЯХ В ПЛОСКИХ СОПЛАХ ЛАВАЛЯ

А. Л. Брежнев, И. А. Чернов

(Саратов)

Методом разложения в ряд по автомодельным составляющим построены решения уравнений газовой динамики для некоторых нерасчетных режимов течения в плоском сопле, в частности для случая сомкнувшихся на оси сопла местных сверхзвуковых зон (предельное течение Тейлора). Исследование разложений по автомодельным решениям проводится параллельно как на плоскости потока, так и на плоскости годографа, в случае предельного течения Тейлора в плоском сопле Лаваля рассчитаны первые три члена разложения. Поправочные члены сохраняют в этом случае свойство двойной симметрии как относительно горизонтальной, так и вертикальной осей, проходящих через центр сопла.

Наряду с известным решением Мейера [1, 2], аналитическим в окрестности центра сопла Лаваля, была обнаружена [3, 4] возможность осуществления двух других типов течения с неаналитическим распределением скорости вдоль оси. В классе автомодельных решений приближенной системы околозвуковых уравнений течениям газа в соплах Лаваля отвечают значения показателя автомодельности $n = 2, 3, 5, 11$ (xy^{-n} — инвариант автомодельного решения). Газодинамическое истолкование для случая $n = 5$ в дополнение к остальным значениям было предложено [5] в виде асимптотического течения торможения в сверхзвуковом диффузоре с образованием ударных волн.

В [6] было найдено, что решения, соответствующие указанным показателям, являются алгебраическими и допускают удобное параметрическое представление, и показано, что одному из решений соответствует предельный случай, когда местные сверхзвуковые зоны сомкнулись на оси сопла. Эти решения всесторонне обсуждались в [7], причем было обнаружено существование широкого класса несимметричных сопел.

В [4] была поставлена задача о построении высших приближений для разных асимптотических типов течения в соплах и дано частичное ее решение, показывающее переход от приближенных трансзвуковых уравнений к точным уравнениям С. А. Чаплыгина. Однако оставался невыясненным вопрос о включении формпараметров — постоянных, которые обычно появляются в разложениях по автомодельным составляющим и несут информацию о форме стенок сопла. Только для течения мейеровского типа было известно полное решение [8].

Указанные выше значения показателя автомодельности замечательны тем, что при них общий интеграл обыкновенных дифференциальных уравнений реализует аналитический проход через особую точку типа узла — образ предельной характеристики, что и определяет существование дополнительных асимптотик [3, 4]. Анализ высших приближений показывает, что в них может сохраняться это свойство, причем условие симметрии течения относительно оси сопла оказывается несущественным, аналогично случаю нулевого приближения [7].

1. Плоские безвихревые течения идеального совершенного газа описываются системой уравнений

$$
\begin{aligned}
&(a^2 - \varphi_x{}^2)\varphi_{xx} - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + (a^2 - \varphi_y{}^2)\varphi_{yy} = 0 \\
&(\varphi_x{}^2 + \varphi_y{}^2) / 2 + a^2 / (\gamma - 1) = (\gamma + 1) / [2 (\gamma - 1)]
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Здесь x, y — декартовы координаты, приведенные к безразмерному виду при помощи некоторой характерной длины, φ — безразмерный потенциал скорости, a — местная скорость звука, отнесенная к своему критическому значению, γ — отношение удельных теплоемкостей.

Решение системы (1.1) будем искать в виде

$$
\begin{aligned}
(1.2)\qquad & \varphi = x + q_0(\zeta)y^{3n-2} + q_1(\zeta)y^{k_1} + q_2(\zeta)y^{k_2} + \ldots \\
& \zeta = (\gamma+1)^{-1/3}xy^{-n}
\end{aligned}
$$

где ζ — автомодельная переменная, k_1, k_2, ... — показатели степеней, образующие неубывающую последовательность, причем $k_1 > 3n - 2$.

Подставляя (1.2) в (1.1), получим для q_0 нелинейное уравнение, а для q_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — рекуррентную линейную систему уравнений

$$
(1.3)\qquad (n^2\zeta^2 - q_0')q_0'' - n\zeta(5n-5)q_0' + (3n-2)(3n-3)q_0 = 0
$$

$$
\begin{aligned}
(1.4)\qquad & (n^2\zeta^2 - q_0')q_i'' - [q_0'' + (2k_i - n - 1)n\zeta]q_i' + \\
& + k_i(k_i - 1)q_i = H_i
\end{aligned}
$$

где H_i зависят от $q_0, \ldots, q_{i-1}$ и их производных.

Система (1.3), (1.4) имеет особую точку ζ_c, определяемую соотношением $n^2\zeta_c^2 - q_0'(\zeta_c) = 0$. Обобщенная парабола $\zeta = \zeta_c$ в плоскости течения соответствует предельной характеристике трансзвукового приближения.

Определим показатели степеней k_i из условия, чтобы общие интегралы уравнений (1.4) обладали свойством аналитичности на предельной характеристике. Достаточно рассмотреть соответствующие однородные уравнения, так как правые части (1.4) регулярным образом зависят от $q_0, \ldots, q_{i-1}$ и их производных, и частное решение (1.4) будет аналитическим, если все предыдущие решения аналитические. Значения показателей степеней, при которых общий интеграл уравнений (1.4) будет аналитическим в точке ζ_c, назовем особыми и обозначим k_i^*.

Пусть Q_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — решение однородного уравнения, соответствующего (1.4). Разложим функции q_0, Q_i в степенные ряды в окрестности предельной характеристики. Получим

$$
(1.5)\qquad q_0 = a_m(\zeta - \zeta_c)^m, \quad Q_i = b_{im}(\zeta - \zeta_c)^m
$$

где производится суммирование по целым неотрицательным значениям повторяющегося индекса. Коэффициенты a_m, b_{im} определяются подстановкой в соответствующие дифференциальные уравнения и могут быть записаны в рекуррентной форме

$$
\begin{aligned}
(1.6)\qquad & a_0 = 5(n\zeta_c)^3/(9n-6), \quad a_1 = (n\zeta_c)^2, \quad a_2 = (n-1)n\zeta_c/2 \\
& a_m = A_m/[mn\zeta_c(-7n + 5 + mn + m)] \\
& A_m = -a_{m-1}[n^2(m-4)^2 + 5n(m-4) + 6] + \Sigma_m \\
& \Sigma_m = \frac{m}{2}\sum_{l=3}^{m-1} l(m+2-l)a_l a_{m+2-l}, \quad m = 3, 4, \ldots \\
& b_{im} = B_{im}/[mn\zeta_c(-2k_i - n + 1 + mn + m)]
\end{aligned}
$$

$$B_{im} = b_{i,\,m-1}\,[n\,(m-1)\,(2k_i - mn + n - 1) - k_i\,(k_i - 1)] + \Sigma_{im}$$

$$\Sigma_{im} = m\sum_{l=3}^{m+1} l\,(m+2-l)\,a_l b_{i,\,m+2-l}, \qquad m = 1,\,2,\,\ldots$$

Здесь Σ_3, Σ_{i1} следует положить равными нулю; b_{i0} — произвольная постоянная.

Показатели $n = 2,\,3,\,5,\,11$ исключительные в том смысле, что при них коэффициенты a_3, a_4, a_5, a_6 соответственно могут быть взяты произвольными постоянными, так как числитель и знаменатель в (1.6) обращаются в нуль. Если в случае произвольного n только частный интеграл уравнения (1.3) является аналитическим на предельной характеристике, то для указанных n этим свойством обладает общий интеграл [3, 4].

Свойство аналитичности общего интеграла Q_i эквивалентно произвольности одного из коэффициентов b_{im} $(m \geqslant 1)$ в (1.5), что имеет место, когда числитель и знаменатель b_{im} в (1.6) одновременно обращаются в нуль. Выполняя соответствующий анализ для $n = 2,\,3,\,5,\,11$, можно показать, что особые значения $k_i{}^*$ образуют последовательность

$$k_i{}^* = 3n - 2 + i\Delta, \quad \Delta = (n+1)\,/\,2 \tag{1.7}$$

где i — натуральное число, причем выполняется условие

$$i \notin \{i_l\}, \quad i_l = [5n - 7 + l\,(6n-6)]\,/\,(n+1), \quad l = 0,\,1,\ldots \tag{1.8}$$

Отметим, что для решения системы (1.1) в разложение (1.2) необходимо включать не только показатели (1.7) при условии (1.8), но и показатели вида $k_{mj} = 3n - 2 + m\Delta + j\,(2n-2)$, где $m = 0,\,1,\ldots;\ j = 1,\,2,\ldots$.

Коэффициент при степени y с показателем k_{mj} обозначим q_{mj}, для него имеет место уравнение (1.4). Если k_{mj} не совпадает с одним из особых значений $k_i{}^*$, то представитель q_{mj}, аналитический на предельной характеристике, будет частным интегралом этого уравнения.

Для рассматриваемых значений показателя автомодельности выполняется неравенство $\Delta < (2n-2)$. Случай $n = 2$ считается известным и далее не рассматривается. Обозначим через E целую часть числа $(2n - 2)\,/\,\Delta$. Тогда решение уравнений (1.1) можно представить в виде ряда по неубывающим степеням y

$$\varphi = x + y^{3n-2}\left(\sum_{i=0}^{E} q_i y^{i\Delta} + q_{01}y^{2n-2} + \ldots\right) \tag{1.9}$$

В работе [9] найдена первая поправка к решению трансзвуковых уравнений, что дает возможность выписать частный интеграл для $m = 0$, $j = 1$ в виде

$$q_{01} = 5^{-1}\,(\gamma+1)^{-1/3}\,\{(\gamma + {}^5/_2)[(3n-2)q_0 - n\zeta q_0'] - (\gamma - {}^5/_2)q_0\}q_0' \tag{1.10}$$

Для построения поля течения удобнее использовать компоненты вектора скорости $u = \varphi_x$, $v = \varphi_y$. Разложения для u и v в соответствии с (1.9) имеют вид

$$(1.11)\qquad u = 1 + (\gamma+1)^{-1/3} y^{2n-2}\Bigl(\sum_{i=0}^{E} f_i y^{i\Delta} + f_{01} y^{2n-2} + \ldots\Bigr)$$

$$v = y^{3n-3}\Bigl(\sum_{i=0}^{E} g_i y^{i\Delta} + g_{01} y^{2n-2} + \ldots\Bigr)$$

$$f_i = q_i', \quad g_i = k_i^* q_i - n\zeta q_i', \quad i = 0, \ldots, E$$

$$f_{01} = q_{01}', \quad g_{01} = (5n-4) q_{01} - n\zeta q_{01}'$$

2. Используя функции $f_0(\zeta)$, $g_0(\zeta)$, найденные в [6], построим представители компонент скорости f_i, g_i $(i = 1, \ldots, E)$ для $n = 3,\ 5,\ 11$. Непосредственное интегрирование соответствующих уравнений (1.4) затруднительно, поэтому воспользуемся методом годографа. Рассмотрим функцию тока ψ, зависящую от угла наклона вектора скорости θ и от переменной η, введенной Ф. И. Франклем [1]. Эта функция удовлетворяет уравнению

$$(2.1)\qquad \eta\psi_{\theta\theta} + \psi_{\eta\eta} + b(\eta)\psi_\eta = 0$$

где $b(\eta)$ — известная функция [10]. В трансзвуковом приближении (2.1) заменяется уравнением Трикоми

$$(2.2)\qquad \eta\psi_{\theta\theta} + \psi_{\eta\eta} = 0$$

Представим решение уравнения (2.1) в форме разложения

$$(2.3)\qquad \psi = \rho^{\lambda} \sum_{i=0}^{E} \psi_i(t)\rho^{i\delta} + \rho^{\lambda+2/3}\psi_{01}(t) + \ldots$$

$$\rho = (\theta^2 + {}^4/_9\eta^3)^{1/2}, \quad t = \theta\rho^{-1}, \quad \lambda = (3n-3)^{-1}, \quad \delta = \lambda\Delta$$

что должно соответствовать разложению (1.9).

Подставляя (2.3) в (2.1), получим последовательность уравнений для определения коэффициентов ψ_i

$$(2.4)\qquad (1-t^2)\psi_i'' - {}^4/_3 t\psi_i' + (\lambda + i\delta)(\lambda + {}^1/_3 + i\delta)\psi_i = 0, \quad i = 0, \ldots, E$$

Общий интеграл этого уравнения выражается через гипергеометрические функции [10] (A_i, B_i — произвольные постоянные)

$$\psi_i = A_i F(-\lambda/2 - i\delta/2,\ \lambda/2 + {}^1/_6 + i\delta/2,\ {}^1/_2;\ t^2) +$$
$$+ B_i t F(-\lambda/2 + {}^1/_2 - i\delta/2,\ \lambda/2 + {}^2/_3 + i\delta/2,\ {}^3/_2;\ t^2)$$

Анализ, выполненный с использованием таблицы Шварца [6], показывает, что функции ψ_i при $\lambda = {}^1/_6,\ {}^1/_{12},\ {}^1/_{30}$ $(i \notin \{i_l\})$ алгебраические. Их можно найти при помощи формул дифференцирования гипергеометрических функций, отправляясь от известных решений ψ_0 для $\lambda = {}^1/_6,\ {}^1/_{12},\ {}^1/_{30}$. Функция ψ_{01} удовлетворяет неоднородному уравнению, общий интеграл которого не всегда будет алгебраическим и может содержать логарифмические члены [4]. Частное решение этого уравнения было найдено С. В. Фальковичем [10] и соответствует поправке (1.10).

Потенциал φ также может быть разложен в ряд

$$\varphi = \rho^{\lambda+1/3} \sum_{i=0}^{E} \varphi_i(t)\rho^{i\delta} + \rho^{\lambda+1}\varphi_{01}(t) + \ldots$$

Коэффициенты φ_i выражаются через ψ_i как

$$(2.5)\qquad (\lambda + {}^1/_3 + i\delta)\varphi_i = ({}^3/_2)^{1/3}(1 - t^2)^{2/3}\psi_i', \quad i = 0, \ldots, E$$

Заметим, что коэффициенты ψ_i $(i = 0, \ldots, E)$ удовлетворяют однородным уравнениям (2.4) и фактически определяются из уравнения Трикоми (2.2). Поэтому до порядка $\rho^{\lambda+E\delta}$ остаются справедливыми соотношения приближенной трансзвуковой теории, в частности $y \approx \psi$, $x \approx \varphi$, т. е.

$$(2.6)\qquad y = \rho^\lambda \sum_{i=0}^{E} \rho^{i\delta}\psi_i + \ldots, \quad x = \rho^{\lambda+1/3}\sum_{i=0}^{E}\rho^{i\delta}\varphi_i + \ldots$$

Модуль вектора скорости $V = (u^2 + v^2)^{1/2}$ разложим по степеням η [2]:

$$V = V(\eta) = 1 - (\gamma + 1)^{-1/3}\eta + O(\eta^2)$$

Тогда разложения компонент вектора скорости можно записать так:

$$(2.7)\qquad \begin{aligned} u &= V\cos\theta = 1 - (\gamma + 1)^{-1/3}({}^3/_2)^{2/3}(1 - t^2)^{1/3}\rho^{2/3} + O(\rho^{4/3}) \\ v &= V\sin\theta = t\rho + O(\rho^{5/3}) \end{aligned}$$

С другой стороны, подставляя (2.6) в (1.11), получим аналогичные разложения u и v по степеням ρ, причем эти разложения будут содержать промежуточные члены типа $\rho^{i\delta}$. Коэффициенты при таких степенях следует положить равными нулю, что следует из (2.7). Отсюда получается связь представителей скорости f_i, g_i через предыдущие и через известные коэффициенты ψ_i, φ_i. Для компактной записи соответствующих формул обозначим

$$\begin{aligned} X_i &= \varphi_i\psi_0^{-n-i\Delta}, \quad x_i = X_i y^{n+i\Delta}, \quad u_i = f_i y^{2n-2+i\Delta} \\ Y_i &= \psi_i\psi_0^{-1-i\Delta}, \quad y_i = Y_i y^{1+i\Delta}, \quad v_i = g_i y^{3n-3+i\Delta} \end{aligned}$$

Тогда для высших приближений скорости получаем выражения

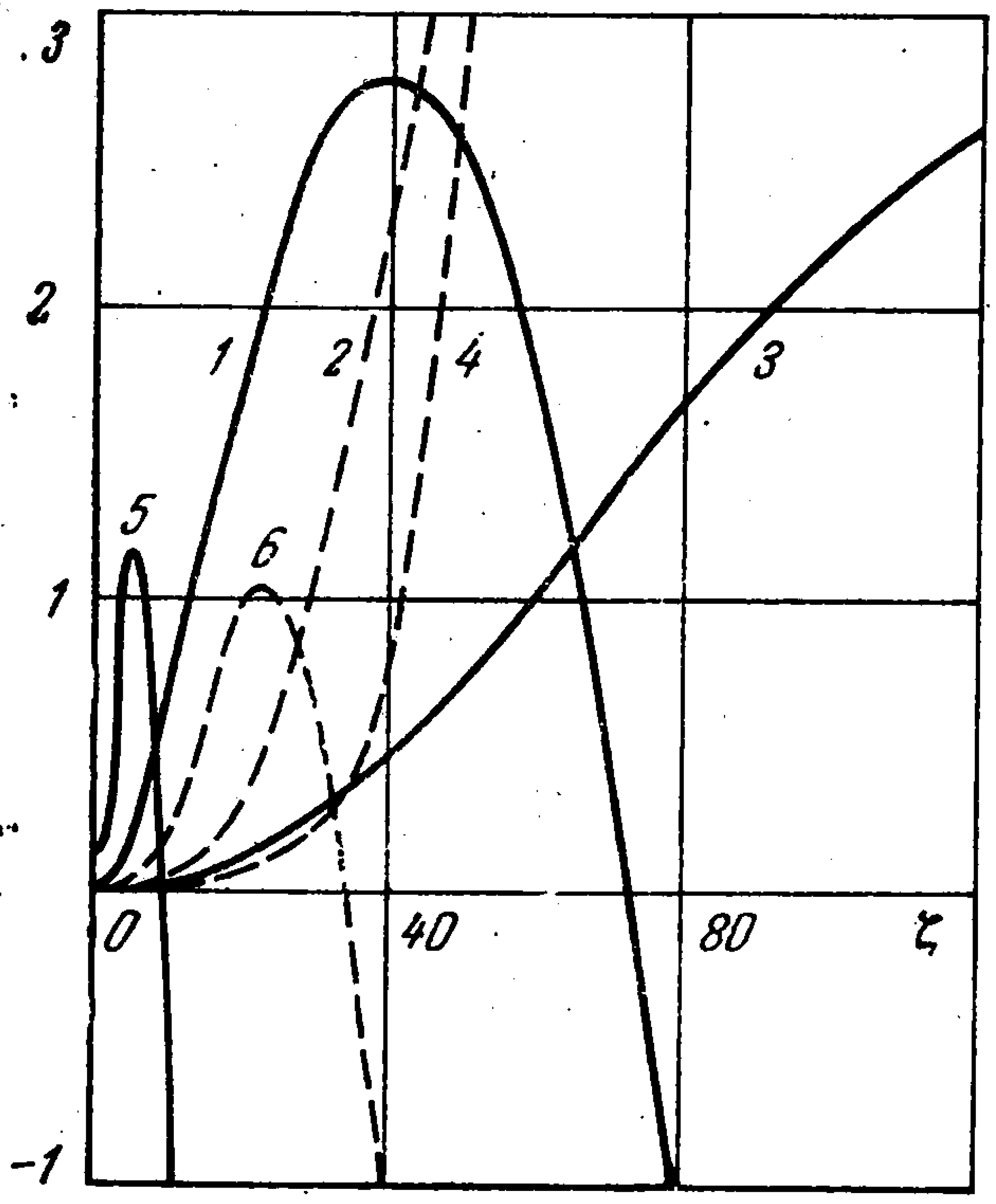
$$(2.8)\qquad \begin{aligned} & u_1 = -\Delta_{01}, \quad u_2 = -\Delta_{02} - \Delta_{11} - \Delta_{01}^2, \quad u_3 = -\Delta_{03} - \Delta_{12} - \\ & - \Delta_{21} - \Delta_{11}^2 - \Delta_{01}^3 - \Delta_{012}, \ldots \\ & \Delta_{ij} = u_{ix}x_j + u_{iy}y_j, \quad \Delta_{ij}^2 = ({}^1/_2)u_{ixx}x_j^2 + u_{ixy}x_jy_j + ({}^1/_2)u_{iyy}y_j^2 \\ & \Delta_{ij}^3 = ({}^1/_6)(u_{ixxx}x_j^3 + u_{iyyy}y_j^3) + ({}^1/_2)(u_{ixxy}x_j^2y_j + u_{ixyy}x_jy_j^2) \\ & \Delta_{ijk} = u_{ixx}x_jx_k + u_{ixy}(x_jy_k + x_ky_j) + u_{iyy}y_jy_k, \ldots \end{aligned}$$

где индекс x или y означает соответствующую частную производную.

Аналогичные формулы справедливы для v_i.

3. Укажем вид коэффициентов X_i, Y_i для значений $n = 3, 5, 11$. Пусть E_0, G_0, E_i, D_i — произвольные постоянные, s — параметр, принимающий действительные значения. При $n = 3$ получаем $E = 2$. Тогда

$$\begin{aligned} & X_1 = -(3\sqrt{3}/5)\,G_0D_1M_1N_0^{-5}, \quad Y_1 = D_1N_1N_0^{-3} \\ & \zeta = -G_0M_0N_0^{-3} \\ & M_0 = E_0s^3 + 1 + \sqrt{3}(s^2 - E_0 s), \quad N_0 = s + E_0 \\ & M_1 = -E_1s^5 + 1 + 5(s^4 - E_1 s), \quad N_1 = s^3 + E_1 - \\ & - \sqrt{3}(E_1s^2 - s) \end{aligned}$$



Фиг. 1

Коэффициенты X_2, Y_2 следует положить равными нулю в соответствии с условием (1.8). Здесь используется лишь частное решение (2.8). Заметим, что при $E_0 = E_1 = 0$ как главные члены [6], так и высшие приближения дают течение, симметричное как относительно оси x, так и относительно оси y. На фигуре кривые *1—6* соответствуют графикам зависимости $0.25\cdot 10^{-2}f_1$, $0.25\cdot 10^{-4}g_1$, $0.2\cdot 10^{-4}f_2$, $0.2\cdot 10^{-5}g_2$, $0.125\cdot 10^{-2}f_{01}$, $0.25\cdot 10^{-5}\, g_{01}$ от автомодельной переменной для значений постоянных

$$G_0 = (1/_2)\sqrt{2+\sqrt{3}},\quad D_1 = -5 \,/\, (12\sqrt{3}G_0^2)$$

Возможен также класс несимметричных течений, которые реализуются, если хотя бы одна из постоянных E_0 или E_1 отлична от нуля.

При $n = 5$ находим $E = 2$. Тогда

$$X_1 = (5\,/\,2)G_0D_1M_1N_0^{-8},\quad Y_1 = D_1N_1N_0^{-4}$$
$$X_2 = (35\,/\,11)\,G_0D_2M_2N_0^{-11},\quad Y_2 = D_2N_2N_0^{-7},\quad \zeta = G_0M_0N_0^{-5}$$
$$M_0 = -\sqrt{2}(s^5 + E_0) + 5\,(E_0s^3 - s^2),\quad N_0 = E_0s + 1$$
$$M_1 = -s^8 + E_1 + 8(E_1s^6 - s^2) + 4\sqrt{2}(E_1s^3 + s^5)$$
$$N_1 = E_1s^4 + 1 + 2\sqrt{2}\,(s^3 - E_1s)$$
$$M_2 = \sqrt{2}\,(s^{11} + E_2) + 11\,(E_2s^9 - s^2) - 33\,(s^8 - E_2s^3)$$
$$N_2 = E_2s^7 + 1 - 7\,(s^6 + E_2s) - 7\sqrt{2}\,(E_2s^4 - s^3)$$

При $n = 11$ получаем $E = 3$. Соответствующие представители на плоскости годографа записываются так:

$$X_1 = (77\,/\,17)\,G_0D_1M_1N_0^{-17},\quad Y_1 = D_1N_1N_0^{-7}$$
$$X_2 = (143\,/\,23)\,G_0D_2M_2N_0^{-23},\quad Y_2 = D_2N_2N_0^{-13}$$
$$X_3 = (209/29)\,G_0D_3M_3N_0^{-29},\quad Y_3 = -D_3N_3N_0^{-19}$$
$$\zeta = G_0M_0N_0^{-11}$$
$$M_0 = s^{11} + E_0 - 11\,(E_0s^{10} + s) + 66\,(s^6 - E_0s^5),\quad N_0 = s + E_0$$
$$M_1 = E_1s^{17} + 1 - 17\,(s^{15} - E_1s^2) + 119\,(E_1s^{12} - s^5) + {}$$
$$+ 187\,(s^{10} + E_1s^7)$$
$$N_1 = E_1s^7 + 1 + 7\,(s^5 - E_1s^2)$$
$$M_2 = s^{23} - E_2 - 46\,(E_2s^{20} - s^3) + 207\,(s^{18} + E_2s^5) + {}$$
$$+ 1173\,(E_2s^{15} + s^8) - 391\,(s^{13} - E_2s^{10})$$
$$N_2 = s^{13} - E_2 + 26\,(E_2s^{10} - s^3) - 39\,(s^8 + E_2s^5)$$
$$M_3 = s^{29} - E_3 - 87\,(E_3s^{25} + s^4) + 435\,(s^{24} + E_3s^5) + {}$$
$$+ 3335\,(E_3s^{20} - s^9) - 6670\,(s^{19} - E_3s^{10})$$
$$N_3 = -s^{19} + E_3 - 57\,(E_3s^{15} + s^4) + 171\,(s^{14} + E_3s^5) + {}$$
$$+ 247\,(E_3s^{10} - s^9)$$

При рассматриваемых значениях n каждый коэффициент X_i, Y_i имеет вид

$$X_i = P_a N_0^{-a}, \quad Y_i = Q_b N_0^{-b}, \quad a = n + i\Delta, \; b = 1 + i\Delta$$

где P_a, Q_b — полиномы соответствующих степеней.

Авторы благодарят С. В. Фальковича за полезное обсуждение.

Поступила 13 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Франкль Ф. И.* К теории сопел Лаваля. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1945, т. 9, № 5
2. *Фалькович С. В.* К теории сопла Лаваля. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
3. *Лифшиц Ю. Б., Рыжов О. С.* Об асимптотическом типе плоскопараллельного течения в окрестности центра сопла Лаваля. Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 2.
4. *Рыжов О. С.* Исследование трансзвуковых течений в соплах Лаваля. М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1965.
5. *Цветков А. П.* Об одном классе точных решений уравнений околозвукового течения газа. В сб.: Дифференциальные уравнения и вычислительная математика, вып. 4. Изд-во Саратовск. ун-та, 1974.
6. *Фалькович С. В., Чернов И. А.* Алгебраические автомодельные решения уравнений околозвукового плоского течения газа. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
7. *Цветков А. П., Чернов И. А.* Автомодельные околозвуковые течения, аналитические на предельной характеристике. В сб.: Аэродинамика, вып. 1 (4). Изд-во Саратовск. ун-та, 1972.
8. *Фалькович С. В., Чернов И. А., Горский В. Б.* Обратная задача сопла Лаваля. В сб.: Трансзвуковые течения газа, вып. 2, Изд-во Саратовск. ун-та, 1968.
9. *Hayes W. D.* La seconde approximation pour les écoulements transsoniques non visqueux. J. de Mécanique, 1966, t. 5, № 2, p. 163—206.
10. *Фалькович С. В.* Околозвуковые плоские течения газа с особыми точками на звуковой линии. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.