

ЛАМИНАРНЫЙ ГИПЕРЗВУКОВОЙ СЛЕД ЗА НЕСУЩИМ ТЕЛОМ

О. С. Рыжов, Е. Д. Терентьев

(Москва)

Изучается асимптотика решения уравнений Навье — Стокса, описывающего течение на больших расстояниях за несущим телом конечных размеров. Поле скоростей разбивается на две области. Во внешней из них движение газа подчиняется уравнениям Эйлера. Внутренняя область занята ламинарным следом, который формируется потоком тепла в продольном направлении и вязкими касательными напряжениями. Продолжение решения из одной области в другую находится при помощи метода сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений. Для пространственных течений задача сращивания осложняется тем, что вызванные подъемной силой возмущения имеют на внешней границе следа колебательный характер.

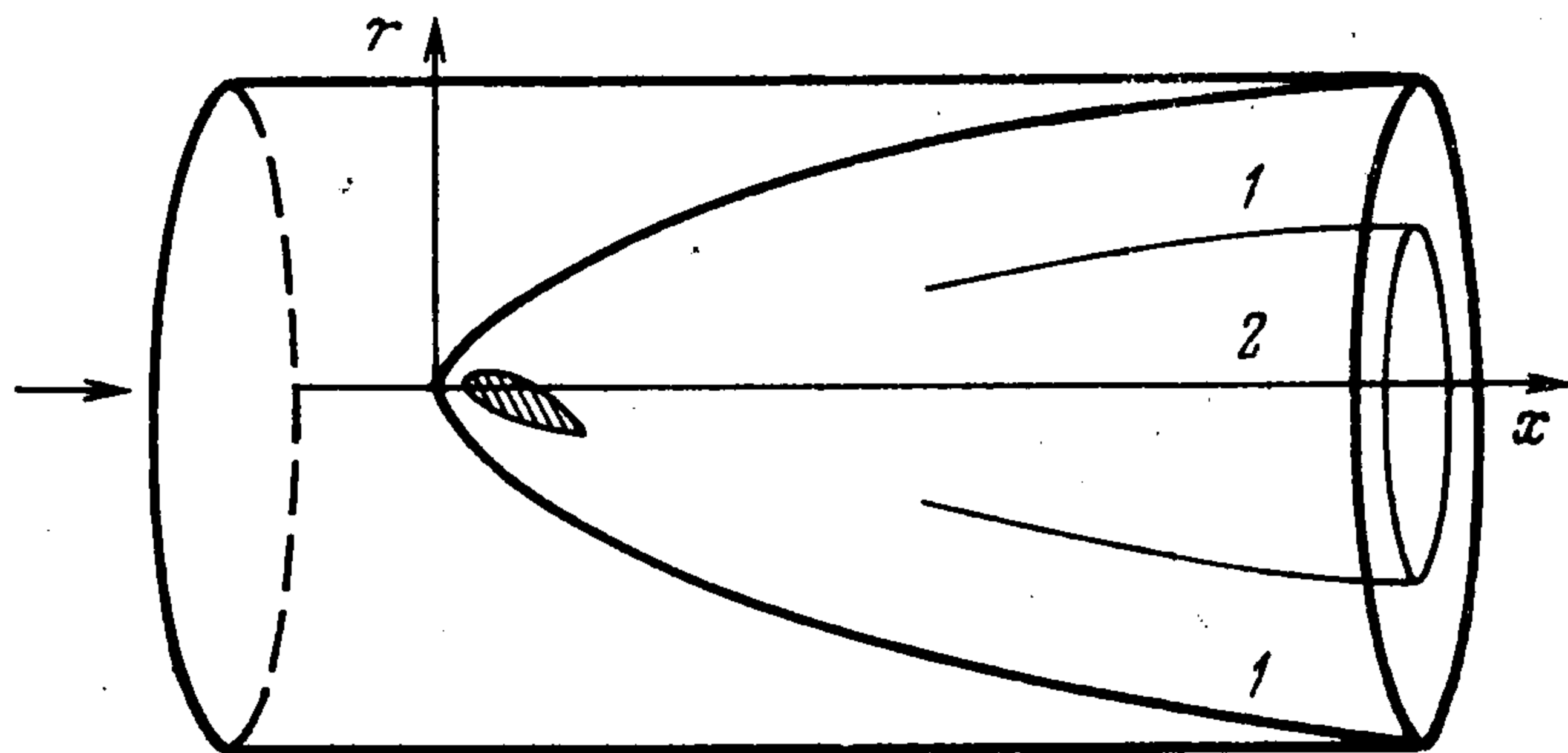
1. Рассмотрим стационарное гиперзвуковое течение на больших расстояниях от несущего тела, на которое действует как сила сопротивления, так и подъемная сила. Пусть ρ_∞ — плотность газа в набегающем потоке, v_∞ — его скорость, направленная вдоль оси цилиндрической системы координат x, r, φ . Примем, что перед головной ударной волной давление $p_\infty = 0$, а число Маха $M_\infty = \infty$. Будем считать газ подчиняющимся уравнению состояния Клапейрона, причем обе удельные теплоемкости c_p и c_v положим постоянными, обозначив их отношение через κ . Ограничим диапазон значений κ неравенствами $1 < \kappa < 2$. Зависимости коэффициентов λ_1 и λ_2 вязкости и k теплопроводности от удельной энтальпии w для простоты возьмем линейными: $\lambda_1 = \lambda_{10}w$, $\lambda_2 = \lambda_{20}w$, $k = k_0w$. Введем число Прандтля $N_{Pr} = c_p \lambda_{10} / k_0$. Значения как независимых переменных, так и искомых функций удобно задавать безразмерными, используя в качестве основных единиц отсчета ρ_∞ , v_∞ и λ_{10} .

Главные члены асимптотического решения уравнений Навье — Стокса на больших расстояниях за конечным телом в осесимметричном гиперзвуковом течении найдены В. В. Сычевым [1]. Построенная им схема потока включает две существенно различные области. Чтобы установить вид асимптотики во внешней области, влиянием вязкости и теплопроводности можно пренебречь. Здесь движение газа подчиняется более простым уравнениям Эйлера. От набегающего потока внешняя область отделена ударной волной, структура которой изучена в работе [2]. Поле скоростей, обладающее осевой симметрией, описывается указанным Л. И. Седовым решением задачи о сильном шнуровом взрыве [3,4]. В этом решении безраз-

мерные параметры газа зависят от единственной автомодельной переменной

$$(1.1) \quad \xi = \frac{r}{(bx)^{1/2}}, \quad b = \text{const}$$

Следуя изложенным результатам анализа осесимметричных течений, в решении трехмерной задачи будем также различать две области (фиг. 1). Воздействием вязкости и теплопроводности на движение газа во внешней из них пренебрежем. При таком условии главные члены асимптотического



Фиг. 1

решения уравнений Эйлера были выписаны в работе [5]. Когда наряду с сопротивлением к обтекаемому телу приложена подъемная сила, форма ударной волны при $x \rightarrow \infty$ задается соотношением

$$(1.2) \quad r_s = (bx)^{1/2} (1 + b_y x^{-1/2} \ln x \cos \varphi + \dots)$$

Постоянная b_y пропорциональна подъемной силе F_y .

Легко проверить, что все члены соответствующего скачку уплотнения (1.2) решения уравнений Эйлера представляют одновременно асимптотику решения исходных уравнений Навье — Стокса. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений для функций автомодельной переменной ξ получаются одинаковыми вне зависимости от того, полагаются ли коэффициенты вязкости и теплопроводности равными нулю или их значения сохраняются конечными. Для плоскопараллельных течений у несущего профиля этот вопрос подробно обсуждался в работе [6].

Внутренняя область, помеченная на фиг. 1 цифрой 2, занята вихревым следом. Здесь вязкостью и теплопроводностью газа пренебречь уже нельзя, так как на решении [5], которое соответствует ударной волне (1.2), начинается быстрый рост отброшенных в уравнениях Навье — Стокса членов. Для анализа течения в следе В. В. Сычев ввел переменную [1]

$$(1.3) \quad \zeta = \xi x^{(\kappa-1)/2(\kappa+1)} = \frac{r}{b^{1/2} x^{1/(\kappa+1)}}$$

Как обычно, вид решения в следе определяется поведением газодинамических функций при $\xi \rightarrow 0$. Обозначим через v_x , v_r и v_φ проекции вектора скорости на оси x , r и φ . Записав приведенные в [5, 7] асимптотические формулы в терминах переменной ζ , приходим к заключению, что

$$(1.4) \quad v_x = 1 - \frac{1}{2(\kappa+1)} bx^{-\kappa/(\kappa+1)} [v_{x21}(\zeta) + F_{v_x}(x, \zeta) \cos \varphi + \dots]$$

$$\begin{aligned}
 v_r &= \frac{1}{\kappa + 1} b^{1/2} x^{-\kappa/(\kappa+1)} [v_{r21}(\zeta) + F_{v_r}(x, \zeta) \cos \varphi + \dots] \\
 v_\varphi &= \frac{1}{\kappa + 1} b^{1/2} F_{v_\varphi}(x, \zeta) \sin \varphi + \dots \\
 \rho &= \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} x^{-1/(\kappa+1)} \{ \rho_{21}(\zeta) + F_\rho(x, \zeta) \cos \varphi + \dots \} \\
 p &= \frac{1}{2(\kappa + 1)} \frac{b}{x} \{ p_{21}(\zeta) + x^{-\kappa/(\kappa+1)} [p_{22}(\zeta) + F_p(x, \zeta) \cos \varphi + \dots] \} \\
 w &= \frac{\kappa}{2(\kappa + 1)^2} b x^{-\kappa/(\kappa+1)} \{ w_{21}(\zeta) + F_w(x, \zeta) \cos \varphi + \dots \} \\
 F_q &= b_\nu x^{-k_4} [q_{2c}(\zeta) \cos(k_3 \ln x) + q_{2s}(\zeta) \sin(k_3 \ln x)] \\
 q &= v_x, v_r, v_\varphi, \rho, p, w, \\
 k_3 &= \frac{\kappa - 1}{2(\kappa + 1)} \sqrt{\frac{3 - \kappa}{\kappa - 1}}, \quad k_4 = \frac{2 - \kappa}{2(\kappa + 1)}
 \end{aligned}$$

Функции с индексом 21, образующие первое приближение, задают структуру следа за любым телом, которое испытывает лишь сопротивление. Чтобы вывести для них предельные условия, достаточно знать только главные члены асимптотик, устанавливающих распределение параметров воздуха вблизи оси шнурового взрыва. Рассмотрим промежуточную область, где $r = \eta x^\alpha$, $1 / (\kappa + 1) < \alpha < 1/2$. Переход к пределу $x \rightarrow \infty$ в этой области совершается при $\eta = \text{const}$. Тогда, как показывают формулы (1.1) и (1.3), $\zeta \rightarrow \infty$, а $\xi \rightarrow 0$. В рамках метода сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений [8, 9] имеем

$$\begin{aligned}
 (1.5) \quad v_{x21} &= \frac{\kappa}{\kappa + 1} \frac{k_2}{k_1} \zeta^{-2/(\kappa-1)} + \dots, \quad v_{r21} = \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \zeta + \dots \\
 \rho_{21} &= k_1 \zeta^{2/(\kappa-1)} + \dots, \quad p_{21} = k_2 + \dots, \quad w_{21} = \frac{k_2}{k_1} \zeta^{-2/(\kappa-1)} + \dots
 \end{aligned}$$

Зависимости фигурирующих в соотношениях (1.5) коэффициентов k_1 и k_2 от κ приведены в книге [10].

Функция p_{22} порождена вторым членом асимптотического разложения для давления из решения задачи о сильном взрыве. Предельное условие для нее гласит

$$(1.6) \quad p_{22} = \frac{(\kappa + 1)^2 (\kappa - 1)}{4\kappa^3} k_1 \zeta^{2\kappa/(\kappa-1)} + \dots$$

Наконец, для функций, которые обусловлены асимметричными возмущениями потока благодаря приложенной к телу подъемной силе, при $\zeta \rightarrow \infty$ находим

$$\begin{aligned}
 (1.7) \quad v_{x2c} &= -\frac{\kappa}{\kappa + 1} \frac{k_2}{k_1^2} \zeta^{-(2\kappa+1)/(\kappa-1)} [c_2 \cos(k \ln \zeta) + c_3 \sin(k \ln \zeta)] + \dots \\
 v_{r2c} &= \frac{(\kappa + 1)(\kappa - 1)^2}{4\kappa k_1} \zeta^{-\kappa/(\kappa-1)} [(-c_2 + kc_3) \cos(k \ln \zeta) - \\
 &\quad - (kc_2 + c_3) \sin(k \ln \zeta)] + \dots \\
 v_{\varphi 2c} &= \frac{\kappa^2 - 1}{4\kappa k_1} \zeta^{-\kappa/(\kappa-1)} \{ [(2 - \kappa)c_2 + k\kappa c_3] \cos(k \ln \zeta) + \\
 &\quad + [-k\kappa c_2 + (2 - \kappa)c_3] \sin(k \ln \zeta) \} + \dots \\
 \rho_{2c} &= \zeta^{(3-2\kappa)/(\kappa-1)} [c_2 \cos(k \ln \zeta) + c_3 \sin(k \ln \zeta)] + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{2c} &= \frac{[(\kappa + 1)^2 (\kappa - 1)]}{2\kappa^2} \zeta^{1/(\kappa-1)} \left[\left(\frac{1}{\kappa-1} c_2 - \kappa c_3 \right) \cos(k \ln \zeta) + \right. \\
&+ \left. \left(\kappa c_2 + \frac{1}{\kappa-1} c_3 \right) \sin(k \ln \zeta) \right] + \dots \\
w_{2c} &= - \frac{k_2}{k_1^2} \zeta^{-(2\kappa+1)/(\kappa-1)} [c_2 \cos(k \ln \zeta) + c_3 \sin(k \ln \zeta)] + \dots \\
k &= \sqrt{(3 - \kappa) / (\kappa - 1)}
\end{aligned}$$

Невыписанные выражения для v_{x2s} , v_{r2s} , ..., w_{2s} получаются из соответствующих выражений для v_{x2c} , v_{r2c} , ..., w_{2c} заменой $c_2 \rightarrow -c_3$, $c_3 \rightarrow c_2$. Значения постоянных c_2 и c_3 получаются из решения задачи Коши для функций автомодельной переменной ξ во внешней области [5]. В частности, для $\kappa = 1.4$ вычисления дают $c_2 = 0.085$ и $c_3 = -0.978$.

2. Подстановка разложений (1.4) в исходные уравнения Навье — Стокса приводит к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для функций, составляющих первое приближение

$$\begin{aligned}
(2.1) \quad \rho_{21} \frac{dv_{r21}}{d\zeta} + (v_{r21} - \zeta) \frac{d\rho_{21}}{d\zeta} + \left(\frac{v_{r21}}{\zeta} - 1 \right) \rho_{21} &= 0 \\
\frac{k_5}{N_{Pr}} w_{21} \frac{d^2 w_{21}}{d\zeta^2} + \left[\frac{k_5}{N_{Pr}} \left(\frac{dw_{21}}{d\zeta} + \frac{w_{21}}{\zeta} \right) - \rho_{21} (v_{r21} - \zeta) \right] \frac{dw_{21}}{d\zeta} + \\
+ \kappa \rho_{21} w_{21} &= \frac{\kappa^2 - 1}{\kappa} p_{21}, \quad \frac{dp_{21}}{d\zeta} = 0, \quad p_{21} = \rho_{21} w_{21} \\
k_5 w_{21} \frac{d^2 v_{x21}}{d\zeta^2} + \left[k_5 \left(\frac{dw_{21}}{d\zeta} + \frac{w_{21}}{\zeta} \right) - \rho_{21} (v_{r21} - \zeta) \right] \frac{dv_{x21}}{d\zeta} + \\
+ \kappa \rho_{21} v_{x21} &= (\kappa - 1) p_{21}, \quad k_5 = \frac{\kappa(\kappa - 1)}{2(\kappa + 1)^2}
\end{aligned}$$

При $\zeta \rightarrow \infty$ искомое решение должно удовлетворять предельным соотношениям (1.5). Кроме того, условия симметрии течения вместе с требованием об отсутствии источников тепла дают $v_{r21} = dv_{x21} / d\zeta = dw_{21} / d\zeta = 0$ при $\zeta = 0$.

В системе (2.1) уравнение для продольной составляющей v_{x21} вектора скорости отделяется от остальных. Оставшаяся часть системы зависит только от тех членов в уравнениях Навье — Стокса, которые связаны с переносом тепла; вязкие свойства газа никакого влияния на ее вид не оказывают. Напротив, при выводе уравнения для v_{x21} учет вязкости существен. При $N_{Pr} = 1$ система (2.1) упрощается, поскольку левые части второго и пятого уравнений совпадают между собой [1].

Пусть $N_{Pr} \neq 1$. Система (2.1) с выделенным из нее уравнением для v_{x21} допускает двукратное интегрирование. Проведя его и воспользовавшись условиями симметрии при $\zeta = 0$, получим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка для функции w_{21} . Требование об отсутствии источников тепла позволяет утверждать, что в окрестности нуля

$$(2.2) \quad w_{21} = c_4 + c_5 \zeta^2 + \dots, \quad c_5 = - \frac{(\kappa + 1)^2 k_2}{2\kappa^2 (\kappa - 1)} \frac{N_{Pr}}{c_4}$$

где постоянная c_4 произвольна. Другие постоянные будут обозначаться в дальнейшем этой же буквой с различными индексами.

Поведение функции w_{21} при $\zeta \rightarrow \infty$ определяется асимптотическим выражением

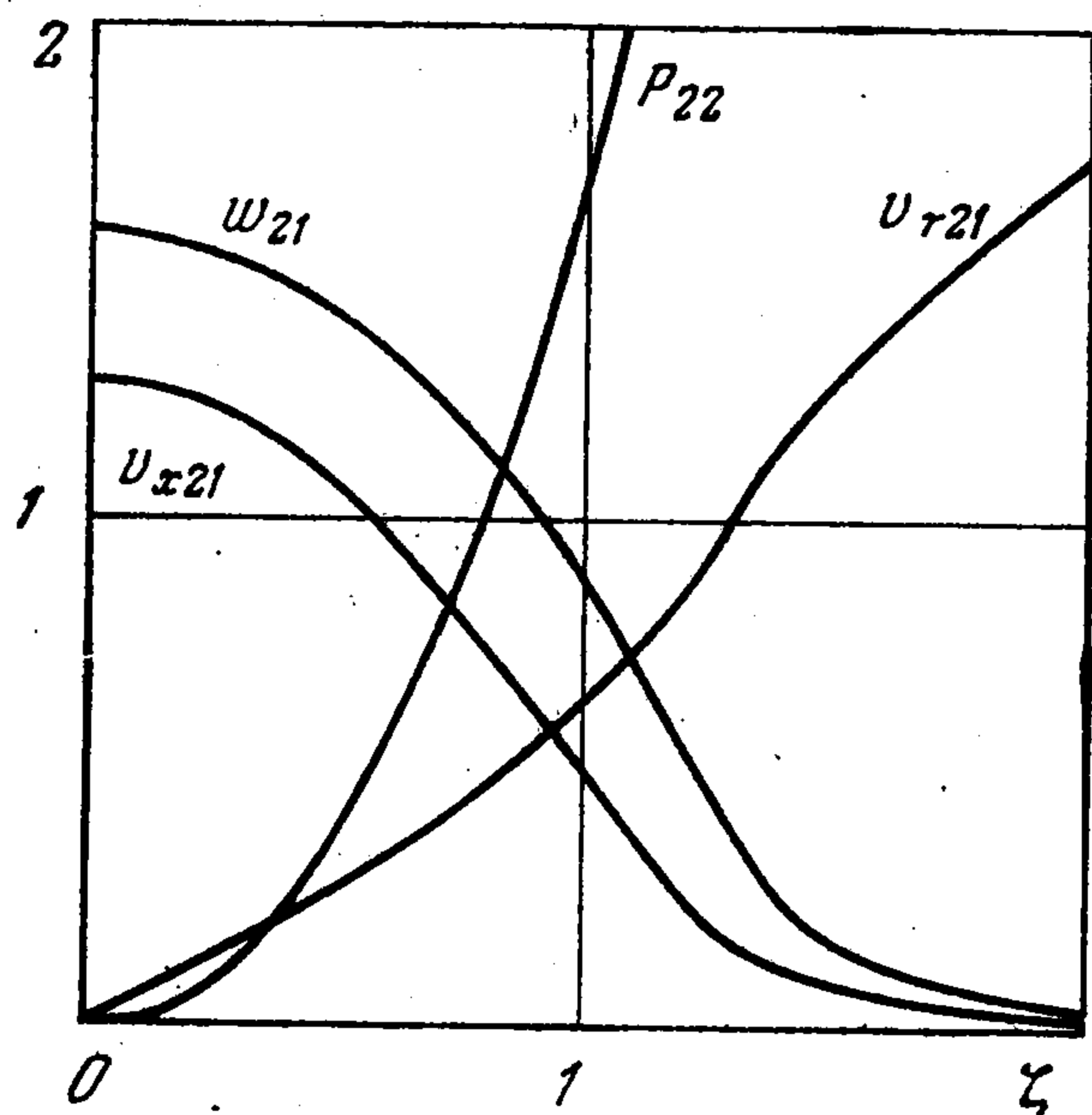
$$(2.3) \quad w_{21} = \frac{k_2}{k_1} \zeta^{-2/(\kappa-1)} [1 + O(\zeta^{k_6})] + w_{21}^\circ(\zeta, c_6), \quad k_6 = -\frac{2(\kappa+1)}{\kappa-1}$$

куда входит экспоненциально малая величина $w_{21}^\circ(\zeta, c_6)$.

Краевая задача формируется теперь следующим образом: требуется построить такое решение w_{21} , для которого в окрестности нуля справедливо представление (2.2), а при $\zeta \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическая формула (2.3). Результаты численного решения задачи при $\kappa = 1.4$ и $N_{Pr} = 0.75$ изображены на фиг. 2, определяемая в процессе решения постоянная $c_4 = 1.571$.

Для функции v_{x21} краевая задача ставится аналогично. Из условий симметрии при $\zeta = 0$ следует, что

$$(2.4) \quad v_{x21} = \frac{\kappa-1}{\kappa} c_4 + c_7 \left[1 - \frac{(\kappa+1)^2 k_2}{\kappa-1} \frac{1}{c_4^2} \zeta^2 + \dots \right]$$



Фиг. 2

Асимптотическое представление v_{x21} при $\zeta \rightarrow \infty$ имеет вид

$$(2.5) \quad v_{x21} = \frac{\kappa}{\kappa+1} \frac{k_2}{k_1} \zeta^{-2/(\kappa-1)} + \dots + c_8 (\zeta^{-2\kappa/(\kappa-1)} + \dots) + v_{x21}^\circ(\zeta, c_9)$$

с экспоненциально затухающим членом $v_{x21}^\circ(\zeta, c_9)$ в правой части. Чтобы вычислить значение постоянной c_8 , необходимо дописать дополнительные слагаемые в разложение решения для внешней области, в которой движение газа подчиняется уравнениям Эйлера. Используя известные [11] свойства входящих в дополнительные слагаемые функций, заключаем, что $c_8 = 0$. График функции v_{x21} , задаваемой в окрестности нуля формулой (2.4) и аппроксимируемой при $\zeta \rightarrow \infty$ выражением (2.5) с $c_8 = 0$, показан на фиг. 2, согласно вычислениям постоянная $c_7 = 0.830$.

Функция p_{22} удовлетворяет простейшему дифференциальному уравнению

$$\frac{dp_{22}}{d\zeta} = \frac{\kappa}{(\kappa+1)^2} \left\{ \mu_1 \left[w_{21} \frac{d^2 v_{r21}}{d\zeta^2} + \left(\frac{dw_{21}}{d\zeta} + \frac{w_{21}}{\zeta} \right) \frac{dv_{r21}}{d\zeta} - \frac{w_{21} v_{r21}}{\zeta^2} \right] + \mu_2 \frac{v_{r21}}{\zeta} \frac{dw_{21}}{d\zeta} \right\} - \frac{2}{\kappa-1} p_{21} \left[(v_{r21} - \zeta) \frac{dv_{r21}}{d\zeta} - \kappa v_{r21} \right]$$

$$\mu_1 = 4/3 + \lambda_{20}/\lambda_{10}, \quad \mu_2 = -2/3 + \lambda_{20}/\lambda_{10}$$

Потребуем, чтобы при $\zeta \rightarrow 0$ функция p_{22} оставалась регулярной. Предельное условие (1.6) при $\zeta \rightarrow \infty$ выполняется, но не дает возможности определить аддитивную постоянную c_{10} . Последнюю можно найти, рассмотрев осесимметричную задачу для внешних приближений во внешней области. Для дальнейшего важно, что функции, связанные с асимметрией течения, не зависят от значения c_{10} . График p_{22} при $c_{10} = 0$ изображен на фиг. 2.

3. Приступим к изучению возмущений, которые вносит в след подъемная сила обтекаемого тела. Окружим его замкнутой контрольной поверхностью (фиг. 1) и подсчитаем компоненту импульса газа в проекции на ось y , которая переносится через заключенную в следе часть плоскости $x = \text{const}$. Используя разложения (1.4) и полагая $x \rightarrow \infty$, видно, что интеграл, выражающий эту компоненту, получается исчезающе малым. Иными словами, величина подъемной силы может быть найдена по параметрам внешней области течения.

Как было установлено в работе [5], при приближении из этой области к ее внутренней границе распределения параметров газа приобретают колебательный характер. Амплитуда колебаний составляющих возмущенного вектора скорости неограниченно увеличивается. Кроме того, амплитуда колебаний избыточной плотности также растет до бесконечности, если $1.5 < \kappa < 2$. Существенно, что колебания начинают развиваться во внешней невязкой части потока, где инерционные силы балансируются только силами давления. Возникнув на границе следа, колебания передаются затем по всей его длине, в связи с чем в формулах (1.4), которые устанавливают асимптотический вид решения в следе за телом, появляются члены с $\cos(k_3 \ln x)$ и $\sin(k_3 \ln x)$. Поведение потока вблизи внешней границы внутренней области задается соотношениями (1.7), куда входят величины $\cos(k \ln \zeta)$ и $\sin(k \ln \zeta)$. Таким образом, частота колебаний вдоль и поперек следа изменяется по-разному.

Подставив разложения (1.4) в уравнения Навье — Стокса, получим линейную однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функции второго приближения. Изучение общих свойств этой системы значительно упрощается, если ввести комплексные величины $v_x^* = v_{x2c} + i v_{x2s}$, ..., $w^* = w_{2c} + i w_{2s}$. В результате имеем

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad & \rho_{21} \frac{dv_r^*}{d\zeta} + (v_{r21} - \zeta) \frac{d\rho^*}{d\zeta} = - \left(\frac{d\rho_{21}}{d\zeta} + \frac{\rho_{21}}{\zeta} \right) v_r^* - \frac{\rho_{21}}{\zeta} v_\varphi^* - \\
 & - \left(\frac{dv_{r21}}{d\zeta} + \frac{v_{r21}}{\zeta} - \frac{4-\kappa}{2} - ik \frac{\kappa-1}{2} \right) \rho^* \\
 & k_5 \mu_1 w_{21} \frac{d^2 v_r^*}{d\zeta^2} + \left[k_5 \mu_1 \left(\frac{dw_{21}}{d\zeta} + \frac{w_{21}}{\zeta} \right) - \rho_{21} (v_{r21} - \zeta) \right] \frac{dv_r^*}{d\zeta} + \\
 & + k_5 \mu_3 \frac{w_{21}}{\zeta} \frac{dv_\varphi^*}{d\zeta} + k_5 \left(\mu_1 \frac{dv_{r21}}{d\zeta} + \mu_2 \frac{v_{r21}}{\zeta} \right) \frac{dw^*}{d\zeta} - \frac{\kappa-1}{2} \frac{d\rho^*}{d\zeta} = \\
 & = \left[k_5 \left(-\mu_2 \frac{1}{\zeta} \frac{dw_{21}}{d\zeta} + \mu_4 \frac{w_{21}}{\zeta^2} \right) + \rho_{21} \left(\frac{dv_{r21}}{d\zeta} - \frac{2+\kappa}{2} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - ik \frac{\kappa-1}{2} \right) \right] v_r^* + k_5 \left(-\mu_2 \frac{1}{\zeta} \frac{dw_{21}}{d\zeta} + \mu_4 \frac{w_{21}}{\zeta^2} \right) v_\varphi^* - \\
 & - k_5 \mu_1 \left(\frac{d^2 v_{r21}}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{dv_{r21}}{d\zeta} - \frac{v_{r21}}{\zeta^2} \right) w^* + \left[(v_{r21} - \zeta) \frac{dv_{r21}}{d\zeta} - \kappa v_{r21} \right] \rho^* \\
 & k_5 w_{21} \frac{d^2 v_\varphi^*}{d\zeta^2} - k_5 \mu_3 \frac{w_{21}}{\zeta} \frac{dv_r^*}{d\zeta} + \left[k_5 \left(\frac{dw_{21}}{d\zeta} + \frac{w_{21}}{\zeta} \right) - \rho_{21} (v_{r21} - \zeta) \right] \frac{dv_\varphi^*}{d\zeta} = \\
 & = k_5 \left(\frac{1}{\zeta} \frac{dw_{21}}{d\zeta} + \mu_4 \frac{w_{21}}{\zeta^2} \right) v_r^* + \left[k_5 \left(\frac{1}{\zeta} \frac{dw_{21}}{d\zeta} + \mu_4 \frac{w_{21}}{\zeta^2} \right) + \right. \\
 & \left. + \rho_{21} \left(\frac{dv_{r21}}{d\zeta} - \frac{2+\kappa}{2} - ik \frac{\kappa-1}{2} \right) \right] v_\varphi^* + \\
 & + k_5 \frac{1}{\zeta} \left(\mu_2 \frac{dv_{r21}}{d\zeta} + \mu_1 \frac{v_{r21}}{\zeta} \right) w^* - \frac{\kappa-1}{2} \frac{d\rho^*}{d\zeta} \\
 & \frac{k_5}{N_{Pr}} w_{21} \frac{d^2 w^*}{d\zeta^2} + \left[\frac{k_5}{N_{Pr}} \left(2 \frac{dw_{21}}{d\zeta} + \frac{w_{21}}{\zeta} \right) - \rho_{21} (v_{r21} - \zeta) \right] \frac{dw^*}{d\zeta} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \rho_{21} \frac{dw_{21}}{d\zeta} v_r^* - \left[\frac{k_5}{N_{Pr}} \left(\frac{d^2 w_{21}}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{dw_{21}}{d\zeta} - \frac{w_{21}}{\zeta^2} \right) + \right. \\
 &+ \rho_{21} \left(\frac{2+\kappa}{2} + ik \frac{\kappa-1}{2} \right) \left. \right] w^* + \left[(v_{r21} - \zeta) \frac{dw_{21}}{d\zeta} - \kappa w_{21} \right] \rho^* \\
 &w_{21} \rho^* + \rho_{21} w^* = 0, \quad \mu_3 = 1/3 + \lambda_{20} / \lambda_{10}, \quad \mu_4 = 7/3 + \lambda_{20} / \lambda_{10}
 \end{aligned}$$

Отметим принципиальную разницу между функциями первого и второго приближений. Как было указано выше, в осесимметричном течении вязкие напряжения становятся существенными при нахождении продольной составляющей вектора скорости. Поля остальных параметров можно построить, принимая во внимание из всех диссипативных факторов лишь передачу тепла в направлении набегающего потока. Напротив, в асимметричных возмущениях, обусловленных подъемной силой тела, поля как вектора скорости, так и термодинамических величин в равной мере зависят от теплопроводности и вязкости газа.

Уравнение для продольной составляющей скорости имеет вид

$$\begin{aligned}
 (3.2) \quad &k_5 w_{21} \frac{d^2 v_{x^*}}{d\zeta^2} + \left[k_5 \left(\frac{dw_{21}}{d\zeta} + \frac{w_{21}}{\zeta} \right) - \rho_{21} (v_{r21} - \zeta) \right] \frac{dv_{x^*}}{d\zeta} + \\
 &+ \rho_{21} \left(\frac{2+\kappa}{2} + ik \frac{\kappa-1}{2} \right) v_{x^*} = - k_5 \frac{dv_{x21}}{d\zeta} \frac{dw^*}{d\zeta} + \rho_{21} \frac{dv_{x21}}{d\zeta} v_r^* - \\
 &- k_5 \left(\frac{d^2 v_{x21}}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{dv_{x21}}{d\zeta} \right) w^* + \left[(v_{r21} - \zeta) \frac{dv_{x21}}{d\zeta} - \kappa v_{x21} \right] \rho^*
 \end{aligned}$$

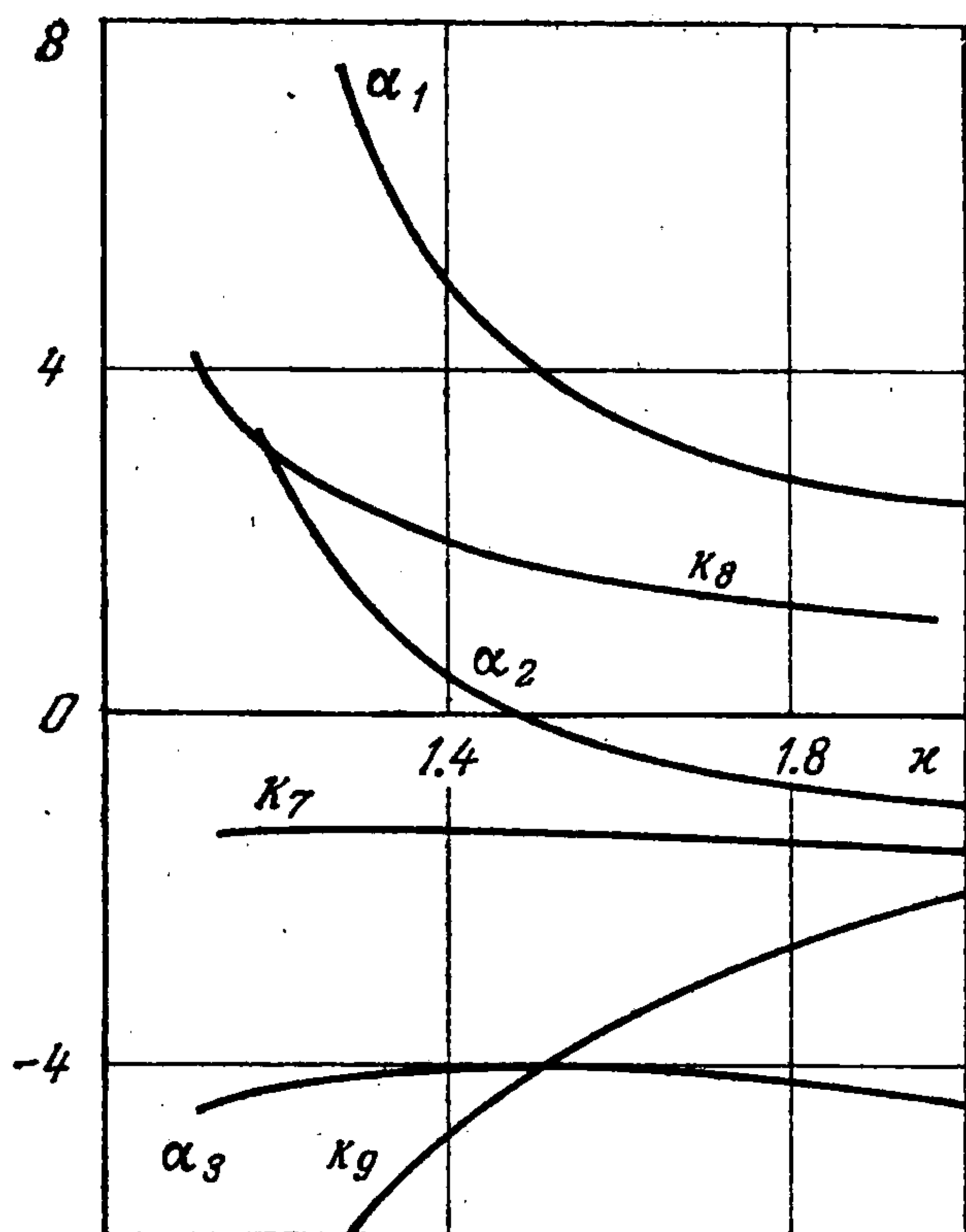
Оно отделяется от системы (3.1) и может быть проинтегрировано после того, как найдены функции v_r^* , ..., w^* . Последние удовлетворяют тем же уравнениям, которые возникают при исследовании второго приближения в теории двумерных нестационарных движений газа. Отсюда следует, что с принятой точностью поле возмущений внутри следа строится на основании принципа эквивалентности, согласно которому параметры потока в любой плоскости $x = \text{const}$ устанавливаются независимо от значений его параметров в других плоскостях. Для идеальных (невязких) течений принцип эквивалентности сформулирован в работах [12-15].

Исключим из второго и третьего уравнений (3.1) давление p^* . Присоединив к полученному таким образом уравнению третьего порядка первое и четвертое уравнения (3.1) и воспользовавшись конечным соотношением между плотностью ρ^* и удельной энтальпией w^* , образуем замкнутую систему шестого порядка для функций v_r^* , v_φ^* и w^* . Эквивалентная ей система для функций с индексами $2c$ и $2s$ является системой двенадцатого порядка с действительными коэффициентами. Рассмотрим асимптотическое поведение двенадцати ее линейно-независимых решений при $\zeta \rightarrow \infty$. Для краткости приведем асимптотики только для одной функции

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad &\rho_{2c} = \zeta^{\alpha_1} [a_1 \cos(k_7 \ln \zeta) + a_2 \sin(k_7 \ln \zeta) + O(\zeta^{k_0})] + \\
 &+ \zeta^{\alpha_2} [a_3 \cos(k_8 \ln \zeta) + a_4 \sin(k_8 \ln \zeta) + \\
 &+ a_5 \cos(k_9 \ln \zeta) + a_6 \sin(k_9 \ln \zeta) + O(\zeta^{k_0})] + \\
 &+ \zeta^{\alpha_3} [a_7 \cos(k_7 \ln \zeta) + a_8 \sin(k_7 \ln \zeta) + O(\zeta^{k_0})] + \\
 &+ \zeta^{\alpha_4} \exp(k_0 N_{Pr} \zeta^{-k_0}) [a_9 \cos(k_{10} \ln \zeta) + a_{10} \sin(k_{10} \ln \zeta) + \\
 &+ O(\zeta^{k_0})] + \zeta^{\alpha_5} \exp(k_0 \zeta^{-k_0}) [a_{11} \cos(k_{11} \ln \zeta) + \\
 &+ a_{12} \sin(k_{11} \ln \zeta) + O(\zeta^{k_0})] \\
 &k_0 = - \frac{\kappa^2 - 1}{2\kappa^2} \frac{k_1^2}{k_2}
 \end{aligned}$$

Здесь показатели степеней $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$; постоянные a_1, \dots, a_{12} произвольны. Отметим, что $\alpha_2 = (3 - 2\kappa) / (\kappa - 1)$, $k = k_8 \neq k_9$. Зависимости $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и k_7, k_8, k_9 от κ ясны из фиг. 3. Структура асимптотик остальных искомым функций аналогична (3.3).

Асимптотики всех двенадцати независимых решений имеют колебательный характер. Амплитуды восьми из них изменяются по степенным законам, что касается амплитуд остальных



Фиг. 3

четырёх асимптотик, то они становятся экспоненциально малыми при $\zeta \rightarrow \infty$. В связи с этим на фиг. 3 отсутствуют графики для α_4, α_5 и k_{10}, k_{11} . Главные члены асимптотик со степенными амплитудами определяются эйлеровской частью системы уравнений (3.1), выражаемые старшими производными диссипативные процессы при их построении можно не учитывать. Наоборот, экспоненциально малые асимптотики порождаются диссипативными факторами: слагаемые в формуле (3.3), пропорциональные постоянным a_9 и a_{10} , возникают из-за теплопроводности, а члены с коэффициентами a_{11} и a_{12} появляются в результате действия вязкости.

Сравнение асимптотических разложений (1.7) и (3.3) позволяет определить шесть постоянных

$$(3.4) \quad a_1 = a_2 = 0, \quad a_3 = c_2, \quad a_4 = c_3, \quad a_5 = a_6 = 0$$

Амплитуда асимптотик с постоянными a_7, \dots, a_{12} по порядку величины меньше, чем амплитуда членов, содержащихся в соотношениях (1.7). Отсюда следует, что на эти постоянные никаких требований налагать нельзя. Как показывают третье и четвертое равенства (3.4), асимптотическое поведение функций второго приближения при $\zeta \rightarrow \infty$ позволяет произвести их сращивание с решением для внешней области течения. Такая возможность объясняется наличием среди (3.3) асимптотик, вид которых устанавливается эйлеровской частью системы уравнений (3.1).

Изучим поведение решения этой системы при $\zeta \rightarrow 0$. Для поставленной цели напишем первый из шести линейно-независимых интегралов, которые остаются регулярными при неограниченном уменьшении значений независимой переменной

$$(3.5) \quad \begin{aligned} v_{r2c} &= -b_1 \frac{4k_5 k_{12}^2}{c_5 N_{Pr}} + \dots, & v_{r2s} &= b_1 \frac{(\kappa - 1) k k_{12}}{8c_5 N_{Pr}} \zeta^2 + \dots \\ v_{\varphi 2c} &= b_1 \frac{4k_5 k_{12}^2}{c_5 N_{Pr}} \left(1 - \frac{2c_5}{c_4} \zeta^2 + \dots \right) \\ v_{\varphi 2s} &= -b_1 \frac{3(\kappa - 1) k k_{12}}{8c_5 N_{Pr}} \zeta^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{2c} &= b_1 \zeta^3 + \dots, & \rho_{2s} &= -b_1 \frac{(\kappa + 1)^2 k (1 + 2N_{Pr})}{48\kappa k_{12}} \zeta^5 + \dots \\ p_{2c} &= -b_1 \frac{4\kappa k_{12}^2}{(\kappa + 1)^2 c_5 N_{Pr}} \left[\frac{(\kappa + 1) k_2}{2c_4} - 2 \left(\frac{5}{3} - \frac{\lambda_{20}}{\lambda_{10}} \right) k_5 c_5 \right] \zeta + \dots \\ p_{2s} &= -b_1 \frac{2\kappa k_5 k_{12} c_4}{c_5 N_{Pr}} \zeta + \dots \\ w_{2c} &= -b_1 k_{12} \zeta^3 + \dots, & w_{2s} &= b_1 \frac{(\kappa + 1)^2 k (1 + 2N_{Pr})}{48\kappa} \zeta^5 + \dots \\ k_{12} &= \frac{c_4^2}{k_2} \end{aligned}$$

Второй регулярный интеграл имеет вид

$$(3.6) \quad \begin{aligned} v_{r2c} &= b_2 \frac{c_4}{48k_2} \left[23 - 5\kappa + 3(\kappa - 1) \frac{\lambda_{20}}{\lambda_{10}} \right] \zeta^2 + \dots \\ v_{r2s} &= b_2 \frac{\kappa c_4}{16k_2} \left[2 + (\kappa - 1) \left(\frac{5}{3} - \frac{\lambda_{20}}{\lambda_{10}} \right) \right] \zeta^2 + \dots \\ v_{\varphi 2c} &= b_2 \frac{c_4}{16k_2} \left[1 - 3\kappa - 3(\kappa - 1) \frac{\lambda_{20}}{\lambda_{10}} \right] \zeta^2 + \dots \\ v_{\varphi 2s} &= b_2 \frac{3\kappa c_4}{16k_2} \left[-2 + (\kappa - 1) \left(1 + \frac{\lambda_{20}}{\lambda_{10}} \right) \right] \zeta^2 + \dots \\ \rho_{2c} &= b_2 \zeta + \dots, & \rho_{2s} &= -b_2 \frac{(\kappa + 1)^2 k N_{Pr}}{8\kappa k_{12}} \zeta^3 + \dots \\ p_{2c} &= b_2 \frac{\kappa k_{12}}{(\kappa + 1)^2 k_2} \zeta + \dots, & p_{2s} &= b_2 \frac{\kappa k k_{12}}{(\kappa + 1)^2} \zeta + \dots \\ w_{2c} &= -b_2 k_{12} \zeta + \dots, & w_{2s} &= \frac{(\kappa + 1)^2 k N_{Pr}}{8\kappa} \zeta^3 + \dots \end{aligned}$$

Третий линейно-независимый интеграл представим как

$$(3.7) \quad \begin{aligned} v_{r2c} &= -b_3 \frac{12k_5 k_{12}^2}{c_5 N_{Pr}} \zeta^2 + \dots, & v_{r2s} &= b_3 \frac{(\kappa - 1) k k_{12}}{4c_5 N_{Pr}} \zeta^4 + \dots \\ v_{\varphi 2c} &= b_3 \frac{36k_5 k_{12}^2}{c_5 N_{Pr}} \zeta^2 + \dots, & v_{\varphi 2s} &= -b_3 \frac{5(\kappa - 1) k k_{12}}{4c_5 N_{Pr}} \zeta^4 + \dots \\ \rho_{2c} &= b_3 \zeta^5 + \dots, & \rho_{2s} &= -b_3 \frac{(\kappa + 1)^2 k (1 + N_{Pr})}{48\kappa k_{12}} \zeta^7 + \dots \\ p_{2c} &= -b_3 \frac{48\kappa^2 (\kappa - 1) k_{12}^2 c_4}{(\kappa + 1)^2 c_5 N_{Pr}} \zeta + \dots, & p_{2s} &= O(\zeta^5) \\ w_{2c} &= -b_3 k_{12} \zeta^5 + \dots, & w_{2s} &= b_3 \frac{(\kappa + 1) k (1 + N_{Pr})}{48\kappa} \zeta^7 + \dots \end{aligned}$$

Асимптотические разложения трех других регулярных интегралов получаются следующим образом. Заменяем, прежде всего, в формулах (3.5)–(3.7) функции v_{r2c} , $v_{\varphi 2c}$, ρ_{2c} , p_{2c} , w_{2c} , v_{r2s} , $v_{\varphi 2s}$, ρ_{2s} , p_{2s} и w_{2s} величинами v_{r2s} , $v_{\varphi 2s}$, ρ_{2s} , p_{2s} , w_{2s} , $-v_{r2c}$, $-v_{\varphi 2c}$, $-\rho_{2c}$, $-p_{2c}$ и $-w_{2c}$. Подстановка на место b_1 в (3.5) произвольной постоянной b_4 дает тогда четвертый из искомых интегралов; написав вместо b_2 в (3.6) коэффициент b_5 , приходим к пятому интегралу; наконец, из замены b_3 в (3.7) произвольной постоянной b_6 вытекает шестой регулярный интеграл.

Остальные шесть линейно-независимых решений обладают в нуле теми или иными особенностями. В седьмом и восьмом обращается в бесконечность плотность: $\rho_{2c} \sim b_7 \zeta^{-1}$, $\rho_{2s} \sim b_8 \zeta^{-1}$; в девятом и десятом неограниченно увеличивается давление: $p_{2c} \sim b_9 \zeta^{-1}$, $p_{2s} \sim b_{10} \zeta^{-1}$; в одиннадцатом и двенадцатом имеются особенности в поперечных составляющих

вектора скорости: $v_{r2c} \sim v_{\varphi 2c} \sim b_{11} \zeta^{-2}$, $v_{r2s} \sim v_{\varphi 2s} \sim b_{12} \zeta^{-2}$. Поле возмущений во внешней области течения может оказаться нерегулярным при приближении к ее внутренней границе [5], но в следе за обтекаемым телом избыточные значения всех параметров газов обязаны оставаться конечными. Это утверждение эквивалентно равенствам

$$(3.8) \quad b_7 = b_8 = b_9 = b_{10} = b_{11} = b_{12} = 0$$

Сформулируем теперь краевую задачу для системы уравнений (3.1): требуется построить ее решение, которое при $\zeta \rightarrow 0$ удовлетворяет шести условиям (3.8), а при $\zeta \rightarrow \infty$ имеет асимптотическое разложение (3.3) с шестью постоянными (3.4). Таким образом, половина граничных условий для системы двенадцатого порядка задана на одном конце полубесконечного интервала интегрирования, вторая половина — на другом.

При численном решении поставленной задачи возникают серьезные трудности, обусловленные разными причинами. Во-первых, коэффициенты при старших производных в дифференциальных уравнениях (3.1) быстро стремятся к нулю с возрастанием ζ , поскольку $w_{21} \sim \zeta^{-2/(k-1)}$. Во-вторых, наличие экспоненциально малых членов в асимптотическом разложении (3.3) означает, что интегрирование указанных уравнений должно производиться в направлении от 0 к ∞ , в обратном направлении счет будет неустойчивым. В-третьих, задание граничных условий на обоих концах полубесконечного интервала влечет за собой необходимость подгонки шести коэффициентов b_1, \dots, b_6 в разложениях при $\zeta \rightarrow 0$ с тем, чтобы обеспечить требуемые значения постоянных a_1, \dots, a_6 в асимптотических формулах для $\zeta \rightarrow \infty$.

Численное интегрирование системы (3.1) начнем из некоторой точки $\zeta \ll 1$. Начальные данные зададим при помощи соотношений

$$(3.9) \quad v_{r2c} = \sum_{j=1}^6 v_{r2c}^j(\zeta), \dots, \quad w_{2s} = \sum_{j=1}^6 w_{2s}^j(\zeta)$$

где под функциями $v_{r2c}^j, \dots, w_{2s}^j$ подразумеваются шесть регулярных асимптотик системы, пропорциональные коэффициентам b_j . Будем полагать последовательно отличным от нуля лишь один из этих коэффициентов: $b_1 \neq 0, b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0; \dots; b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0, b_6 \neq 0$. Используя программу вычисления восьми постоянных a_1, \dots, a_8 в асимптотических формулах для $\zeta \rightarrow \infty$, установим соответствие между коэффициентами b_1, \dots, b_6 и названными постоянными. В силу линейности краевой задачи искомое соответствие можно представить как

$$(b_1, b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0) \rightsquigarrow (d_{11}b_1, \dots, d_{81}b_1); \dots$$

$$(b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0, b_6) \rightsquigarrow (d_{16}b_6, \dots, d_{86}b_6)$$

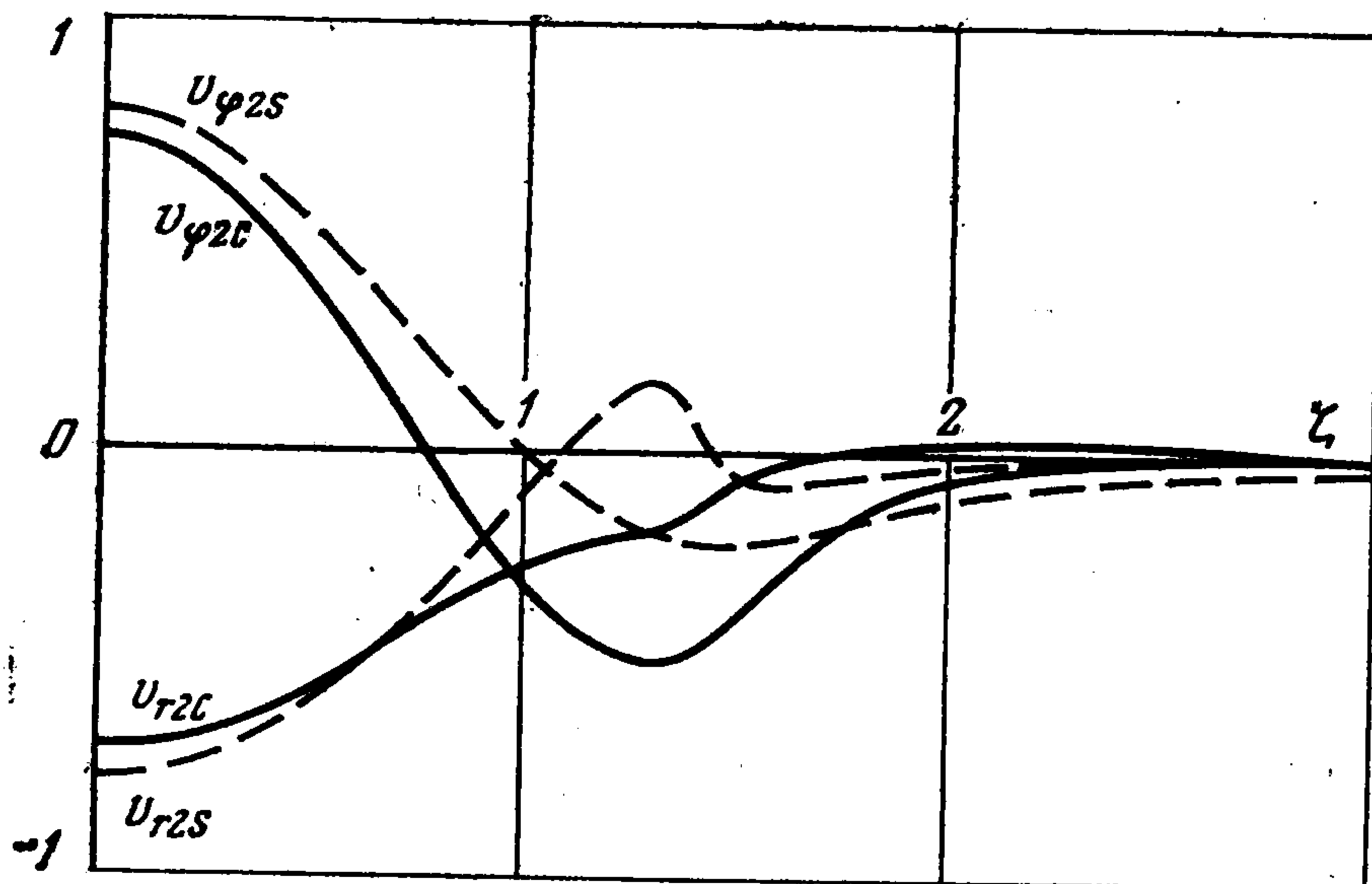
Числа d_{11}, \dots, d_{86} определяются из расчетов, в которых единственному отличному от нуля коэффициенту b_j придается значение единица. Удовлетворим теперь условиям (3.4). Для этого потребуем, чтобы постоянные b_1, \dots, b_6 были решениями линейной системы алгебраических уравнений

$$D\mathbf{b} = \mathbf{c}, \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{16} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{81} & \dots & d_{86} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ \dots \\ b_6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_2 \\ c_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

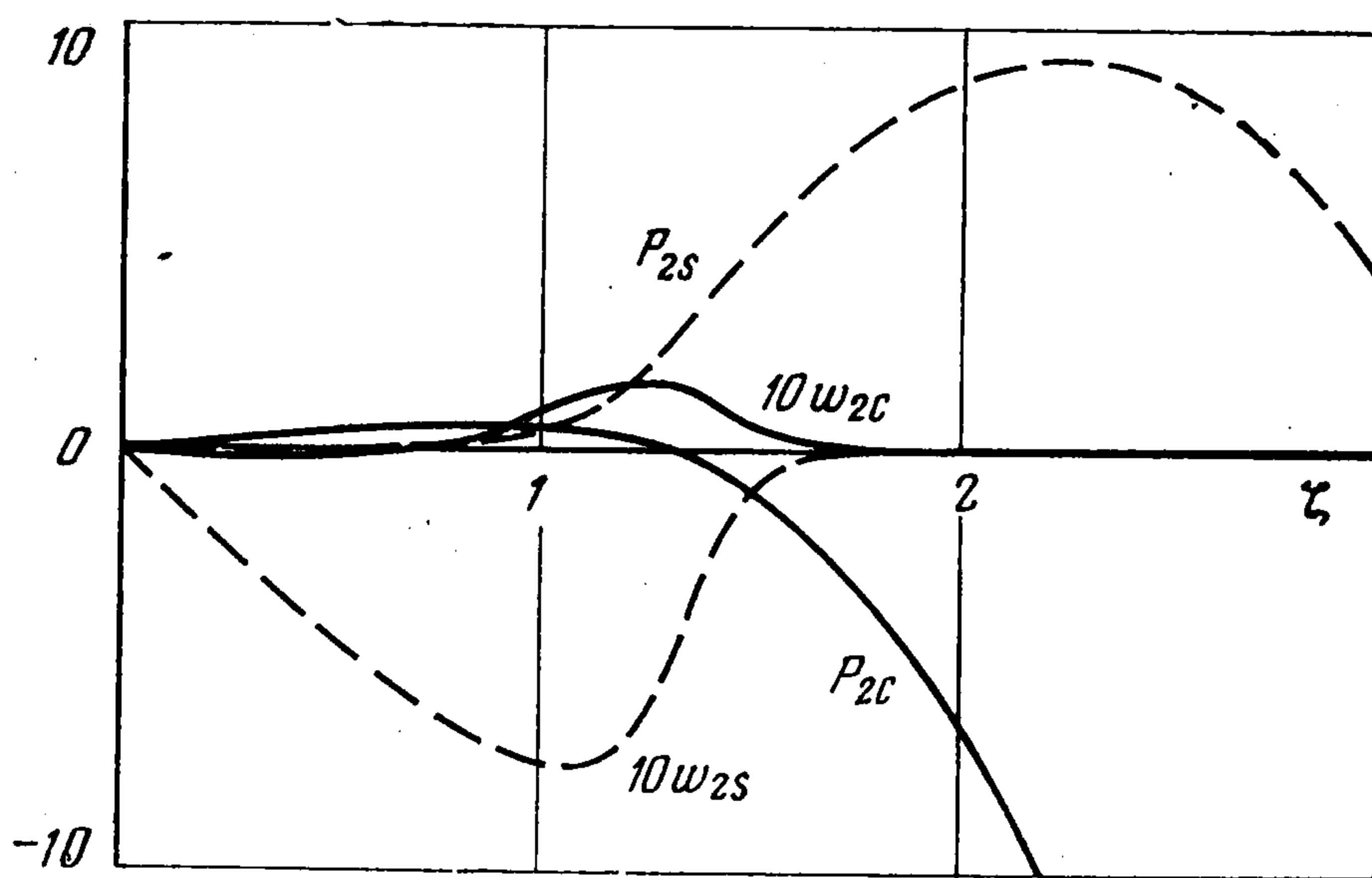
Постоянные a_7 и a_8 находятся после решения системы (3.10) по формулам

$$a_7 = \sum_{j=1}^6 d_{7j} b_j, \quad a_8 = \sum_{j=1}^6 d_{8j} b_j$$

Для реализации описанного метода были вычислены поправочные члены, которые в асимптотиках (3.3) оценены лишь по порядку величины, и счет обрывался в точках из интервала $2.5 < \zeta < 3.0$. Свойства газа за-



Фиг. 4



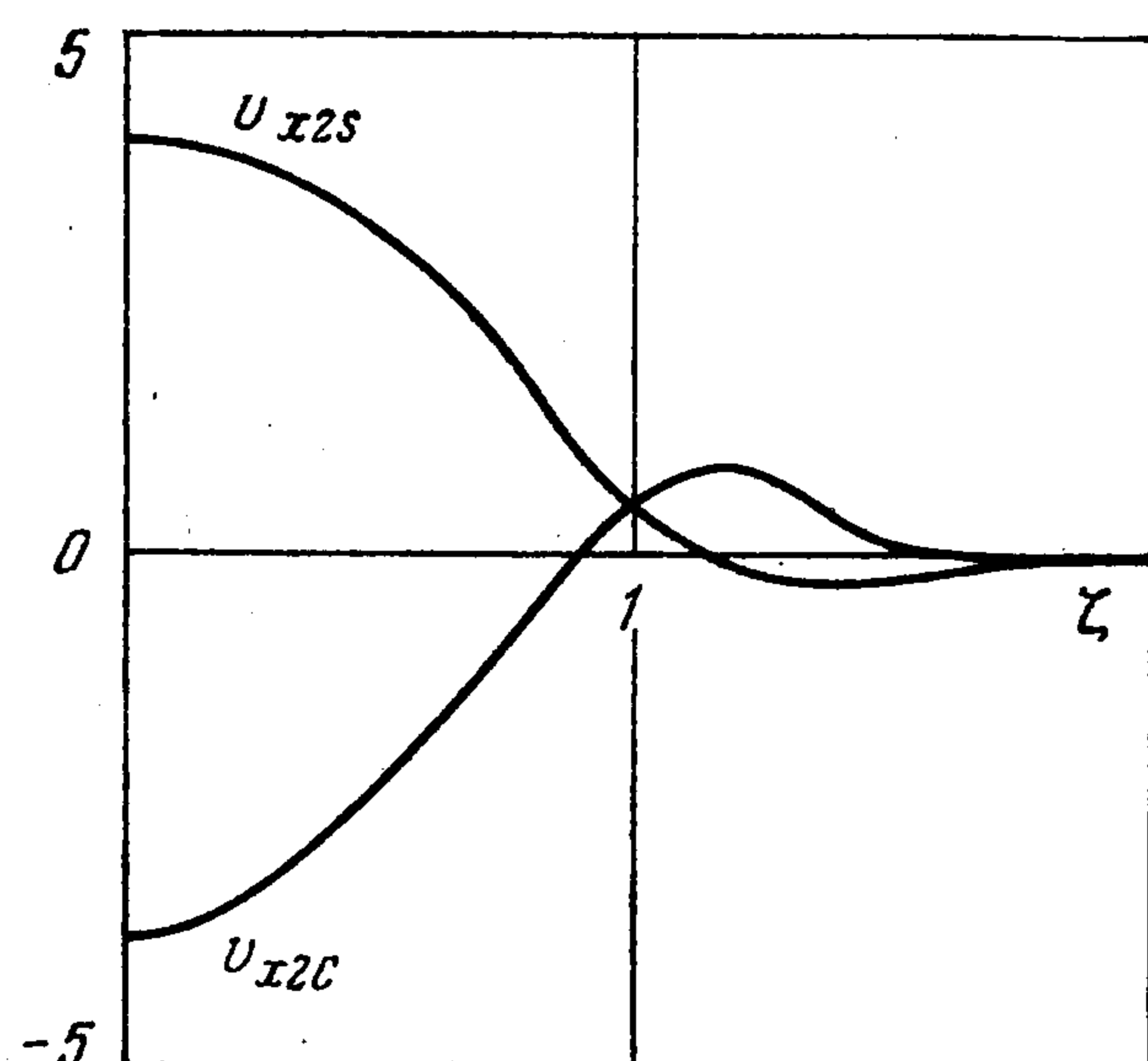
Фиг. 5

давались равенствами $\kappa = 1.4$, $N_{Pr} = 0.75$, $\lambda_{20} / \lambda_{10} = 0.1$. В результате получились значения

$$(3.10) \quad \begin{aligned} b_1 &= -0.0411, & b_2 &= 0.0100, & b_3 &= 0.0166, & b_4 &= -0.0450 \\ b_5 &= 0.1400, & b_6 &= 0.0097, & a_7 &= -0.3046, & a_8 &= -0.7569 \end{aligned}$$

Повторное интегрирование системы (3.1) с начальными данными (3.9), куда подставлены коэффициенты (3.10), полностью решает краевую задачу. Графики функций второго приближения показаны на фиг. 4 и 5.

Осталось найти продольную составляющую вектора скорости потока. Асимптотика частного решения неоднородного уравнения (3.2) при $\zeta \rightarrow \infty$ совпадает с требуемой формулами (1.7). Все четыре асимптотики для v_{x2c} и v_{x2s} соответствующего (3.2) однородного уравнения имеют колеба-



Фиг. 6

тельный характер. В двух из них амплитуды стремятся к нулю по экспоненциальному закону, а в двух оставшихся — как $\zeta^{-\kappa(2+\kappa)/(\kappa-1)}$. Как и при определении функции v_{x21} , уточним предельные условия (1.7), используя высшие приближения во внешней области. Оценки показывают, что произвольные постоянные, которым пропорциональны асимптотики со степенной амплитудой, равны нулю. Отсюда имеем два граничных условия при $\zeta \rightarrow \infty$.

Остальные граничные условия, которым необходимо удовлетворить при интегрировании уравнения (3.2), выведем, изучая поведение его решения в окрестности нуля. Здесь два линейно-независимых интеграла соответствующего (3.2) однородного уравнения нерегулярны. Асимптотика двух регулярных интегралов проста

$$v_{x2c}^1 = b_{13} \left[1 - \frac{(2+\kappa)k_{12}}{8k_5} \zeta^2 + \dots \right], \quad v_{x2s}^1 = -b_{13} \frac{(\kappa+1)^2 k k_{12}}{4\kappa} \zeta^2 + \dots$$

$$v_{x2c}^2 = b_{14} \frac{(\kappa+1)^2 k k_{12}}{4\kappa} \zeta^2 + \dots, \quad v_{x2s}^2 = b_{14} \left[1 - \frac{(2+\kappa)k_{12}}{8k_5} \zeta^2 + \dots \right]$$

Что касается частного интеграла неоднородного уравнения, то он стремится к нулю как ζ^3 . Из требования регулярности решения при $\zeta = 0$ вытекают недостающие краевые условия, которые формулируются в виде равенств нулю коэффициентов при двух нерегулярных интегралах. Графики функций v_{x2c} и v_{x2s} изображены на фиг. 6, $b_{13} = -3.77$, $b_{14} = 3.93$.

Поступила 6 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Сычев В. В. О течении в ламинарном гиперзвуковом следе за телом. In: Fluid Dynamics Transactions, vol. 3. Warszawa, PWN, 1966.
2. Терентьев Е. Д. Структура ударных волн в гиперзвуковых течениях. ПММ, 1974, т. 38, вып. 2.
3. Седов Л. И. Движение воздуха при сильном взрыве. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 1.
4. Седов Л. И. Распространение сильных взрывных волн. ПММ, 1946, т. 10, вып. 2.
5. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О пространственных гиперзвуковых течениях. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
6. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О гиперзвуковом обтекании несущего профиля. ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
7. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
8. Ван Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
9. Коул Дж. Д. Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.
10. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. М., Физматгиз, 1961.
11. Лифшиц Ю. Б., Рыжов О. С. Об одномерных нестационарных движениях газа, вытесняемого поршнем. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
12. Tsien H. S. Similarity laws of hypersonic flows. J. Math. Phys., 1946, vol. 25, No. 3.
13. Hayes W. D. On hypersonic similitude. Quart. Appl. Math., 1947, vol. 5, No. 1.
14. Ильюшин А. А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей. ПММ, 1956, т. 20, вып. 6.
15. Бам-Зеликович Г. М., Бунимович А. И., Михайлова М. П. Движение тонких тел с большими сверхзвуковыми скоростями. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1960, № 1.