Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 531.36

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

А. С. Озиранер

(Москва)

Установлены критерии оптимальной стабилизации движения относительно части переменных, которые модифицируют теоремы Н. Н. Красовского [1] и В. В. Румянцева [2, 3]. Изучается применение этих критериев к автономным системам; приводится пример.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения управляемой системы

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (\mathbf{X}(t, 0, 0) \equiv 0) \tag{1.1}$$

$$\mathbf{x} = (y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p), \quad \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_r),$$

$$m > 0, \; p \geqslant 0, \; n = m + p, \; r > 0$$

Пусть выбран некоторый класс $K = \{\mathbf{u}(t, \mathbf{x})\}$ управлений $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, непрерывных в области

$$t \geqslant 0, \quad \|\mathbf{y}\| \leqslant H > 0, \quad 0 \leqslant \|\mathbf{z}\| < \infty \tag{1.2}$$

и предположим, что при любом $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \in K$

а) правые части системы (1.1) в области (1.2) непрерывны и удовлетворяют условиям единственности решения;

б) решения системы (1.1) $\mathbf{z}$-продолжимы, т. е. каждое решение $\mathbf{x}(t)$ определено при всех $t \geqslant 0$, для которых $\|\mathbf{y}(t)\| \leqslant H$.

Критерий качества управления примем в виде условия минимума интеграла [1]

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, \mathbf{x}[t], \mathbf{u}[t])\, dt, \quad \omega \geqslant 0 \tag{1.3}$$

среди всех $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \in K$. Задача об оптимальной $\mathbf{y}$-стабилизации [2-4] в классе K заключается в нахождении функции $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\circ}(t, \mathbf{x}) \in K$, обеспечивающей асимптотическую $\mathbf{y}$-устойчивость движения $\mathbf{x} = 0$, причем для любой функции $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}) \in K$, удовлетворяющий этому условию, должно выполняться неравенство

$$\int_{t_0}^{\infty} \omega(t, \mathbf{x}^{\circ}[t], \mathbf{u}^{\circ}[t])\, dt \leqslant \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, \mathbf{x}^*[t], \mathbf{u}^*[t])\, dt$$

при $t_0 \geqslant 0$, $\mathbf{x}^{\circ}[t_0] = \mathbf{x}^*[t_0] = \mathbf{x}_0$, $\|\mathbf{x}_0\| \leqslant \lambda = \text{const}$.

2. Следуя [1], примем обозначение

$$B[V, t, \mathbf{x}, \mathbf{u}] = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \omega(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{2.1}$$

Теорема 1. Предположим, что существуют функция $\mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{x}) \in K$ и функция $V(t, \mathbf{x})$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) при $\mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{x})$ движение $\mathbf{x} = 0$ асимптотически y-устойчиво;

2) $B[V, t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{x})] = 0$;

3) $B[V, t, \mathbf{x}, \mathbf{u}(t, \mathbf{x})] \geqslant 0$ для любого $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \in K$;

4) для любого управления $\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}) \in K$, обеспечивающего асимптотическую y-устойчивость движения $\mathbf{x} = 0$, справедливо неравенство

$$\lim_{t\to\infty} V(t, \mathbf{x}^\circ[t]) \geqslant \lim_{t\to\infty} V(t, \mathbf{x}^*[t]) \tag{2.2}$$

(при этом предполагается, что фигурирующие в (2.2) пределы существуют).

Тогда функция $\mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{x})$ разрешает задачу об оптимальной y-стабилизации в классе K.

Доказательство. В силу условия 2) теоремы справедливо соотношение $dV(t, \mathbf{x}^\circ[t]) / dt = -\omega(t, \mathbf{x}^\circ[t], \mathbf{u}^\circ[t])$, интегрируя которое, получаем

$$V(t_0, \mathbf{x}_0) = \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, \mathbf{x}^\circ[t], \mathbf{u}^\circ[t])\, dt + \lim_{t\to\infty} V(t, \mathbf{x}^\circ[t]) \tag{2.3}$$

Для функции $\mathbf{u}^*(t, x) \in K$, удовлетворяющей условию 4), в силу условия 3) теоремы имеет место неравенство $dV(t, \mathbf{x}^*[t]) / dt \geqslant -\omega(t, \mathbf{x}^*[t])$, интегрируя которое, получаем

$$V(t_0, \mathbf{x}_0) \leqslant \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, \mathbf{x}^*[t], \mathbf{u}^*[t])\, dt + \lim_{t\to\infty} V(t, \mathbf{x}^*[t]) \tag{2.4}$$

Из (2.3) и (2.4) в силу (2.2) следует

$$\int_{t_0}^{\infty} \omega(t, \mathbf{x}^\circ[t], \mathbf{u}^\circ[t])\, dt \leqslant \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, \mathbf{x}^*[t], \mathbf{u}^*[t])\, dt +$$

$$+ \lim_{t\to\infty} V(t, \mathbf{x}^*[t]) - \lim_{t\to\infty} V(t, \mathbf{x}^\circ[t]) \leqslant \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, \mathbf{x}^*[t], \mathbf{u}^*[t])\, dt$$

что и требовалось доказать.

Наибольший интерес для практики представляет случай, когда фигурирующие в (2.2) пределы равны нулю. Именно, из теоремы 1 вытекает

Следствие. Предположим, что существуют функции $\mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{x}) \in K$ и $V(t, \mathbf{x})$, удовлетворяющие условиям 1) — 3) теоремы 1, и для любого управления $\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}) \in K$, обеспечивающего асимптотическую y-устойчивость движения $\mathbf{x} = 0$, выполняется соотношение

$$\lim_{t\to\infty} V(t, \mathbf{x}^\circ[t]) = \lim_{t\to\infty} V(t, \mathbf{x}^*[t]) = 0 \tag{2.5}$$

Тогда функция $\mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{x})$ разрешает задачу об оптимальной y-стабилизации в классе K.

Замечания. 1) Теорема 1 модифицирует результаты [1–3] в двух направлениях. Во-первых, соотношение (2.2) — более общее, чем равенство (2.5), которое гарантировалось теоремами [1–3]. Во-вторых, в теоремах [1–3] асимптотическая устойчивость (по всем или по части переменных) движения $\mathbf{x} = 0$ при $\mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{x})$ устанавливалась с помощью той же функции V, что и условия 2), 3) теоремы 1 и равенство (2.5), в то время как условие 1) теоремы 1 может быть проверено с помощью другой (в том числе и векторной) функции Ляпунова, удовлетворяющей условиям любой теоремы об асимптотической y-устойчивости [4].

2) Если $\lim V(t, \mathbf{x}^\circ[t]) = 0$ при $t \to \infty$, то в силу (2.2) для применимости теоремы 1 необходимо выполнение условия $\lim V(t, \mathbf{x}^*[t]) \leqslant 0$ при $t \to \infty$; в случае неотрицательности функции V последнее неравенство переходит в точное равенство (см. (2.5)).

3. Предположим, что система (1.1) и критерий качества управления (1.3) не зависят от времени и имеют соответственно вид (3.1) и (3.2)

$$\mathbf{x}^\cdot = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{3.1}$$

$$J = \int_0^\infty \omega(\mathbf{x}[t], \mathbf{u}[t])\, dt \tag{3.2}$$

а в класс $K = \{\mathbf{u}(\mathbf{x})\}$ входят не зависящие от t непрерывные функции.

Теорема 2. Предположим, что для любого $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in K$ каждое решение системы (3.1), начинающееся в некоторой окрестности точки $\mathbf{x} = 0$, ограничено, и пусть функции $\mathbf{u}^\circ(\mathbf{x}) \in K$ и $V(\mathbf{x})$ таковы, что:

1) $V(\mathbf{x}) \geqslant a(\|\mathbf{y}\|)$, где $a(r)$ — непрерывная монотонно возрастающая на $[0, H]$ функция, $a(0) = 0$;

2) $B[V, \mathbf{x}, \mathbf{u}^\circ(\mathbf{x})] = 0$, причем

$$V^\cdot|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^\circ(\mathbf{x})} = -\omega(\mathbf{x}, \mathbf{u}^\circ(\mathbf{x})) \begin{cases} = 0 & \text{при} \quad \mathbf{x} \in M \\ < 0 & \text{при} \quad \mathbf{x} \overline{\in} M \end{cases}$$

3) $B[V, \mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})] \geqslant 0$ для любого $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in K$;

4) множество [5] $M_0 = M \cap M_1$, не содержит целых полутраекторий ($t \in [0, \infty)$) системы (3.1) при $\mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ(\mathbf{x})$, где $M_1 = \{\mathbf{x}: V(\mathbf{x}) > 0\}$;

5) для любого управления $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \in K$, обеспечивающего асимптотическую y-устойчивость движения $\mathbf{x} = 0$, выполняется соотношение $\lim V(\mathbf{x}^*[t]) = 0$ при $t \to \infty$.

Тогда функция $\mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ(\mathbf{x})$ разрешает задачу об оптимальной y-стабилизации в классе K.

Доказательство. В силу условий 1), 2) и 4), согласно теореме 4 работы [5], движение $\mathbf{x} = 0$ системы (3.1) при $\mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ(\mathbf{x})$ асимптотически y-устойчиво (и притом равномерно по $\{t_0, \mathbf{x}_0\}$), причем $\lim V(\mathbf{x}^\circ[t]) = 0$ при $t \to \infty$. После этого применимо следствие из теоремы 1, что и завершает доказательство.

Пример. Рассмотрим голономную механическую систему с обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_n$ и не зависящими от времени связями, которая находится под действием потенциальных, гироскопических и некоторых дополнительных сил [8]

$$Q_i = \sum_{j=1}^{r} m_{ij}(\mathbf{q})\, u_j(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot) \tag{3.3}$$

$$u_j = 0 \text{ при } q_1 = \ldots = q_m = q_1^\cdot = \ldots = q_n^\cdot = 0\ (m < n)$$

так что уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i^\cdot} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{n} g_{ij} q_j^\cdot + \sum_{j=1}^{r} m_{ij} u_j \quad (i = 1, \ldots, n;\ g_{ij} = -g_{ji}) \tag{3.4}$$

Взяв в качестве функции Ляпунова полную энергию $H = T + U$ системы, получим [3]

$$H^{\cdot} = \sum_{i=1}^{n} Q_i q_i^{\cdot} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} m_{ij} u_j q_i^{\cdot} \tag{3.5}$$

Предположим, что [5–7]:

1) система (3.4) при $\mathbf{u} = 0$ допускает частное решение $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{\cdot} = 0$ (положение равновесия);

2) потенциальная энергия $U = U(q_1, \ldots, q_n)$ определенно-положительна по отношению к $q_1, \ldots, q_m$ $(m < n)$;

3) из каких-либо механических соображений известно, что координаты $q_{m+1}, \ldots, q_n$ в каждом возмущенном движении ограничены (например, эти координаты угловые $(\mathrm{mod}\ 2\pi)$ [7]);

4) при $\mathbf{u} = 0$ в множестве $U(\mathbf{q}) > 0$ нет положений равновесия системы (3.4).

Следуя [3], поставим задачу нахождения управляющих воздействий $u_j = u_j^{\circ}$, обеспечивающих асимптотическую устойчивость относительно $q_1, \ldots, q_m, q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}$ положения равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{\cdot} = 0$ и минимизирующих функционал

$$J = \int_0^{\infty} \left(F(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) + \sum_{i, j=1}^{r} \beta_{ij} u_i u_j \right) dt \tag{3.6}$$

в котором $F(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})$ — подлежащая определению неотрицательная функция, а квадратичная форма — определенно-положительная функция управляющих воздействий.

В работе [3] на основании условий $B[H, \mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}, \mathbf{u}^{\circ}] = 0$ и $B[H, \mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}, \mathbf{u}] \geqslant 0$ показано, что оптимальные управляющие воздействия u_j° и функция F имеют вид

$$u_j^{\circ} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{r} \frac{\Delta_{kj}}{\Delta} \sum_{i=1}^{n} m_{ik} q_i^{\cdot} \tag{3.7}$$

$$F(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) = \sum_{i, j=1}^{r} \beta_{ij} u_i^{\circ} u_j^{\circ} \tag{3.8}$$

Предположим, что квадратичная форма (3.8) определенно-положительна относительно $q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}$. Учитывая, что [3] $H^{\cdot} = -2F$ при $u_j = u_j^{\circ}$, на основании [5, 6] заключаем, что положение равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{\cdot} = 0$ при $u_j = u_j^{\circ}$ асимптотически устойчиво относительно $q_1, \ldots, q_m, q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}$ (и притом равномерно по $\{t_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_0^{\cdot}\}$), причем $\lim H(q^{\circ}[t], q^{\cdot\circ}[t]) = 0$ при $t \to \infty$.

Пусть теперь u_j^* — какие-либо управляющие воздействия, обеспечивающие асимптотическую устойчивость равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{\cdot} = 0$ относительно $q_1, \ldots, q_m, q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}$. Множество Γ^+ ω-предельных точек любого возмущенного движения $\{\mathbf{q}^*[t], \mathbf{q}^{\cdot *}[t]\}$ непусто в силу условия 3), инвариантно [8] и потому состоит из положений равновесия. Следовательно, согласно 2) и 4) $U = 0$ на множестве Γ^+, откуда вытекает, что $\lim H(\mathbf{q}^*[t], \mathbf{q}^{\cdot *}[t]) = 0$ при $t \to \infty$.

Применяя теорему 2, приходим к следующему выводу: управляющие воздействия (3.7) разрешают задачу об оптимальной $(q_1, \ldots, q_m, q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot})$-стабилизации положения равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{\cdot} = 0$ при критерии качества управления (3.6), (3.8).

4. Теорема 1 перестает быть верной, если условие (2.2) не выполняется, в чем можно убедиться на следующем примере. Рассмотрим автономную систему второго порядка (4.1) при критерии качества (4.2)

$$y^{\cdot} = -y, \quad z^{\cdot} = -zu^2 \tag{4.1}$$

$$J = \int_0^{\infty} (y^2 + z^2u^2)\, dt \tag{4.2}$$

В качестве оптимальной функции Ляпунова рассмотрим определенно-положительную квадратичную форму $V = {}^1/_2(y^2 + z^2)$. Ее производная по времени в силу системы (4.1) $V^{\cdot} = -y^2 - z^2u^2$; следовательно, выражение

$$B[V, y, z, u] \equiv 0 \tag{4.3}$$

Итак, любое управление u удовлетворяет условиям 1) — 3) теоремы 1. Поэтому значение интеграла (4.2) должно было бы быть одним и тем же при всех u. Однако это не так.

При $u = u^{(1)} \equiv y$ решения системы (4.1) имеют вид

$$y^{(1)}[t] = y_0 e^{-t}, \quad z^{(1)}[t] = z_0 \exp\left[-\int_0^t y_0^2 e^{-2\tau} d\tau\right]$$

откуда на основании (4.3) получаем

$$J\,|_{u=u^{(1)}} = \int_0^\infty y^2 (1 + z^2)\, dt = V(y_0, z_0) - \lim_{t\to\infty} V(y^{(1)}[t], z^{(1)}[t]) = \tag{4.4}$$
$$= \frac{1}{2}[y_0^2 + z_0^2 (1 - \exp(-y_0^2))]$$

При $u = u^{(2)} \equiv 0$ решения системы (4.1) имеют вид $y^{(2)}[t] = y_0 e^{-t}$, $z^{(2)}[t] = z_0$, откуда в силу (4.3)

$$J\,|_{u=u^{(2)}} = \int_0^\infty y^2\, dt = V(y_0, z_0) - \lim_{t\to\infty} V(y^{(2)}[t], z^{(2)}[t]) = \frac{1}{2} y_0^2 \tag{4.5}$$

Сопоставляя (4.4) и (4.5), приходим к неравенству

$$J\,|_{u=u^{(1)}} > J\,|_{u=u^{(2)}} \quad \text{при } y_0 \neq 0,\ z_0 \neq 0$$

что и требовалось доказать.

Пользуясь случаем, отметим, что, например, в условиях теоремы В. П. Марачкова [9] функция V не обязана стремиться к нулю вдоль решений. В этом можно убедиться на следующем примере. Для скалярного уравнения $x^\cdot = -x$ определенно-положительная функция $V(t, x) = {}^1/_2 (1 + \exp(2t))\, x^2$, которая не допускает бесконечно малый высший предел, имеет определенно-отрицательную производную $V^\cdot = -x^2$. Вдоль решений имеем

$$\lim_{t\to\infty} V(t, x(t)) = \lim_{t\to\infty} [{}^1/_2 (1 + e^{2t})\, x_0^2 e^{-2t}] = {}^1/_2\, x_0^2 \neq 0 \text{ при } x_0 \neq 0$$

что и требовалось доказать.

Поступила 29 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений. В кн.: Малкин И. Г. «Теория устойчивости движения», доп. 4. М., «Наука», 1966.
2. *Rumyantsev V. V.* On the stability with respect to a part of the variables. Sympos. Math., vol. 6, Meccanica non-lineare e stabilità, 1970, London — New York, Acad. Press, 1971, p. 243—265.
3. *Румянцев В. В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
4. *Озиранер А. С.*, *Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
5. *Озиранер А. С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных. ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.
6. *Озиранер А. С.* Об устойчивости положений равновесия твердого тела с полостью, содержащей жидкость. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
7. *Озиранер А. С.* Об асимптотической устойчивости относительно части переменных. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1972, № 1.
8. *Немыцкий В. В.*, *Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.— Л., Гостехиздат, 1949.
9. *Марачков В. П.* Об одной теореме устойчивости. Изв. физ.-матем. о-ва и н.-и. ин-та матем. и механ. при Казанском ун-те. Сер. 3, 1940, т. 12.