Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В. И. Воротников, В. П. Прокопьев

(Свердловск)

Рассматривается вопрос о сведении задачи об устойчивости движения относительно части переменных для линейных систем с постоянными коэффициентами к задаче об устойчивости движения по всем переменным для некоторой вспомогательной линейной системы, размерность которой может быть меньше размерности исходной системы.

1. Пусть имеем систему линейных дифференциальных уравнений возмущенного движения с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости невозмущенного движения $x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ по отношению к $x_1, \ldots, x_m$ $(m > 0,\ n = m + p,$ $p > 0)$. Обозначим эти переменные через $y_i = x_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, остальные через $z_j = x_{m+j}$ $(j = 1, \ldots, p)$ [1,2]. Теперь уравнения возмущенного движения (1.1) имеют вид

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}y_k + \sum_{l=1}^{p} b_{il}z_l \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.2}$$

$$\frac{dz_j}{dt} = \sum_{k=1}^{m} c_{jk}y_k + \sum_{l=1}^{p} d_{jl}z_l \quad (j = 1, \ldots, p)$$

где a_{ik}, b_{il}, c_{jk}, d_{jl} — постоянные.

Будем преобразовывать систему (1.2) к более удобному для изучения виду. Для этого введем новые переменные

$$\mu_i = \sum_{l=1}^{p} b_{il}z_l \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.3}$$

и будем считать, что первые m_1 переменных $(m_1 \leqslant m)$ $\mu_1, \ldots, \mu_{m_1}$ линейно-независимы.

При таком введении новых переменных возможны два случая.

Первый случай — система (1.2) приводится к виду

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}y_k + \sum_{l=1}^{m_1} \alpha_{il}\mu_l \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.4}$$

$$\frac{d\mu_j}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}^{*}y_k + \sum_{l=1}^{m_1} \alpha_{jl}^{*}\mu_l \quad (j = 1, \ldots, m_1)$$

где в качестве μ_l из переменных (1.3) взяты только линейно-независимые, и поведение переменных y_i, относительно которых рассматриваем устойчивость невозмущенного движения, полностью определяется системой (1.4). В дальнейшем подобную систему будем называть системой μ-вида по отношению к исходной системе (1.2).

Второй случай — система (1.2) не приводится к (1.4) и, следовательно, будет иметь такой вид:

$$
(1.5)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}y_k + \sum_{l=1}^{m_1} \alpha_{il}\mu_l \quad (i = 1, \ldots, m)\\
&\frac{d\mu_j}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}{}^*y_k + \sum_{l=1}^{m_1} \alpha_{jl}{}^*\mu_l + \mu_j^{(1)}, \quad \mu_j^{(1)} = \sum_{s=1}^{p} d_{js}{}^*z_s \ (j = 1, \ldots, m_1)\\
&\frac{dz_r}{dt} = \sum_{k=1}^{m} c_{rk}y_k + \sum_{l=1}^{p} d_{rl}z_l \quad (r = 1, \ldots, p)
\end{aligned}
$$

В этом случае еще раз введем новые переменные $\mu_j{}^{(1)}$ и будем считать, что первые m_2 переменных ($m_2 \leqslant m_1$) $\mu_1{}^{(1)}, \ldots, \mu_{m_2}{}^{(1)}$ линейно-независимы. Тогда исходная система (1.2) может быть сведена к виду (1.4) или (1.5).

Можно показать, что, повторяя эти рассуждения, систему (1.2) всегда можно привести к μ-виду, причем порядок полученной системы не будет превосходить порядок исходной системы (1.2), и собственные числа системы μ-вида будут принадлежать множеству собственных чисел системы (1.2).

Действительно, переход к системе μ-вида эквивалентен введению вместо переменных $x = (y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p)$, где x — n-мерный вектор, новых переменных $u = (y_1, \ldots, y_m, \mu_1, \ldots, \mu_h, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_r)$ $(m + p = n = m + h + r)$, причем исходная система (1.2) принимает такой вид, что первые $m + h$ уравнений не содержат ϑ_i $(i = 1, \ldots, r)$. В частном случае может быть $h = p$, т. е. порядок полученной системы μ-вида равен порядку исходной системы. Так как в качестве μ_i выбираем из выражений (1.3) и подобных им только линейно-независимые, то такой переход к новым переменным всегда возможен. Если представим систему (1.1) в виде $dx/dt = Px$, где P — постоянная матрица, и рассмотрим преобразование к новым переменным $u = Lx$ (L — постоянная невырожденная матрица), то преобразованная система имеет вид $du/dt = Qu$, $Q = LPL^{-1}$. Матрицы P и Q подобны и, следовательно, имеют одинаковые характеристические корни [3], т. е. собственные числа системы μ-вида принадлежат множеству собственных чисел системы (1.2).

Сведение исходной системы к системе μ-вида позволяет вместо задачи об устойчивости движения относительно переменных y_i $(i = 1, \ldots, m)$ для (1.2) рассматривать задачу об устойчивости по всем переменным для системы μ-вида. Очевидно, что переход к системе μ-вида имеет смысл только тогда, когда размерность системы μ-вида меньше размерности исходной системы. Найдем условия, когда это выполняется. Для упрощения записи представим систему (1.2) так:

$$
(1.6)\qquad dy/dt = Ay + Bz, \quad dz/dt = Cy + Dz
$$

где y и z — векторы размерности m и p, A, B, C, D — постоянные матрицы.

Пусть исходная система была приведена к μ-виду после введения β раз новых переменных. Тогда новые переменные $\mu_i, \ldots, \mu_i^{(1)}, \ldots$ — это линейно-независимые столбцы матрицы $K_\beta = (B', D'B', \ldots, D'^{\beta-1}B')$, где B' и D' — транспонированные матрицы B и D.

Лемма 1. Пусть любой столбец матрицы D'^sB' — линейная комбинация столбцов матрицы K_s. Тогда при любом i $(i > s)$ произвольный столбец матрицы D'^iB' — также линейная комбинация столбцов матрицы K_s.

Доказательство. Пусть $b_1, \ldots, b_m$ — столбцы матрицы B', т. е. $B' = (b_1, \ldots, b_m)$. Тогда $D'B' = (D'b_1, \ldots, D'b_m), \ldots, D'^jB' = (D'^jb_1, \ldots, D'^jb_m)$.

Пусть

$$D'^sb_j = \sum_{k=1}^m \lambda_{jk}^{(0)}b_k + \sum_{k=1}^m \lambda_{jk}^{(1)}D'b_k + \ldots + \sum_{k=1}^m \lambda_{jk}^{(s-1)}D'^{s-1}b_k \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{1.7}$$

где $\lambda_{jk}^{(0)}, \lambda_{jk}^{(1)}, \ldots, \lambda_{jk}^{(s-1)}$ — некоторые постоянные. Тогда

$$D'^{s+1}b_j = D'(D'^sb_j) = \sum_{k=1}^m \lambda_{jk}^{(0)}D'b_k + \sum_{k=1}^m \lambda_{jk}^{(1)}D'^2b_k + \ldots + \sum_{k=1}^m \lambda_{jk}^{(s-1)}D'^sb_k \tag{1.8}$$

Учитывая, что для последнего слагаемого выражения (1.8) выполняется равенство (1.7), получаем, что любой столбец матрицы $D'^{s+1}B'$ — линейная комбинация столбцов матрицы K_s.

Лемма 2. Для того чтобы размерность системы μ-вида для (1.2) была равна N, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы K_p был равен $N - m$.

Доказательство. Необходимость. Пусть размерность системы μ-вида равна N. Проводя доказательство от противного, предположим, что $\operatorname{rank} K_p = r \neq N - m$. Допустим $r > N - m$. В этом случае найдется такое число i $(i < p - 1)$, что матрица K_{i+1} содержит $N - m$ линейно-независимых столбцов, и тогда любой столбец матрицы $D'^{i+1}B'$ согласно лемме 1 линейно выражается через столбцы матрицы K_{i+1}, так как размерность системы μ-вида равна N. Но это невозможно, ибо тогда в матрице K_p лишь $N - m$ линейно-независимых столбцов, что противоречит сделанному допущению. Следовательно, $r \leqslant N - m$. Если $r < N - m$, то размерность μ-вида не достигает N, что противоречит условию леммы. Следовательно, $r = N - m$.

Достаточность. Пусть $\operatorname{rank} K_p = N - m$. Согласно [4] $N - m$ линейно-независимых столбцов матрицы K_p лежат среди столбцов матрицы K_{N-m}. Аналогично доказательству необходимых условий леммы можно показать, что размерность системы μ-вида будет равна N.

Следствие. Для того чтобы размерность системы μ-вида для системы (1.2) была меньше размерности системы (1.2), необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rank} K_p < p$.

2. Рассмотрим устойчивость движения относительно части переменных в случае линейных дифференциальных уравнений возмущенного движения с постоянными коэффициентами. Примеры систем, асимптотически устойчивых по одним переменным и неустойчивых по другим, приводились, например, в работе [5]. В основу критерия асимптотической устойчивости системы (1.2) относительно части переменных положим приведение к μ-виду. Поведение переменных $y_1, \ldots, y_m$, относительно которых изу-

чается устойчивость системы, полностью определяется системой μ-вида для (1.2), поэтому справедлива следующая

Теорема. Для асимптотической устойчивости системы (1.2) относительно переменных $y_1, \ldots, y_m$ необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа системы μ-вида имели отрицательные действительные части.

Следствие. Пусть система (1.2) имеет m собственных чисел с отрицательными действительными частями (остальные собственные числа с неотрицательными действительными частями). Для асимптотической устойчивости системы (1.2) относительно переменных $y_1, \ldots, y_m$ необходимо и достаточно, чтобы система имела вид

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}y_k, \quad i = 1, \ldots, m \tag{2.1}$$

$$\frac{dz_j}{dt} = \sum_{k=1}^{m} c_{jk}y_k + \sum_{l=1}^{p} d_{jl}z_l, \; j = 1, \ldots, p, \quad p + m = n$$

и все корни уравнения $| a_{ik} - \delta_{ik}\lambda | = 0$ имели отрицательные действительные части.

Достаточность очевидна. Для доказательства необходимости предположим от противного, что система (1.2) не имеет вида (2.1). Тогда размерность системы μ-вида для (1.2) больше m. Собственные числа системы μ-вида находятся среди множества собственных чисел системы (1.2), поэтому согласно теореме 1 получаем противоречие с асимптотической устойчивостью относительно $y_1, \ldots, y_m$.

Данное следствие было получено ранее другим методом [1].

Пример. Рассмотрим вопрос об асимптотической устойчивости системы

$$x_1^{\cdot} = -x_1 + x_2 - 2x_3, \quad x_2^{\cdot} = 4x_1 + x_2, \quad x_3^{\cdot} = 2x_1 + x_2 - x_3 \tag{2.2}$$

относительно x_1. Для этого приведем систему (2.2) к μ-виду

$$x_1^{\cdot} = -x_1 + \mu, \quad \mu^{\cdot} = -\mu; \quad K_p = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{Vmatrix} \tag{2.3}$$

Собственные числа системы (2.3) имеют отрицательные действительные части, поэтому невозмущенное движение (2.2) асимптотически устойчиво относительно x_1.

Поступила 4 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., астрон., физ., хим., 1957, № 4.
2. *Озиранер А. С., Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
3. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М., Физматгиз, 1959.
4. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
5. *Зубов В. И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л., Судпромгиз, 1959.

[1] *Peiffer K.* La méthode direct de Liapounoff appliquée á l'étude de la stabilité partielle (Dissertation). Université Catholique de Louvain, Faculté des sciences, 1968.