Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТОЧЕК ВЕТВЛЕНИЯ РАВНОВЕСИЙ

В. И. Возлинский

(Москва)

Рассматривается вопрос об устойчивости точек ветвления равновесий конечномерных консервативных систем, потенциальная энергия которых зависит от вещественного параметра.

Исследование устойчивости точек ветвления связано со сложностями, вызванными вырожденностью в этих точках второго дифференциала потенциальной энергии. В работе показано, что в наиболее распространенных случаях ветвления устойчивость или неустойчивость точки ветвления может быть выяснена по характеру кривой равновесий в окрестности этой точки. Доказательства основаны на геометрических соображениях, не зависящих от ранга гессиана потенциальной энергии, поэтому они остаются в силе для систем, не удовлетворяющих условиям Пуанкаре [1] (см. ниже замечание 3.1; при выполнении этих условий задача сводится к системе с одной степенью свободы, в этом случае основные результаты данной работы могут быть легко получены методами теории бифуркации равновесий Пуанкаре — Четаева [1, 2]). Рассматривается обобщение на случай нескольких параметров.

Полученные результаты с помощью метода В. В. Румянцева [3] могут быть перенесены на задачи устойчивости стационарных движений.

Исследование устойчивости точек ветвления представляет интерес для получения полной картины распределения устойчивых точек на ветвях кривой равновесий, а также в связи с вопросом «безопасности» ветвления [4, 5] (см. замечание 3.2).

1. Обозначим $X \ni x$ n-мерное конфигурационное пространство; $A \ni \alpha$ — интервал числовой оси; $O(x)$, $O(\alpha)$, $O(x, \alpha)$ — окрестности точек соответственно в X, A, XA; $\Pi(x, \alpha)$ — потенциальная энергия.

Будем говорить, что на X задано свойство, зависящее от параметра $\alpha \in A$, если задано свойство $\beta(x, \alpha)$ на XA, т. е. задано множество $B \subset XA$ (определяющее множество), в точках которого свойство выполняется ($\beta(x, \alpha) = 1$), а вне которого оно не выполняется ($\beta(x, \alpha) = 0$).

Множество $B \subset XA$ назовем открытым по α в точке $(x^\circ, \alpha^\circ) \in B$, если при любом $\varepsilon > 0$ точка $\alpha^\circ \in A$ — внутренняя точка проекции на A множества $B \cap O^\varepsilon(x^\circ, \alpha^\circ)$ (т. е. для каждого α из достаточно малой окрестности $O(\alpha^\circ)$ существует точка x, такая, что $(x, \alpha) \in B \cap O^\varepsilon(x^\circ, \alpha^\circ)$). Множество B назовем открытым по α (открытым по α в области $D \subset XA$), если оно открыто во всех своих точках (в точках из D). Множество B назовем открытым по α относительно множества $M \subset XA$, если открыто по α множество $B \cap M$.

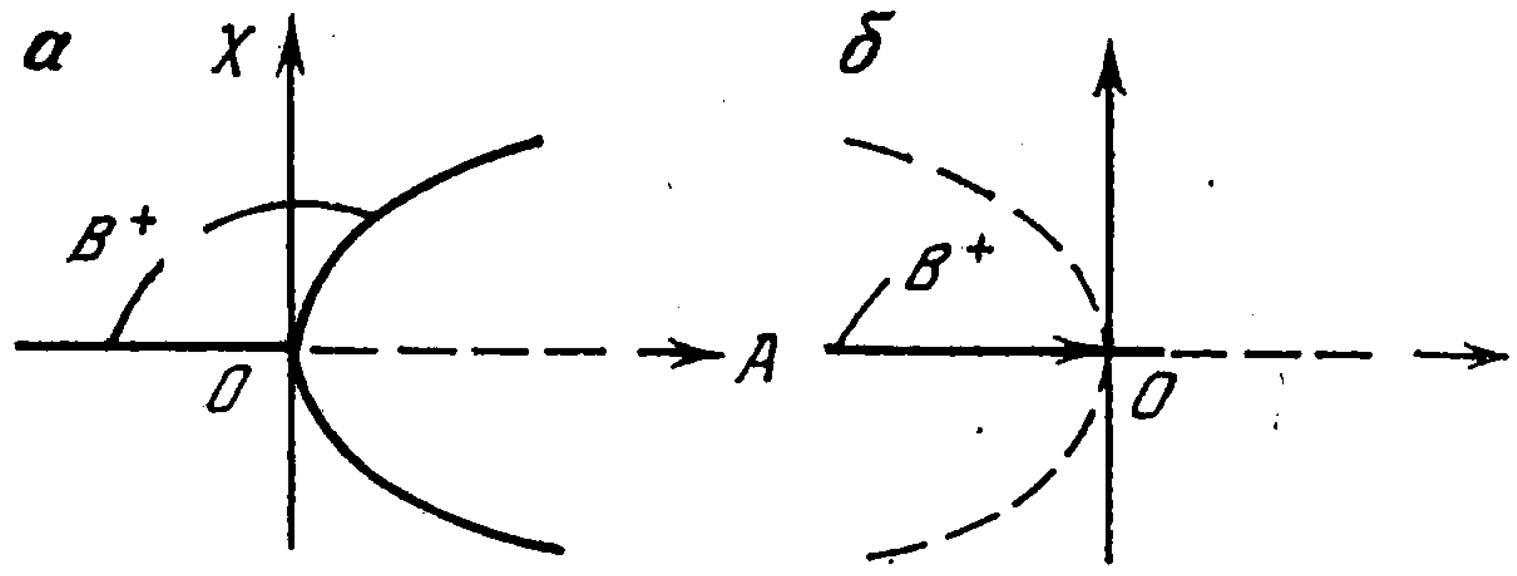
В качестве примера рассмотрим две системы, определенные потенциальной энергией соответственно, $\Pi(x, \alpha) = x^4 - \alpha x^2$ и $\Pi(x, \alpha) = -x^4 - \alpha x^2$ (одномерный случай). На фиг. 1 показаны кривые равновесий этих систем. Сплошные линии соответствуют устойчивым равновесиям (множество B^+), штриховые — неустойчивым. Множество B^+ в обоих случаях открытое по α, в том числе в точке $(0, 0)$ на фиг. 1, *а*, хотя в этой точке первая система не грубая [6]. В то же время множество B^+ (фиг. 1, *а*) не открытое по α относительно прямой $x = 0$. Это близко (но неэквивалентно) понятию негрубости свойства в смысле работы [7] по отношению к возмущению параметра α. Таким образом, в рассмотренных примерах свойству устойчивости соответствуют открытые по α множества. Ниже будет показано, что при некоторых ограничениях этот вывод является общим.

Аналогично понятию точки ветвления равновесий будем говорить, что точка (x°, α°) — точка ветвления свойства $\beta(x, \alpha)$, если эта точка — точка ветвления решений уравнения $\beta(x, \alpha) = 1$, т. е.

$$(1.1)\qquad (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x_1,\ x_2,\ \alpha')\ (x_1, \alpha'),\ (x_2, \alpha') \in B \cap O^\varepsilon(x^\circ, \alpha^\circ)$$

Если (1.1) выполняется при $\alpha' = \alpha^\circ$, ветвление назовем тривиальным.

Если в точке (x°, α°) ветвление нетривиальное и существует окрестность $O(x^\circ, \alpha^\circ)$, в которой множество B пусто при $\alpha < \alpha^\circ$ или при $\alpha > \alpha^\circ$, то эта точка называется предельной по Пуанкаре точкой ветвления. Очевидно, множество B не открыто по α в предельной точке.



Фиг. 1

Будем говорить, что к точке (x°, α°) примыкает слева одиночная полуветвь множества B (см. фиг. 1, *а*), если множество B не пусто при $\alpha < \alpha^\circ$ в любой окрестности этой точки и существует окрестность $O(x^\circ, \alpha^\circ)$, в которой для каждого $\alpha < \alpha^\circ$ решение уравнения $\beta(x, \alpha) = 1$ единственно (т. е. при $\alpha < \alpha^\circ$ условие (1.1) не выполняется, а множество B не пусто). Аналогично вводится понятие правой одиночной полуветви (см. фиг. 1, *б*).

Точку (x°, α°) будем называть равновесной или стационарной (по x), если x° — положение равновесия при $\alpha = \alpha^\circ$. Свойство стационарности по x будем обозначать $\Pi'(x, \alpha) = 0$; определяющее множество $B \subset XA$ в этом случае — кривая равновесий. Под изолированностью равновесной точки (x°, α°) понимается существование окрестности ее, в которой нет при фиксированном $\alpha = \alpha^\circ$ других равновесных точек.

Свойство положительной определенности по x приращения потенциальной энергии (т. е. свойство строгого минимума по x функции $\Pi(x, \alpha)$) будем обозначать $\Delta\Pi(x, \alpha) > 0$.

В дальнейшем предполагается непрерывность потенциальной энергии по (x, α). Кроме того, в ряде утверждений будет предполагаться непрерывность по (x, α) градиента по x потенциальной энергии.

2. *Лемма 2.1.* Пусть (x°, α°) — точка ветвления равновесий, к которой примыкает одиночная полуветвь C кривой равновесий B; в окрестности рассматриваемой точки $\mathrm{grad}_x \Pi(x, \alpha)$ непрерывен по (x, α); на C вне точки (x°, α°) выполняется свойство $\Delta\Pi > 0$, а в самой точке (x°, α°) это свой-

ство нарушается. Тогда при $\alpha = \alpha^\circ$ существует связное множество положений равновесия, содержащее точку x° и не совпадающее с ней (т. е. положение равновесия x° не изолировано при $\alpha = \alpha^\circ$ и при этом нет дискретного накопления положений равновесия).

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что точкой ветвления является нуль $(\theta, 0)$ пространства XA, одиночной полуветвью C — полуветвь $x = \theta$, $\alpha < 0$ и что $\Pi(\theta, \alpha) \equiv 0$.

Рассмотрим последовательность $\{\alpha_i\}$, $\alpha_i \to 0$, $\alpha_i < 0$. По определению одиночной полуветви существует не зависящая от α окрестность $D = O(\theta)$, в которой нет при $\alpha < 0$ равновесий, отличных от θ. Обозначим $E(\lambda, \alpha_i)$ множество уровня в X потенциальной энергии при $\alpha = \alpha_i$: $\Pi(x, \alpha_i) = \lambda$, а $K(\lambda, \alpha_i)$ — компоненту этого множества. В силу свойства $\Delta\Pi(\theta, \alpha_i) > 0$ при каждом α_i из рассмотренной последовательности в D существует область Ω_i, в которой все компоненты уровня функции $\Pi(x, \alpha_i)$ гомеоморфны гиперсферам и из $\lambda_1 < \lambda_2$ вытекает $\theta \in \omega_1 \subset \omega_2$, где ω_s — область, ограниченная компонентой $K(\lambda_s, \alpha_i)$. Область Ω_i (имеется в виду максимальная в D область с этими свойствами) назовем областью регулярности функции $\Pi(x, \alpha_i)$. Объемы областей Ω_i могут стремиться к нулю при $\alpha_i \to 0$, однако все эти области неограничены в D в силу отсутствия в D ненулевых стационарных точек. Поэтому верхний топологический предел $\Omega^* = \mathrm{lt}^*\,\Omega_i$ последовательности $\{\Omega_i\}$ содержит хотя бы одну точку на границе области D и, очевидно, точку θ. Так как нижний топологический предел той же последовательности не пуст (ему принадлежит точка θ), то по теореме Цоретти (см. [8], стр. 178) верхний топологический предел Ω^* связен. При этом, в силу сказанного выше, он не вырождается в точку θ.

Покажем, что существует не вырожденное в точку θ связное множество $\Omega^\circ \subset \Omega^*$ $(\theta \in \Omega^\circ)$ нулей функции $\Pi(x, 0)$.

Так как в точке $(\theta, 0)$ нарушается свойство $\Delta\Pi > 0$, то выполняется одно из следующих условий.

1°. В каждой окрестности $O(\theta)$ существуют точки x': $\Pi(x', 0) < 0$.

2°. Существует окрестность $O(\theta)$, в которой $\Pi(x, 0) \geqslant 0$ и при этом в любой окрестности $O(\theta)$ существуют точки x°: $\Pi(x^\circ, 0) = 0$.

Условие 1° влечет ветвление слева свойства $\Pi = 0$. В этом случае $\Omega^\circ = \Omega^*$, доказательство такое же, как в [9]. То же относится к случаю 2°, если при этом так же, как в первом случае, имеет место ветвление слева свойства $\Pi = 0$.

Докажем теперь существование множества Ω° в случае 2° при условии, что левого ветвления свойства $\Pi = 0$ нет. При этом условии существует окрестность точки θ, в которой $\Pi(x, \alpha_i) > 0$ при $\alpha_i < 0$, $x \neq \theta$. Можно считать, что эта окрестность совпадает с D.

Рассмотрим в D последовательность $\{x_j\}$, $x_j \to \theta$, $\Pi(x_j, 0) = 0$. Имеем $\Pi(x_j, \alpha_i) = \lambda_{ji} > 0$. Пусть $K_{ji} = K(\lambda_{ji}, \alpha_i)$ — компонента, содержащая точку x_j. Из определения области регулярности Ω_i следует, что либо $K_{ji} \subset \Omega_i$, либо $K_{ji} \cap \Omega_i = \varnothing$. Если существует j, такое, что реализуется первая возможность для бесконечного числа i, то получаем i-последовательность областей $\omega_{ji} \subset \Omega_i$, ограниченных компонентами K_{ji}. За множество Ω° можно принять верхний топологический предел этой последовательности, так как $x_j \in \Omega^\circ$ $(x_j \neq \theta)$, а $\Pi(x_j, \alpha_i) \to 0$ при $\alpha_i \to 0$ (точка x_j фиксирована). Если такого j нет, то существует последовательность $\{j\}$, для каждого j из которой почти вся i-последовательность $\{K_{ji}\}$ не пересекается с Ω_i. Следовательно, границы $\Gamma(\Omega_i)$ этих областей разделяют [10] точки x_j и θ. Обозначим (для некоторого $j \in \{j\}$)

$$\Omega^j = \mathop{\mathrm{lt}^*}_{i\to\infty} \Omega_i, \quad S_j = \lim_{i\to\infty} \sup_{x \in l_j} \Pi(x, \alpha_i)$$

где l_j — отрезок (θ, x_j). Очевидно, Ω^j пересекается с $\Gamma(D)$; $S_j \geqslant 0$. Так как величина $\mathrm{grad}_x \Pi(x, \alpha)$ ограничена в окрестности $O(\theta, 0)$, то существует не зависящее от j число g: $S_j \leqslant g \, \| x_j \|$. Отсюда $\lim S_j = 0$ при $x_j \to \theta$, а так как точки x_j и θ разделены множеством Ω^j, то $\sup \Pi(x, 0) \leqslant S_j$, $x \in \Omega^j$. Следовательно, можно положить $\Omega^\circ = \mathrm{lt}^* \, \Omega^j$, $j \to \infty$.

Итак, показано, что во всех рассмотренных случаях существует последовательность $\{\Omega_i\}$, верхний топологический предел которой может быть принят за искомое множество Ω°, так как он связан и принадлежит компоненте $K(0, 0)$. Покажем теперь, что Ω° состоит из стационарных точек функции $\Pi(x, 0)$ и тем самым докажем лемму. Допустим противное: существует нестационарная точка $x' \in \Omega^\circ$. Тогда в силу непрерывности $\mathrm{grad}_x \Pi(x, \alpha)$ при каждом достаточно малом $|\alpha_i|$ существует градиентная трубка $G_i \subset X$ функции $\Pi(x, \alpha_i)$, содержащая точку x', все градиентные линии которой пересекаются с областью отрицательности функции $\Pi(x, \alpha_i)$. В то же время существует последовательность $\{\alpha_i\}$, $\alpha_i \to 0$, для которой пересечение $G_i \cap \Omega_i$ не пусто (так как $x' \subset \Omega^\circ$). Но всякая градиентная линия, пересекающаяся с областью регулярности Ω_i, не может пересечься с областью отрицательности функции $\Pi(x, \alpha_i)$ (можно считать, что эта функция не имеет стационарных точек в рассматриваемом куске градиентной трубки). Получили противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2.2. Если в изолированной равновесной точке выполнено условие $\Delta\Pi > 0$ и в окрестности этой точки функция $\Pi(x, \alpha)$ непрерывна, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для каждого $\alpha \in O^\delta(0)$ в $O^\varepsilon(\theta)$ существует компонента уровня функции $\Pi(x, \alpha)$, гомеоморфная гиперсфере, окружающей точку θ.

Доказательство. Идея доказательства, по существу, содержится в работе [11]. Пусть Ω — область регулярности функции $\Pi(x, 0)$ в окрестности $O^\varepsilon(\theta)$. Зафиксируем три компоненты уровня из этой области: $K_1 = K(\lambda_1, 0)$, $K_2 = K(\lambda_2, 0)$, $* = K(\lambda^*, 0)$, $\lambda_1 < \lambda^* < \lambda_2$. Обозначим

$$S_1(\alpha) = \sup \Pi(x, \alpha), \quad x \in K_1; \quad S_2(\alpha) = \inf \Pi(x, \alpha), \quad x \in K_2$$

Так как в области ω, ограниченной компонентами K_1, K_2, нет стационарных точек функции $\Pi(x, 0)$, то можно подобрать столь малое δ, что при $\alpha \in O^\delta(0)$ область ω не содержит стационарных точек функции $\Pi(x, \alpha)$; $S_1(\alpha) < S_2(\alpha)$; в ω существует x^*: $S_1(\alpha) < \Pi(x^*, \alpha) < S_2(\alpha)$. Следовательно, компонента K_α функции $\Pi(x, \alpha)$, проходящая через точку x^*, ограничена в ω, а так как в ω нет стационарных точек, то она разделяющая в ω и, следовательно, гомеоморфна гиперсфере [10].

Следствие. Если $\Delta\Pi(x^\circ, \alpha^\circ) > 0$, то множество $\Pi' = 0$ открыто по α в точке (x°, α°). Если, кроме того, в окрестности $O(x^\circ, \alpha^\circ)$ нет тривиального ветвления равновесий, то множество $\Delta\Pi > 0$ также открыто по α в точке (x°, α°).

Действительно, в области, ограниченной компонентой, фигурирующей в лемме 2.2, существует хотя бы одна стационарная точка потенциальной энергии, откуда следует открытость по α множества $\Pi' = 0$. Если в рассматриваемой окрестности нет тривиального ветвления равновесий, то стационарные точки изолированы и, в силу ограниченности снизу функции $\Pi(x, \alpha)$ в $O(x^\circ, \alpha^\circ)$, хотя бы одна из них является точкой строгого минимума по x функции $\Pi(x, \alpha)$. Отсюда следует открытость множества $\Delta\Pi > 0$.

3. Предположим, что при фиксированных α потенциальная энергия удовлетворяет, дополнительно к условию непрерывности, тем условиям, при которых для изолированных положений равновесия справедливо обращение теоремы Лагранжа. Таким образом, будем предполагать, что выполнены условия, при которых справедливо следующее утверждение [12]: если в изолированном положении равновесия потенциальная энергия не

имеет минимума, то это положение равновесия неустойчиво (утверждение A).

Очевидно, в изолированном положении равновесия всякий минимум потенциальной энергии является строгим и изолированным (под изолированностью минимума понимается существование окрестности, в которой нет других минимумов).

Различные случаи, в которых обращение теоремы Лагранжа справедливо, рассматривались в работах [12–14].

Условие изолированности положения равновесия, фигурирующее в утверждении A, было принято Четаевым [12] для того, в частности, чтобы исключить случаи типа примера Пенлеве (см., например, [14]). Все известные автору примеры несправедливости обращения теоремы Лагранжа относятся к неизолированному положению равновесия.

Замечание 3.1. Утверждение A заведомо справедливо при следующих ограничениях, которые накладывает на потенциальную энергию Пуанкаре [1].

1°. В точке ветвления $\operatorname{rank}\,[\Pi_{ij}(x^\circ,\ \alpha^\circ)] = n-1$ ($[\Pi_{ij}]$ — матрица вторых производных потенциальной энергии по координатам), причем один из главных миноров порядка $n-1$ положителен.

2°. Вне точек ветвления на кривой равновесий $\det\,[\Pi_{ij}] \neq 0$.

При этих условиях задача сводится к системе с одной степенью свободы.

При сделанном в начале п. 3 предположении из лемм 2.1, 2.2 вытекает ряд утверждений.

Теорема 3.1. В области $D \subset XA$, в которой нет тривиального ветвления равновесий, множество устойчивых равновесных точек открыто по α.

Эта теорема с учетом утверждения A эквивалентна второй части следствия из леммы 2.2. Выше был рассмотрен пример (п. 1, фиг. 1), иллюстрирующий эту теорему.

Теорема 3.2. Всякая предельная точка ветвления неустойчива.

Действительно, в предельной точке множество $\Pi' = 0$ не открыто по α. Это противоречит следствию из леммы 2.2, если предположить, что предельная точка устойчива, и учесть, что она является изолированной равновесной точкой.

Теорема 3.3. Пусть в окрестности точки нетривиального ветвления $\operatorname{grad}_x \Pi\,(x,\ \alpha)$ непрерывен по $(x,\ \alpha)$ и к этой точке примыкает одиночная полуветвь кривой равновесий. Тогда характер устойчивости точки ветвления такой же, как на одиночной полуветви.

Действительно, пусть $(\theta,\ 0)$ — точка ветвления и к ней слева примыкает одиночная полуветвь. Из теоремы 3.1 вытекает, что если точка $(\theta,\ 0)$ устойчива, то при всех достаточно малых $|\alpha|$, $\alpha < 0$ в окрестности $O\,(\theta,\ 0)$ должны существовать устойчивые равновесные точки. Поэтому если рассматриваемая одиночная полуветвь неустойчива, то и точка $(\theta,\ 0)$ неустойчива. Если же эта ветвь устойчива, то устойчивость точки $(\theta,\ 0)$ следует из леммы 2.1.

Замечание 3.2. Из леммы 2.2 вытекает следующее утверждение, по существу доказанное в [11] (там рассматривается частный случай механической системы, но доказательства носят общий характер): всякая устойчивая равновесная точка является устойчивой при начальном возмущении параметра α. Под устойчивостью равновесия $x = \theta$ при начальном возмущении параметра α понимается выполнение следующего условия: для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что всякая траектория $x\,(x^\circ,\ \alpha^\circ,\ t)$, $x^\circ \in O^\delta\,(\theta)$, $\alpha^\circ \in O^\delta\,(0)$ не выходит из $O^\varepsilon\,(\theta)$ (X — фазовое пространство).

В этом смысле можно сказать, что если точка (x°, α°) является точкой смены устойчивости на некоторой ветви кривой равновесий и при этом устойчива, то ветвление в ней менее опасно, чем если бы она была неустойчива [4, 5].

Замечание 3.3. Если устойчивость понимать в приведенном выше смысле, то теорему 3.2 можно распространить на простейший случай неконсервативной системы — двумерную динамическую автономную систему, зависящую от параметра

$$x^{\cdot} = f(x, \alpha), \quad x = (x^1, x^2) \tag{3.1}$$

где функция $f(x, \alpha)$ непрерывно дифференцируема по x и непрерывна по α.

Теорема 3.4. Если $(\theta, 0)$ — предельная равновесная точка системы (3.1), то она неустойчива при начальном возмущении параметра α.

Действительно, допустим противное: предельная равновесная точка $(\theta, 0)$ устойчива в приведенном выше смысле. Тогда при достаточно малом $\delta > 0$ движение $x = x(x^\circ, \alpha^\circ, t)$, $x^\circ \in O^\delta(\theta)$, $\alpha^\circ \in O^\delta(0)$ ограничено в окрестности $O(\theta)$. Следовательно, в $O(\theta)$ существует при $\alpha = \alpha^\circ$ предельный цикл и в ограниченной им области хотя бы одна равновесная точка, что противоречит тому, что $(\theta, 0)$ — предельная точка.

4. Рассмотрим случай m параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

Под α будем понимать вектор соответствующего m-мерного пространства A. Тогда введенные в п. 1 определения открытого по α множества В, точки ветвления свойства $\beta(x, \alpha)$ и тривиального ветвления переносятся на рассматриваемый случай без изменений. Понятие предельной точки ветвления обобщим следующим образом. Точку ветвления (x°, α°) свойства $\beta(x, \alpha)$ назовем предельной, если определяющее множество В этого свойства не открыто по α в рассматриваемой точке (именно неоткрытость множества $\Pi' = 0$ в предельной точке была существенна для доказательства теорем 3.2, 3.4).

Пусть, например, множество В определено уравнением $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - x^2 = 1$ (однополостный гиперболоид в пространстве (α_1, α_2, x), здесь $m = 2$, $n = 1$). Множество открыто по α во всех своих точках, кроме точек окружности $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$, $x = 0$. Все точки этой окружности — предельные точки ветвления.

Очевидно, если существует хотя бы одно цилиндрическое сечение [15] множества B, на котором точка (x°, α°) — предельная в смысле п. 1, то она будет предельной и в новом смысле.

Под цилиндрическим сечением понимается сечение, заданное равенством $\alpha = \alpha(s)$ $(\alpha^\circ = \alpha(s^\circ))$, где $s \in S$ — вещественный параметр. Предполагается, что это равенство определяет простой кусок кривой в пространстве А («направляющая» сечения). Цилиндрическому сечению $L \subset B \subset XA$ соответствует множество $L^* \subset XS$, определенное равенством $\beta(x, \alpha(s)) = 1$. Если роль параметра s играет один из параметров α_i (как в работе [15]), то L^* — проекция L на подпространство (x, α_i).

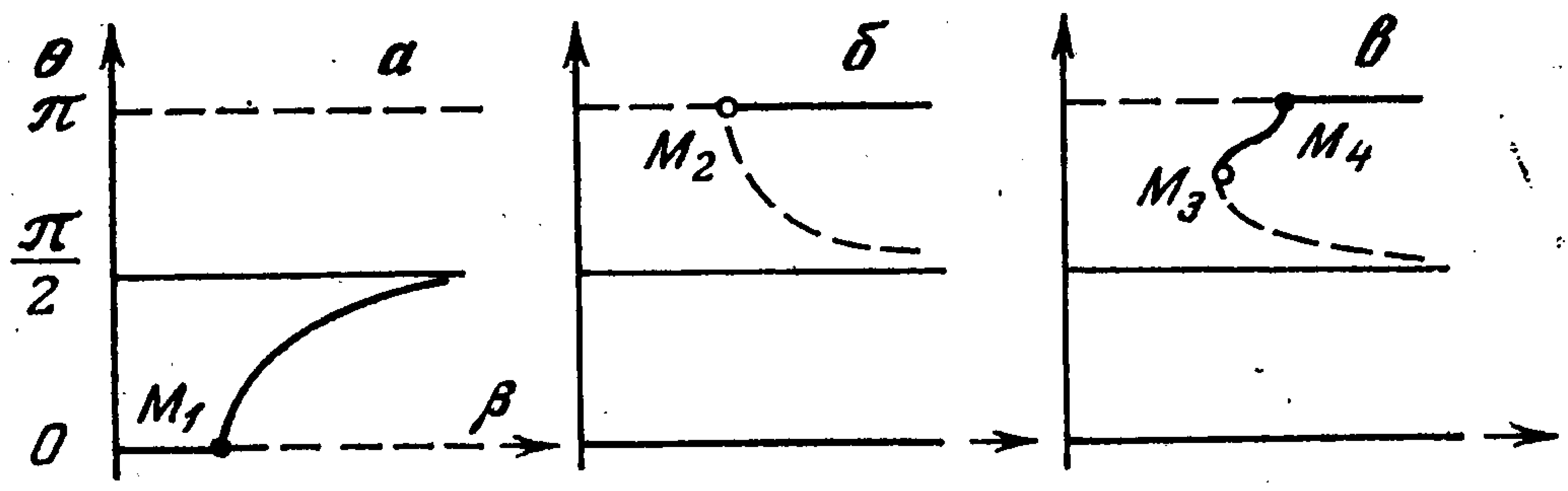
Будем говорить, что цилиндрическое сечение L содержит одиночную полуветвь, примыкающую к точке (x°, α°), если к точке $(x^\circ, s^\circ) \in XS$ примыкает одиночная полуветвь множества L^* в смысле п. 1. Тогда на сечение L переносится лемма 2.1 (с заменой слов «кривая равновесий В» на «сечение L поверхности равновесий В»). Отсюда вытекает следующая теорема (аналог теоремы 3.3).

Теорема 4.1. Пусть в окрестности точки нетривиального ветвления $\mathrm{grad}_x \Pi(x, \alpha)$ непрерывен по (x, α) и существует хотя бы одно цилиндрическое сечение поверхности равновесий, содержащее одиночную полуветвь, примыкающую к рассматриваемой точке. Тогда характер устойчивости точки ветвления такой же, как на одиночной полуветви (независимо от вида других сечений).

Лемма 2.2 и теоремы 3.1, 3.2, 3.4 переносятся на случай m параметров без изменений. Доказательства, по существу, не отличаются от соответствующих доказательств п. 2, 3.

5. *Пример 1.* Рассмотрим пример из работы [3]: маятник с горизонтальной осью, вращающейся вокруг вертикали. На фиг. 2 показаны кривые стационарных движений, полученные в [3] для случаев $0 < \alpha < 1$ (*а*), $-1/3 < \alpha < 0$ (*б*), $\alpha < -1/3$ (*в*).

Здесь $\beta \geqslant 0$ — величина, пропорциональная квадрату обобщенного импульса, соответствующего скорости вращения оси маятника, θ — позиционная координата —



Фиг. 2

угол отклонения оси маятника от вертикали, $\alpha = (B - C)/B$ (A, B, C — экваториальные и аксиальный моменты инерции относительно главных осей с началом в точке подвеса маятника, $A = B$).

Координаты $[\beta, \theta]$ точек ветвления

$$M_1\left[\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}, 0\right] \quad (0<\alpha<1), \quad M_2\left[-\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}, \pi\right]\left(-\frac{1}{3}<\alpha<0\right)$$

$$M_3\left[\frac{16}{9}\sqrt{-\frac{3}{\alpha}}, \quad \arccos\left(-\sqrt{-\frac{1}{3\alpha}}\right)\right] \quad \left(\alpha<-\frac{1}{3}\right)$$

$$M_4\left[-\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}, \pi\right] \quad \left(\alpha<-\frac{1}{3}\right)$$

Сплошными линиями на фиг. 2 показаны устойчивые промежутки кривой равновесий, штриховыми — неустойчивые. Характер устойчивости некритических точек был получен в [3] на основе исследования знака коэффициента устойчивости Пуанкаре приведенной системы. В точках ветвления M_1 — M_4 коэффициент устойчивости равен нулю, поэтому определение характера устойчивости этих точек требует дополнительного исследования. Из теорем п. 3 имеем: точки M_1, M_4 устойчивы, так как и к той и к другой примыкает одиночная устойчивая полуветвь (соответственно слева и справа); точка M_3 неустойчива, так как это предельная точка; точка M_2 также неустойчива, так как к ней примыкает (слева) одиночная неустойчивая полуветвь.

Эти результаты могут быть проверены непосредственным исследованием высших производных по θ потенциала Рауса в соответствующих точках.

Используя выражение [3] потенциала Рауса W, можно показать, что $W'''(M_3) > 0$ (штрихи означают дифференцирование по θ). Отсюда следует неустойчивость точки M_3. В точках M_1, M_2, M_4 $W''' = 0$. При этом

$$W''''(M_1) = -1 + \frac{4(1+2\alpha)}{1-\alpha}, \quad W''''(M_2) = W''''(M_4) = 1 - \frac{4(1+2\alpha)}{1-\alpha}$$

Первое выражение положительно при $0 < \alpha < 1$, откуда следует устойчивость точки M_1. Второе выражение при $-1/_3 < \alpha < 0$ отрицательно, а при $\alpha < -1/_3$ положительно. Отсюда следует неустойчивость точки M_2 и устойчивость точки M_4.

Заметим, что на вертикальной прямой, проходящей через M_3 (фиг. 2, *в*), не выполняется закон смены устойчивости [1, 2] (но он, конечно, выполняется на прямых, не проходящих через точки ветвления).

Пример 2. Для иллюстрации случая нескольких параметров (п. 4) рассмотрим задачу об устойчивости вырожденного перманентного вращения тяжелого симметричного твердого тела с неподвижной точкой, центр тяжести которого расположен выше точки подвеса. За обобщенные координаты примем углы Эйлера θ, ψ, φ, а за параметры поверхности стационарных движений — обобщенные импульсы β_2, β_3 циклических координат ψ, φ [3, 16]. В обозначениях [16] эта поверхность в пространстве (θ, β_2, β_3) имеет вид [16]

$$\frac{(\beta_3 - \beta_2 \cos\theta)(\beta_2 - \beta_3 \cos\theta)}{A \sin^3\theta} - Mgz_0 \sin\theta = 0 \tag{5.1}$$

Перманентные вращения лежат на прямой $\beta_2 = \beta_3 = \beta$, $\theta = 0$. Вырожденное перманентное вращение

$$\beta^2 = 4AMgz_0, \quad \theta = 0 \tag{5.2}$$

(на котором вырожден второй дифференциал потенциала Рауса) расположено на границе области устойчивости $\beta^2 - 4AMgz_0 > 0$ этой прямой [16]. Известно [17], что оно устойчиво.

Докажем устойчивость этого движения без исследования высших дифференциалов потенциала Рауса. Для применимости теоремы 4.1 нужно, чтобы хотя бы одно цилиндрическое сечение поверхности (5.1) содержало одиночную полуветвь, примыкающую к точке (5.2). Рассмотрим цилиндрическое сечение плоскостью $\beta_2 = \beta_3 = \beta$. На нем выражение (5.1) приводится к виду

$$\left(\beta^2 - 4AMgz_0 \cos^4 \frac{\theta}{2}\right) \sin \frac{\theta}{2} = 0 \tag{5.3}$$

Точка (5.2) — точка ветвления на этом сечении. Из (5.3) видно, что при $\beta^2 - 4AMgz_0 > 0$ существует единственная ветвь $\theta = 0$. Поскольку она устойчива, то на основании теоремы 4.1 устойчивой будет и точка (5.2), что и требовалось показать.

Заметим, что устойчивость невырожденных перманентных вращений при $\beta^2 - 4AMgz_0 > 0$ и устойчивость регулярных прецессий тоже может быть установлена по виду поверхности стационарных движений с помощью теории бифуркации равновесий Пуанкаре — Четаева [1,2] и результатов работы [3]. Действительно, из физических соображений очевидна неустойчивость точки $\theta = \beta_2 = \beta_3 = 0$, следовательно, на тривиальной ветви $\theta = 0$ сечения (5.3) левее точки ветвления (5.2) будет неустойчивая область, а правее — устойчивая. Нетривиальные ветви сечения направлены влево от этой точки, так что, по закону смены устойчивости [1–3], они устойчивы (ср. с фиг. 1, *б*). Отсюда следует устойчивость нетривиальных ветвей поверхности (5.1), так как на них нет точек ветвления.

Автор благодарит В. В. Румянцева за внимание к работе и ценные замечания, В. Н. Рубановского и А. В. Карапетяна — за обсуждение ряда затронутых в статье вопросов.

Поступила 31 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Poincaré H.* Sur l'équlibre d'une masse fluide animeé d'un mouvement de rotation. Acta math., 1885, T. 7, p. 259—380.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Изд. 3. М., «Наука», 1965.
3. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.

4. *Баутин Н. Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. Л.— М., Гостехиздат, 1949.
5. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
6. *Андронов А. А.*, *Понтрягин Л. С.* Грубые системы. Докл. АН СССР, 1937, т. 14, № 5.
7. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
8. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.—Л., ОНТИ, 1937.
9. *Возлинский В. И.* О связи бифуркации равновесий консервативных систем с распределением устойчивости на кривой равновесий. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
10. *Кронрод А. С.* О функциях двух переменных. Успехи матем. наук, 1950, т. 5, вып. 1.
11. *Volterra V.* Sur la théorie des variations des latitudes. Acta math., 1899, T. 22, p. 201—358.
12. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М., Изд-во АН СССР, 1962.
13. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
14. *Hagedorn P.* Die Umkehrung der Stabilitätssätze von Lagrange — Dirichlet und Routh. Arch. Rational Mech. and Analysis, 1971, vol. 42, No. 4. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1972, № 5.)
15. *Возлинский В. И.* О бифуркации стационарных движений консервативных систем с двумя циклическими координатами. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
16. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М., ВЦ АН СССР, 1967.
17. *Иртегов В. Д.* Об устойчивости вырожденных перманентных вращений твердого тела. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1975, вып. 169.