Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 531.38

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, БЛИЗКОГО К ГИРОСКОПУ ЛАГРАНЖА

В. С. Елфимов

(Донецк)

Рассматривается задача о существовании периодических решений уравнений движения твердого тела с неподвижной точкой, близкого к гироскопу Лагранжа. Центр тяжести смещен с оси симметрии на малую величину, которая выбрана в качестве малого параметра. Выделены случаи существования периодических решений, соответствующих равномерным вращениям вокруг оси симметрии в решении Лагранжа, представимых в виде рядов по целым или дробным степеням малого параметра.

1. В обычных обозначениях уравнения Эйлера — Пуассона движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки в случае Лагранжа ($A = B$, C — главные моменты инерции, $x_0 = y_0 = 0$, z_0 — координаты центра тяжести, p, q, r — компоненты угловой скорости, γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы вертикали в системе координат, связанной с телом, M — масса тела, t — время) имеют частное решение

$$p = 0,\ q = 0,\ r = r^\circ,\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 0,\ \gamma_3 = 1 \tag{1.1}$$

Рассмотрим задачу о существовании периодических решений, соответствующих решению (1.1) в случае, близком к решению Лагранжа

$$A = B,\ x_0 = \sqrt{\mu} z_0,\ y_0 = 0 \tag{1.2}$$

где μ — безразмерный малый параметр. Ввведем безразмерные величины

$$p = \sqrt{\mu} n^{-1} p', \quad q = \sqrt{\mu} n^{-1} q', \quad r = n^{-1} r'$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\mu}\,\gamma_1', \quad \gamma_2 = \sqrt{\mu}\,\gamma_2', \quad \gamma_3 = \gamma_3', \quad t = nt'\left(n = \sqrt{\frac{A}{Mgz_0}}\right)$$

Учитывая условия (1.2) и опуская для упрощения записи штрихи, уравнения Эйлера — Пуассона, когда неподвижная ось z направлена вертикально вверх, приведем к виду

$$\frac{dp}{dt} = aqr + \gamma_2,\ \frac{dq}{dt} = -apr + \gamma_3 - \gamma_1,\ \frac{dr}{dt} = -\mu b^{-1}\gamma_2 \tag{1.3}$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3,\ \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1,\ \frac{d\gamma_3}{dt} = \mu(q\gamma_1 - p\gamma_2)$$

$$a = (A - C) / A, \quad b = C/A$$

Три первых интеграла запишутся так:

$$\mu p^2 + \mu q^2 + br^2 + 2\mu\gamma_1 + 2\gamma_3 = \mu p_0^2 + \mu q_0^2 + 2\mu\gamma_{10} + br_0^2 + 2\gamma_{30} \tag{1.4}$$

$$\mu p\gamma_1 + \mu q\gamma_2 + br\gamma_3 = \mu p_0\gamma_{10} + \mu q_0\gamma_{30} + br_0\gamma_{30}$$

$$\mu\gamma_1^2 + \mu\gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

Разрешим первое и последнее соотношения (1.4) относительно r, γ_3. Получим

$$\gamma_3 = 1 - \mu f_1, \qquad r = r_0 - \mu f_2$$

Здесь

$$f_1 = {}^1/_2 F_1 + {}^1/_8 \mu F_1^2 + \ldots \tag{1.5}$$

$$f_2 = \frac{1}{2br_0}(F_2 - F_{20}) + \mu\frac{1}{8br_0}\left[\frac{1}{br_0^2}(F_2 - F_{20})^2 - (F_1^2 - F_{10}^2)\right] + \ldots$$

$$F_1 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2, \quad F_2 = p^2 + q^2 + 2\gamma_1 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)$$

Через F_{10} и F_{20} обозначены начальные значения величин F_1, F_2. Многоточие обозначает члены более высокого порядка малости по μ.

Исключая из уравнения (1.3) γ_3 и r, приходим к следующей системе четырех уравнений:

$$\frac{dp}{dt} = ar_0q + \gamma_2 - \mu aqf_2, \quad \frac{dq}{dt} = 1 - ar_0p - \gamma_1 + \mu(apf_2 - f_2) \tag{1.6}$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r_0\gamma_2 - q - \mu(\gamma_2 f_2 - qf_1), \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = -r_0\gamma_1 + p + \mu(\gamma_1 f_2 - pf_2)$$

Заменой переменных

$$p = P + h\Gamma_1 + c_1, \quad q = Q + h\Gamma_2 \tag{1.7}$$

$$\gamma_1 = (1 + \beta h)\Gamma_1 + \beta P + c_2, \quad \gamma_2 = (1 + \beta h)\Gamma_2 = \beta Q$$

приводим систему (1.6) к виду

$$dP/dt = \lambda_1 Q + \mu G_1, \quad dQ/dt = -\lambda_1 P + \mu G_2 \tag{1.8}$$

$$\frac{d\Gamma_1}{dt} = \lambda_2\Gamma_2 + \mu G_3, \quad \frac{d\Gamma_2}{dt} = -\lambda_2\Gamma_1 + \mu G_4$$

$$\lambda_{1,2} = {}^1/_2\left[(2 - b)r_0 \pm \sqrt{b^2r_0^2 - 4}\right], \quad \beta = {}^1/_2\left(br_0 + \sqrt{b^2r_0^2 - 4}\right)$$

$$h = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad c_1 = \frac{r_0}{ar_0^2 + 1}, \quad c_2 = \frac{1}{ar_0^2 + 1}$$

$$G_1 = -(1 + \beta h)aqf_2 - h(qf_1 - \gamma_2 f_2), \quad G_2 = -(1 + \beta h) \times (f_1 - apf_2) + h(pf_1 - \gamma_1 f_2)$$

$$G_3 = \beta aqf_2 + qf_1 - \gamma_2 f_2, \quad G_4 = \beta(f_1 - apf_2) - pf_1 + \gamma_1 f_2$$

Порождающая (при $\mu = 0$) система для уравнений (1.8) имеет чисто мнимые корни при $b^2r_0^2 - 4 \geqslant 0$. В дальнейшем будем предполагать это условие выполнимым.

2. Пусть $\lambda_1 / \lambda_2 = n_1 / n_2$ — число рациональное. Этого можно добиться, например, выбором соответствующего значения r_0. Тогда общее решение порождающей системы будет периодическим с периодом $T_0 = 2\pi n_1 / \lambda_1 = 2\pi n_2 / \lambda_2$. Поставим задачу о нахождении при достаточно малых μ $T(\mu)$-периодических решений системы (1.8), обращающихся при $\mu = 0$ в периодические решения периода T_0 порождающей системы.

Введем вместо переменной t переменную τ, полагая $t = (1 + \mu\alpha)\tau$, где α — подлежащая определению функция малого параметра μ. Тогда задача приводится к отысканию периодических решений периода T_0 новой системы уравнений [1]

$$
\begin{aligned}
&dP/d\tau = \lambda_1 Q + \mu H_1, \quad dQ/dt = -\lambda_1 P + \mu H_2 \\
&d\Gamma_1/d\tau = \lambda_2\Gamma_2 + \mu H_3, \quad d\Gamma_2/d\tau = -\lambda_2\Gamma_1 + \mu H_4 \\
&H_1 = (1 + \mu\alpha)G_1 + \alpha\lambda_1 Q, \quad H_2 = (1 + \mu\alpha)G_2 - \alpha\lambda_1 P \\
&H_3 = (1 + \mu\alpha)\ G_3 + \alpha\lambda_2\Gamma_2, \quad H_4 = (1 + \mu\alpha)\ G_4 - \alpha\lambda_2\Gamma_1
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Решения и начальные условия системы (2.1) будем искать в виде

$$
\begin{aligned}
&P(\tau) = M_1 \cos\lambda_1\tau + M_2 \sin\lambda_1\tau + \Sigma_1 \\
&Q(\tau) = -M_1 \sin\lambda_1\tau + M_2 \cos\lambda_1\tau + \Sigma_2 \\
&\Gamma_1(\tau) = M_3 \cos\lambda_2\tau + \Sigma_3, \quad \Gamma_2(\tau) = -M_3 \sin\lambda_2\tau + \Sigma_4 \\
&\left(\Sigma_i = \sum_{n=1}^{\infty} C_i^{(n)}(\tau)\mu^n, \quad i = 1, 2, 3, 4\right) \\
&P(0) = M_1 = M_1^\circ + m_1, \quad Q(0) = M_2 = M_2^\circ + m_2 \\
&\Gamma_1(0) = M_3 = M_3^\circ + m_3, \quad \Gamma_2(0) = 0
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Периодические решения системы (1.8), соответствующие T_0-периодическим решениям системы (2.1), будут иметь период $T = (1 + \mu\alpha)T_0$. Величину α представим в виде $\alpha = \alpha_0 + m_4$. Следуя методу Пуанкаре, будем варьировать начальные условия, совпадающие в данном случае с произвольными постоянными решения порождающей системы, а также величину α так, чтобы решение (2.2) было периодическим. При этом величины m_1, m_2, m_3, m_4 будем разыскивать как функции малого параметра μ, обращающиеся в нуль при $\mu = 0$.

3. Коэффициенты $C_i^{(n)}(\tau)$ определяются из уравнений

$$
\begin{aligned}
&\frac{dC_1^{(n)}(\tau)}{d\tau} = \lambda_1 C_2^{(n)}(\tau) + H_1^{(n)}(\tau), \quad \frac{dC_2^{(n)}(\tau)}{d\tau} = -\lambda_1 C_1^{(n)}(\tau) + H_2^{(n)}(\tau) \\
&\frac{dC_3^{(n)}(\tau)}{d\tau} = \lambda_2 C_4^{(n)}(\tau) + H_3^{(n)}(\tau), \quad \frac{dC_4^{(n)}(\tau)}{d\tau} = -\lambda_2 C_3^{(n)}(\tau) + H_4^{(n)}(\tau)
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

при начальных условиях $C_i^{(n)}(0) = 0$; $H_i^{(n)}(\tau)$ — известные функции, если определены $C_i^{(k)}(\tau)$ для $k < n$.

Для системы (3.1) можно установить справедливость следующих соотношений:

$$
\begin{aligned}
&C_i^{(n)}(\tau) = \sum_{\alpha=1}^{4} S_\alpha^{(n)}(\tau)\,\varphi_{i\alpha}(\tau) \\
&S_i^{(n)}(\tau) = \int_0^\tau \sum_{\alpha=1}^{4} \varphi_{\alpha i}(u)\,H_\alpha^{(n)}(u)\,du \\
&C_i^{(n)}(T_0) = S_i^{(n)}(T_0) \quad (i = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Здесь $\varphi_{\alpha i}(\tau)$ — элементы фундаментальной матрицы порождающей системы, причем $\varphi_{ii}(0) = 1$, $\varphi_{ij}(0) = 0$ $(i \neq j)$.

Подставляя первые приближения для P, Q, Γ_1, Γ_2 в (1.7), по формулам (1.5) получим

$$(3.3)\quad \begin{aligned} F_1^{(0)} &= c_2^2 + \beta^2 (M_1^2 + M_2^2) + (1 + \beta h)^2 M_3^2 + 2\beta c_2 \times \\ &\times (M_1 \cos\lambda_1\tau + M_2 \sin\lambda_1\tau) + 2c_2 \ (1 + \beta h) \ M_3 \cos\lambda_2\tau + 2\beta \times \\ &\times (1 + \beta h) \times [M_1 M_3 \cos(\lambda_1 - \lambda_2)\tau + M_2 M_3 \sin(\lambda_1 - \lambda_2)\tau] \\ F_2^{(0)} &= c_1^2 + 2c_2 + M_1^2 + M_2^2 + hM_3^2 + 2 \ (c_1 + \beta) \times \\ &\times (M_1 \cos\lambda_1\tau + M_2 \sin\lambda_1\tau) + 2\ [c_1 h + (1 + \beta h)] \ M_3 \cos\lambda_2\tau + \\ &+ 2h\,[M_1 M_3 \cos\ (\lambda_1 - \lambda_2)\tau + M_2 M_3 \sin(\lambda_1 - \lambda_2)\tau] - F_1^{(0)} \end{aligned}$$

Для сокращения записей введем величины L_i

$$(3.4)\quad \begin{aligned} L_1 &= -(1 + \beta h)\, af_2 - h\,(f_1 - \beta f_2) \\ L_1' &= -\,(1 + \beta h)\ ahf_2 - h\,[f_1 h - (1 + \beta h)\ f_2] \\ L_2 &= -\,(1 + \beta h)\,(f_1 - ac_1 f_2) + h(c_1 f_1 - c_2 f_2) \\ L_3 &= \beta ahf_2 + hf_1 - (1 + \beta h)\ f_2, \quad L_3' = \beta ah + f_1 - \beta f_2 \\ L_4 &= \beta\ (f_1 - ac_1 f_2) - c_1 f_1 + c_2 f_2 \end{aligned}$$

Если выделить в этих выражениях члены, не зависящие от μ, вычисленные на порождающем решении, то они будут иметь следующую структуру:

$$\begin{aligned} L_i^{(0)} &= [k_{i1} + k_{i2}(M_1^2 + M_2^2) + k_{i3} M_3^2] + k_{i4}(M_1 \ \cos\lambda_1\tau + \\ &+ M_2 \sin\lambda_1\tau) + \ \ k_{i5} M_3 \cos\lambda_2\tau + k_{i6} M_3\,[M_1 \cos\ \ (\lambda_1 - \lambda_2)\,\tau + \\ &+ M_2 \sin(\lambda_1 - \lambda_2)\,\tau] \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем через k_{rs} обозначены функции параметров a, r_0, которые можно получить, используя формулы (3.4), (1.5), (3.3) и не выписанные в виду их громоздкости.

По второй формуле (3.2) вычислим функции $S_i^{(1)}(\tau)$

$$(3.5)\quad \begin{aligned} S_1^{(1)}(\tau) &= \int_0^\tau [M_2 (L_1^{(0)} + \alpha\lambda_1) - \sin\lambda_1 u L_2^{(0)} + M_3 \sin(\lambda_1 - \lambda_2) u L_1'^{(0)}]\,du \\ S_2^{(1)}(\tau) &= -\int_0^\tau [M_1 (L_1^{(0)} + \alpha\lambda_1) - \cos\lambda_1 u L_2^{(0)} + \\ &+ M_3 \cos(\lambda_1 - \lambda_2)\, u L_1'^{(0)}]\ du \\ S_3^{(1)}(\tau) &= \int_0^\tau \{L_3^{(0)}\,[-\,M_1 \sin(\lambda_1 - \lambda_2)\,u + M_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2)\,u] - \\ &- \sin\lambda_2 u L_4^{(0)}\}\,du \\ S_4^{(1)}(\tau) &= -\int_0^\tau \{M_3 (L_3'^{(0)} + \alpha\lambda_2) + [M_1 \cos(\lambda_1 - \lambda_2)\,u + \\ &+ M_2 \sin(\lambda_1 - \lambda_2)\,u]\,L_3^{(0)} - \cos\lambda_2 u L_4^{(0)}\}\,du \end{aligned}$$

4. Как известно [1], для того, чтобы решение (2.2) было T_0-периодическим, необходимо и достаточно, чтобы

$$(4.1)\quad \begin{aligned} \Psi_1 &= P\ (T_0) - P\ (0) = 0, \quad \Psi_2 = Q\ (T_0) - Q\ (0) = 0 \\ \Psi_3 &= \Gamma_1\,(T_0) - \Gamma_1\,(0) = 0, \quad \Psi_4 = \Gamma_2\,(T_0) - \Gamma_2\,(0) = 0 \end{aligned}$$

Ψ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — функции от M_1, M_2, M_3, α и μ. Равенства (4.1), служащие для определения величин $M_j^{(0)}$, α_0, m_i $(j = 1, 2, 3;\ i = 1, 2, 3, 4)$, не являются независимыми ввиду существования у системы (2.1) первого интеграла, соответствующего второму соотношению (1.4) [2]. Можно показать, что третье условие есть следствие остальных, если $M_3 \neq 0$, а также при $M_1 = M_2 = M_3 = 0$, если $ar_0^2 + 1 > 0$. По аналогии с утверждением в работе [3] одну из величин M_1°, M_2°, M_3°, α можно считать произвольной постоянной, а одну из величин m_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — произвольной функцией μ, обращающейся в нуль при $\mu = 0$.

После сокращения равенств (4.1) на μ, приравнивая нулю члены при μ в нулевой степени, получаем следующие необходимые условия периодичности:

$$C_i^{(1)}(T_0) = C_i^{(1)}(M_1, M_2, M_3, \alpha) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

которые согласно последней формуле (3.2) и формулам (3.5) имеют вид

$$M_2E_1 + R_1 = 0, \quad M_1E_1 + R_2 = 0, \quad M_3E_3 + R_4 = 0 \tag{4.2}$$

Здесь

$$E_1 = k_{11} - {}^1/_2\ k_{24} + k_{12}(M_1^2 + M_2^2) + (k_{13} + {}^1/_2\ k_{16}')M_3^2 + \\ + \alpha\lambda_1$$

$$E_3 = k_{31} - {}^1/_2\,k_{45} + (k_{32} + {}^1/_2\,k_{36})\ (M_1^2 + M_2^2) + k_{33}M_3^2 + \\ + \alpha\lambda_2$$

Выражения R_1, R_2 и R_4 отличны от нуля только при значениях λ_1 / λ_2, равных 2, $^1/_2$ или -1, и имеют следующий вид:

$$R_1 = 0, \quad R_2 = {}^1/_2\ k_{15}'M_3^2, \quad R_4 = {}^1/_2\ (k_{35} - k_{46})M_1M_2$$
$$(\lambda_1 / \lambda_2 = 2)$$

$$R_1 = {}^1/_2\ (k_{28} - k_{14}')\,M_2M_3, \quad R_2 = -{}^1/_2\ (k_{28} - k_{14}')\,M_1M_3$$
$$R_4 = {}^1/_2\,k_{34}\,(M_1^2 - M_2^2) \quad (\lambda_1 / \lambda_2 = {}^1/_2)$$

$$R_1 = -{}^1/_2\ k_{16}'M_2M_3, \quad R_2 = M_3\,[k_{11}' + k_{12}'\ (M_1^2 + M_2^2) + \\ + k_{13}'M_3^2] + {}^1/_2\ k_{16}'\,M_3^2M_1 - {}^1/_2\,k_{25}M_3, \quad R_4 = -{}^1/_2 k_{14}M_1$$
$$(\lambda_1 / \lambda_2 = -1)$$

Пусть M_1°, M_2°, M_3^0, α_0 удовлетворяют уравнениям (4.2). Рассмотрим матрицы Якоби от $C_1(T_0)$, $C_2(T_0)$, $C_4(T_0)$ по M_1, M_2, M_3, α, вычисленные при $M_j = M_j^\circ$ $(j = 1, 2, 3)$, $\alpha = \alpha_0$, и от Ψ_1, Ψ_2, Ψ_4 по m_i при $m_i = \mu = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. При вычислении второй матрицы отсутствует дифференцирование по μ, поэтому можно сразу положить $\mu = 0$, а так как величины M_j $(j = 1, 2, 3)$, α и m_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ входят в решения в виде соответствующих сумм, то оказывается, что рассматриваемые матрицы совпадают. Обозначим их через J.

При решении уравнений (4.1) получаем следующие три случая существования периодических решений.

1°. $M_1^\circ = M_2^\circ = M_3^\circ = 0$, $E_1 \neq 0$, $E_3 \neq 0$. Тогда ранг J равен трем и существуют однозначные функции m_1, m_2, m_3 от α, μ, удовлетворяющие уравнениям (4.1). Эти функции представимы для достаточно малых μ в виде сходящихся рядов по целым степеням μ и обращаются в нуль при

$\mu = 0$, α — произвольная постоянная величина, кроме $\alpha_0 = -\lambda_1^{-1}(k_{11} - {}^1/_2\, k_{24})$ или $\alpha_0 = -\lambda_2^{-1}(k_{31} - {}^1/_2\, k_{45})$. Так как α_0 и m_4 входят в решение в виде суммы $\alpha = \alpha_0 + m_4$, то произвольную величину m_4, не теряя искомых решений, можно положить равной нулю. В рассматриваемом случае решение (2.2) будет периодическим с произвольным параметром α и аналитическим по μ в некоторой окрестности его нулевого значения.

2°. Пусть $M_1^\circ = M_2^\circ = E_3 = 0$, $E_1 \neq 0$, $M_3 k_{33} \neq 0$. Тогда ранг J равен трем, M_3 — произвольная величина, $\alpha_0 = \lambda_2^{-1}({}^1/_2\, k_{45} - k_{31} - k_{33} M_3^2)$. Уравнения (4.1) имеют решения в виде рядов по целым степеням μ для m_1, m_2, m_4, зависящие от произвольной величины M_3 и обращающиеся в нуль при $\mu = 0$ (величину m_3 следует взять равной нулю).

3°. Пусть $M_3 \neq 0$ и отношение λ_1 / λ_2 равно 2, ${}^1/_2$ или -1. Тогда ранг J, если не потребовать противного, будет равен трем, M_1 — произвольная постоянная, величины m_2, m_3, m_4 могут быть найдены в виде рядов искомого вида по целым степеням μ.

Если потребовать, чтобы ранг J был меньше трех, то возможны случаи ветвления [4] и существуют решения, представимые сходящимися для достаточно малых μ рядами с дробными степенями μ.

Пусть

$$\lambda_1 / \lambda_2 = 2, \quad M_1^\circ = M_2^\circ = 0, \quad M_3^\circ \neq 0, \quad E_3 = 0 \tag{4.3}$$

$$E_1 = {}^1/_2 (k_{26} - k_{14}') M_3^0 \neq 0, \quad E_1 - {}^1/_2\ (k_{26} - k_{14}')\ M_3^0 = 0$$

Тогда необходимые условия периодичности (4.2) выполнены, а ранг J равен двум; M_1°, M_2°, M_3°, α находятся из условий (4.3), m_1, m_2, m_3, m_4 подлежат определению. Применяя теорему о неявных функциях к первому и четвертому уравнениям (4.1), получаем единственное решение для m_2, m_4 в виде

$$m_2 = \sum_{i+j\geqslant 1} \beta_{ij} m_1^i \mu^j, \quad m_4 = \sum_{i+j\geqslant 1} \alpha_{ij} m_1^i \mu^j$$

Положим $m_3 = \delta\mu$, где δ — произвольная постоянная. Подставляя выражения для m_2, m_3, m_4 во второе уравнение (4.1), получим уравнения разветвления в виде

$$\left[k_{12} - 2\left(k_{32} + \frac{1}{2} k_{36} + \frac{k_{34}}{2M_3^\circ}\right)\right] m_1^3 + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} R_{ij} m_1^j \mu^j = 0$$

Оно имеет одно малое вещественное решение для m_1, представимое в виде ряда по степеням $\mu^{1/3}$ и зависящее от произвольного параметра δ.

Положим теперь $m_3 = \delta_1 m_1$, тогда уравнение разветвления примет вид

$$\left[2\left(k_{13} + \frac{1}{2} k_{16}'\right) M_3^\circ - 4k_{33} M_3^\circ - \frac{1}{2}(k_{26} - k_{14}')\right] \delta_1 m_1^2 +$$

$$+ \left[k_{12} + \left(k_{13} + \frac{1}{2} k_{16}'\right) \delta_1^2 + \alpha_{20}\lambda_1\right] m_1^3 + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} R_{ij} m_1^i \mu^j = 0$$

$$\alpha_{20} = -\frac{1}{\lambda_2}\left(k_{32} + \frac{1}{2} k_{36} + k_{33}\delta_1^2 + \frac{k_{34}}{2M_3^\circ}\right)$$

Если коэффициент при m_1^2 отличен от нуля, то при $\operatorname{sign} R_{01}R_{02} = -1$, т. е. при

$$\operatorname{sign} C_2^{(2)}(M_1^\circ, M_2^\circ, M_3^\circ, \alpha_0)\cdot C_2^{(3)}(M_1^\circ, M_2^\circ, M_3^\circ, \alpha_0) = -1$$

имеются два малых вещественных решения для m_1, представимых в виде рядов по степеням $\mu^{1/2}$ [4]. Эти решения будут содержать произвольный параметр δ_1. Если положить $m_3 = \delta_1 m_1 + \delta_2 m_1^2$, значение δ_1 выбрать так, чтобы коэффициент при m_1^2 в уравнении разветвления обращался в нуль, то имеется одно вещественное решение, представимое в виде ряда по степеням $\mu^{1/3}$, определенное в некоторой окрестности нуля и зависящее от произвольного параметра δ_2.

Представим m_3 суммой

$$m_3 = \sum_k \delta_k m_1^k$$

Выбирая значения δ_k так, чтобы коэффициенты уравнения разветвления последовательно обращались в нуль, можно получить в пространстве начальных условий уравнений (2.1) последовательность точек ветвления периодических решений, представимых рядами по дробным степеням μ. Если эта последовательность сходится, то получим точку сгущения ветвления периодических решений. Накладывая другие ограничения, можно получить новые случаи ветвления.

5. Если отношение λ_1 / λ_2 отлично от 2, $1/2$, -1, то решение вопроса о существовании периодических решений, кроме двух рассмотренных случаев, требует рассмотрения более высоких приближений. С этой целью по формулам (3.2) определяем

$$C_1^{(2)}(T_0) \text{ и } C_2^{(2)}(T_0)$$

$$C_1^{(2)}(T_0) = M_2\alpha(E_1 - \lambda_1)T_0 + \int_0^{T_0} [M_2L_1^{(1)} - \sin\lambda_1\tau L_2^{(1)} +$$
$$+ M_3\sin(\lambda_1 - \lambda_2)\tau L_1^{(1)} + L_1^{(0)}S_2^{(1)}(\tau) + L_1'^{(0)}S_4^{(1)}(\tau) + \lambda_1\alpha S_2^{(1)}(\tau)]\,d\tau$$

$$C_2^{(2)}(T_0) = -M_1\alpha(E_1 - \lambda_1)T_0 - \int_0^{T_0} [M_1L_1^{(1)} - \cos\lambda_1\tau L_2^{(1)} +$$
$$+ M_3\cos(\lambda_1 - \lambda_2)\tau L_1'^{(1)} + L_1'^{(0)}S_3^{(1)}(\tau) + \lambda\alpha S_1^{(1)}(\tau) + L_1^{(0)}S_1^{(1)}(\tau)]\,d\tau$$

Вместо второго условия периодичности (4.1) рассмотрим равенство

$$\Psi_2^* = \frac{1}{M_2}\Psi_1 + \frac{1}{M_1}\Psi_2 = 0 \tag{5.1}$$

Члены с нулевой степенью параметра μ в (5.1) отсутствуют, коэффициенты при первой степени μ имеют вид

$$\frac{1}{M_2}C_1^{(2)}(T_0) + \frac{1}{M_1}C_2^{(2)}(T_0) = T_0\left\{\left(\frac{\eta_4}{M_2} - \frac{\eta_3}{M_1}\right)[k_{11}' +\right.$$
$$+ k_{12}'(M_1^2 + M_2^2) + k_{13}'M_3^2] - \frac{k_{15}'M_1M_3}{2\lambda_2} -$$
$$- \frac{k_{14}'M_3}{4\lambda_1M_1}(k_{46} + k_{35})(M_1^2 + M_2^2) - \frac{k_{15}'M_3}{2\lambda_2M_1}[k_{41} + k_{42}(M_1^2 + M_2^2) +$$
$$+ k_{43}M_3^2 - \frac{k_{34}}{2}(M_1^2 - M_2^2)] + \frac{k_{16}'M_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)M_1}[k_{31}' +$$

$$+ k_{32}'(M_1^2 + M_2^2) + k_{33}'M_3^2(M_1^2 + M_2^2) + \frac{k_{44}}{2}(M_1^2 - M_2^2)] -$$
$$- \frac{k_{15}^2 M_3^2}{2\lambda_2}\left(\frac{M_1}{M_2} - \frac{M_2}{M_1}\right) - \frac{k_{16}k_{25}M_3^2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{k_{15}'k_{46}M_3^2}{2(\lambda_1 - 2\lambda_2)}\Big\}$$

Здесь η_3, η_4 — значения интегралов во втором и третьем равенствах (3.5) на нижних пределах.

После сокращения равенства (5.1) на μ, получаем следующие необходимые условия для существования решения искомого вида

$$\frac{1}{M_2} C_1^{(2)}(T_0) + \frac{1}{M_1} C_2^{(2)}(T_0) = 0 \tag{5.2}$$

Условие (5.2) вместе с первым и третьим условиями (4.1) будут и достаточными условиями периодичности, так как ранг матрицы Якоби в нуле от Ψ_1, $\Psi_2{}^*$, Ψ_3 по m_i ($i = 1, 2, 3, 4$) равен трем. При этом одну из величин M_1, M_2, M_3, α можно взять произвольной; m_i, соответствующие остальным величинам, можно представить в виде рядов по целым степеням μ, сходящихся для достаточно малых значений μ, удовлетворяющих уравнениям (4.1), (5.1) и обращающихся в нуль при $\mu = 0$. Если потребовать, чтобы ранг J был меньше трех, то возможны случаи ветвления.

6. Предположим теперь, что отношение частот λ_1 / λ_2 есть число иррациональное. Порождающая система для уравнений (2.1) имеет частное периодическое решение с частотой λ_2

$$P(\tau) = 0,\ Q(\tau) = 0,\ \Gamma_1(\tau) = M_3 \cos\lambda_2\tau,\ \Gamma_2(\tau) = -M_3 \sin\lambda_2\tau \tag{6.1}$$

Условия существования периодических решений системы (2.1), обращающихся при $\mu = 0$ в решения (6.1), имеют вид

$$\Psi_1 = m_1(\cos\lambda_1 T_0 - 1) + m_2 \sin\lambda_1 T_0 + \mu C_1^{(1)}(T_0) + \ldots = 0$$
$$\Psi_2 = -m_1 \sin\lambda_1 T_0 + m_2(\cos\lambda_1 T_0 + 1) + \mu C_2^{(1)}(T_0) + \ldots = 0$$
$$\Psi_4 = C_4^{(1)}(T_0) + \ldots = 0$$

Решая полученные уравнения, приходим к решениям такого же вида, как и в случае 2°. Аналогичное утверждение справедливо и для другого периодического решения порождающей системы с частотой λ_1.

Поступила 6 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
2. *Пуанкаре А.* Избранные труды, т. 1. Новые методы небесной механики. М., «Наука», 1971.
3. *Архангельский Ю. А.* Периодические решения квазилинейных автономных систем, обладающих первыми интегралами. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
4. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., «Наука», 1969.