

ЛИБРАЦИЯ В СИСТЕМАХ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

С. В. Болотин, В. В. Козлов

(Москва)

Рассматривается задача о существовании либрационных периодических движений натуральных механических систем со многими степенями свободы. Получены оценки числа либрационных движений с данным значением полной энергии через топологические инварианты области возможных движений. В качестве примера рассмотрена задача о колебаниях плоского многосвязного маятника.

1. Постановка задачи. Рассмотрим натуральную механическую систему с конфигурационным пространством M , потенциальной энергией U и кинетической энергией T . Будем предполагать, что кинетическая энергия определяет полную риманову метрику на M . Уравнения движения системы допускают интеграл энергии $T + U = h$. При фиксированном значении h движение происходит в множестве

$$V = \{q \in M : U(q) \leq h\}$$

называемом областью возможных движений.

Согласно принципу наименьшего действия, движение внутри V происходит по геодезическим линиям метрики Якоби

$$\langle \dot{q}, \dot{q} \rangle = \|\dot{q}\|^2 = 2(h - U(q)) T(q, \dot{q})$$

Рассмотрим случай, когда на краю области возможных движений нет положения равновесия системы, т. е. h — регулярное значение потенциальной энергии и

$$\inf_M U < h < \sup_M U$$

В этом случае V — гладкое многообразие с краем $\partial V = \Sigma$, который является гладким многообразием размерности на единицу меньшей, чем размерность V . Будем считать также, что существует $h' < h$, такое, что множество $\{q \in V : U(q) \geq h'\}$ компактно.

В многомерных натуральных механических системах по аналогии с системами с одной степенью свободы можно ввести либрационные периодические движения. Траектория либрационного движения с полной энергией h имеет с краем области возможных движений две общие точки, а изображающая точка системы совершает колебательное движение между этими точками [1]. В дальнейшем будем называть такие движения просто либрациями в области V . Существование либраций впервые доказано Зейфертом для случая, когда область возможных движений диффеоморфна n -мерному диску [2]. В [1] показано, что либрации существуют, если область V диффео-

морфна произведению замкнутого многообразия на замкнутый отрезок. Этот результат обобщается ниже на случай более сложных областей возможных движений.

Для любой группы π будем обозначать через $r(\pi)$ наименьшее возможное число образующих π . Обозначим через V/Σ топологическое пространство, полученное из V стягиванием Σ в точку, а через $\pi(V/\Sigma)$ — фундаментальную группу этого пространства.

Теорема. Число либраций в области V не меньше $r(\pi(V/\Sigma))$. Заметим, что это число не меньше первого числа Бетти области V по модулю Σ .

В частности, если Σ состоит из n связных компонент, то число либраций в области V не меньше $n - 1$. В этом случае можно утверждать большее: для каждой связной компоненты многообразия Σ существует либрация с концом на этой компоненте, причем траектории этих либраций не имеют самопересечений.

2. Геометрия окрестности границы. Пусть $q \in \Sigma$ и $t \geq 0$. Обозначим через $\varphi_t(q)$ решение уравнений движения рассматриваемой механической системы с начальными условиями

$$(2.1) \quad \varphi_t(q)|_{t=0} = q, \quad \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(q)|_{t=0} = 0$$

Функция U не имеет критических точек на Σ , поэтому

$$(2.2) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(\varphi_t(q))|_{t=0} = -2T(q, \text{grad } U(q)) < 0$$

Так как многообразие Σ компактно, то гладкое отображение

$$\varphi: \Sigma \times [0, \infty) \rightarrow V, \quad \varphi(q, t) = \varphi_t(q)$$

гомеоморфно отображает достаточно малую окрестность $\Sigma \times \{0\}$ на некоторую окрестность Σ , а обратное отображение является гладким вне Σ .

Пусть $s(q, t)$ — длина дуги в метрике Якоби вдоль геодезической $t \mapsto \varphi_t(q)$

$$s(q, t) = \int_0^t \left\| \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(q) \right\| dt = \int_0^t \sqrt{2(h - U(\varphi_t(q)))} dt$$

Из (2.1) и (2.2) следует, что

$$s(q, 0) = \frac{\partial}{\partial t} s(q, t)|_{t=0} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} s(q, t)|_{t=0} = 0$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3} s(q, t)|_{t=0} > 0$$

По теореме о неявной функции при достаточно малых $r \geq 0$ уравнение $r^3 = s(q, t)$ можно разрешить относительно $t = t(q, r)$, причем функция $t(q, r)$ гладкая и

$$(2.3) \quad t(q, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} t(q, r)|_{r=0} > 0$$

Отображение $(q, r) \mapsto (q, t(q, r))$ определено при всех $q \in \Sigma$ и достаточно малых $r \geq 0$. Так как его якобиан при $r = 0$ равен $\partial t / \partial r|_{r=0} > 0$ и множество Σ компактно, то это отображение является диффеоморфиз-

мом в достаточно малой окрестности множества $\Sigma \times \{0\}$. Поэтому существует $\varepsilon > 0$, такое, что можно определить отображение

$$f: \Sigma \times [0, \varepsilon] \rightarrow V$$

по формуле

$$f(q, s) = \varphi(q, t(q, s^{1/2}))$$

причем f гомеоморфно отображает $\Sigma \times [0, \varepsilon]$ на некоторую окрестность Σ , а ограничение f на $\Sigma \times (0, \varepsilon]$ есть диффеоморфизм. Отметим, что отображение $(q, r) \rightarrow f(q, r^2)$ гладкое и, в силу (2.1), (2.2) и (2.3)

$$(2.4) \quad f(q, 0) = q, \quad \frac{\partial}{\partial r} f(q, r^2)|_{r=0} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} U(f(q, r^2))|_{r=0} < 0$$

В частности, для любого $s \in (0, \varepsilon]$ множества $W_s = f(\Sigma \times [0, s])$, $V_s = V \setminus f(\Sigma \times [0, s))$ и $\Sigma_s = f(\Sigma \times \{s\})$ — гладкие подмногообразия V , диффеоморфные соответственно $\Sigma \times [0, 1]$, V и Σ .

Следующее утверждение является аналогом леммы Гаусса в римановой геометрии [3].

Лемма. Для любой точки $q_0 \in W_\varepsilon$ существует единственная лежащая в W_ε геодезическая метрики Якоби, начинающаяся на Σ и проходящая через q_0 . Эта геодезическая пересекает гиперповерхности Σ_s под прямым углом.

Первое утверждение леммы следует из того, что для любого $q \in \Sigma$ кривая $s \mapsto f(q, s)$ — геодезическая метрики Якоби, а отображение f — гомеоморфизм. Для доказательства второго утверждения рассмотрим любую гладкую кривую $t \mapsto q(t)$ в Σ и докажем, что для любого $s \in (0, \varepsilon]$

$$F(t, s) \equiv \left\langle \frac{\partial}{\partial t} f(q(t), s), \frac{\partial}{\partial s} f(q(t), s) \right\rangle = 0$$

Так как $s \mapsto f(q(t), s)$ — геодезическая метрики Якоби, то (см. [3])

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial s} \right\| \equiv 1, \quad \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left\| \frac{\partial f}{\partial s} \right\|^2 \right) \equiv 0$$

Следовательно, F не зависит от s . По неравенству Коши — Буняковского

$$F^2 \leq \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|^2 = 2(h - U(f(q(t), s))) T(f(q(t), s), \frac{\partial f}{\partial q} q')$$

Из (2.4) следует, что существует

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial q}(q(t), s) q'(t) = q'(t)$$

поэтому $F \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$. Лемма доказана.

Стандартными методами римановой геометрии можно показать, что геодезическая, существование которой утверждает лемма, — кратчайшая кривая, соединяющая точку q_0 с множеством Σ .

Изложенные результаты позволяют применить для доказательства теоремы методы вариационного исчисления в целом.

3. Доказательство теоремы. Так как множество $\{q \in V : U(q) \geq h'\}$ компактно, то

$$\sup_{V_\varepsilon} U < h$$

По предположению метрика, определяемая на M кинетической энергией, полна, поэтому на M существует полная метрика, совпадающая в V_ε с метрикой Якоби. Обозначим через Ω множество кусочно-гладких кривых $\omega : [0, 1] \rightarrow M$, таких, что $\omega(0), \omega(1) \in \Sigma_\varepsilon$. Пусть $L(\omega)$ — длина кривой $\omega \in \Omega$ в построенной метрике. Известно [3, 4], что экстремали функционала L — геодезические этой метрики, ортогональные Σ_ε в своих концах, и что на каждом классе $\Gamma \subset \Omega$ гомотопных кривых с концами на Σ_ε функционал L достигает минимума $L(\Gamma) = \min_{\Gamma} L(\omega)$.

Если $\Gamma \subset \Omega$ — нетривиальный гомотопический класс (т. е. гомотопический класс, состоящий из кривых, которые не могут быть продеформированы в точку), то $L(\Gamma) > 0$. Предположим, что минимум длин кривых из Γ достигается на геодезической $\omega \in \Gamma$, такой, что $\omega([0, 1]) \subset V_\varepsilon$. Тогда кривая ω — геодезическая метрики Якоби и ортогональна Σ_ε в своих концах. Поэтому по лемме ее можно продолжить до геодезической метрики Якоби с концами на Σ , которая, очевидно, является траекторией либрационного движения.

Покажем, что число гомотопических классов, удовлетворяющих сделанному предположению, не меньше $r(\pi)$, где $\pi = \pi(V/\Sigma)$. Очевидно, что естественная проекция

$$M \rightarrow M / \overline{M \setminus V_\varepsilon} \approx V / \Sigma$$

определяет отображение

$$g : \Gamma \mapsto g(\Gamma) = \gamma \in \pi$$

множества классов гомотопных кривых с концами на Σ_ε на группу π , причем в единицу группы переходят те и только те гомотопические классы, которые содержат кривые, лежащие в $\overline{M \setminus V_\varepsilon}$. Определим на группе π функцию L по формуле

$$L(\gamma) = \min_{g(\Gamma)=\gamma} L(\Gamma)$$

Тогда из $L(\gamma) = 0$ следует, что γ — единица группы.

Так как для любого $l > 0$ число гомотопических классов $\Gamma \subset \Omega$, удовлетворяющих условию $L(\Gamma) \leq l$, конечно [3, 4], то конечно и число элементов $\gamma \in \pi$, таких, что $L(\gamma) \leq l$. Поэтому на каждом непустом подмножестве π функция L достигает минимума. Пусть минимум функции L на множестве элементов группы π , отличных от единицы, достигается на элементе $\gamma_1 \in \pi$. Если элементы $\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}$ уже определены и не являются образующими группы π , то пусть γ_i — тот элемент группы π , на котором достигается минимум функции L на множестве элементов группы π , не принадлежащих подгруппе, порожденной $\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}$. Получим таким образом конечную или счетную систему $\{\gamma_i\}$ образующих группы π , причем $L(\gamma_i) > 0$ для каждого i . Выберем среди гомотопических классов $\Gamma \subset \Omega$,

таких, что $g(\Gamma) = \gamma_i$, тот класс Γ_i , для которого $L(\Gamma_i) = L(\gamma_i)$, и пусть минимум длин кривых из Γ_i достигается на геодезической $\omega_i \in \Gamma_i$. Покажем, что кривая ω_i целиком содержится в множестве V_ε .

Действительно, кривая ω_i не может содержаться также и в множестве $M \setminus V_\varepsilon$, поэтому в противном случае существует такое $t \in (0, 1)$, что $\omega_i(t) \in \Sigma_\varepsilon$. Пусть ω и ω' — ограничения геодезической ω_i соответственно на $[0, t]$ и $[t, 1]$. Тогда, изменив параметр на кривых ω и ω' , получим $\omega \in \Omega$, $\omega' \in \Omega$ и $L(\omega) < L(\omega_i)$, $L(\omega') < L(\omega_i)$. Обозначим через Γ и Γ' гомотопические классы, содержащие кривые ω и ω' , и пусть $\gamma = g(\Gamma)$, $\gamma' = g(\Gamma')$. Тогда $L(\gamma) \leq L(\Gamma) \leq L(\omega) < L(\omega_i) = L(\gamma_i)$ и аналогично $L(\gamma') < L(\gamma_i)$. Но так как $\gamma \gamma' = \gamma_i$, то хотя бы один из элементов γ , γ' не принадлежит подгруппе, порожденной элементами $\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}$, поэтому $L(\gamma) \geq L(\gamma_i)$ или $L(\gamma') \geq L(\gamma_i)$, что противоречит полученным выше неравенствам. Таким образом, для каждого i существует геодезическая метрики Якоби с концами на Σ . Теорема доказана.

4. Пример. В качестве примера применения теоремы п. 1 рассмотрим задачу о существовании периодических движений плоского n -звенного математического маятника. Пусть l_1, \dots, l_n — длины звеньев, которые будем нумеровать от точки подвеса, P_1, \dots, P_n — веса соответствующих материальных точек, а $\theta_1, \dots, \theta_n$ — углы, образуемые звеньями с вертикалью.

Конфигурационное пространство M является n -мерным тором, а потенциальная энергия имеет вид

$$U = - \sum_{i=1}^n a_i \cos \theta_i, \quad a_i = l_i \sum_{j=i}^n P_j$$

Множество критических точек потенциальной энергии находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством всех подмножеств множества $\{1, \dots, n\}$, причем индекс критической точки, соответствующей подмножеству $I \subset \{1, \dots, n\}$, равен числу элементов I , а критическое значение равно

$$h_I = \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \notin I} a_i$$

Пусть h — некритическое значение потенциальной энергии, т. е. $h \neq h_I$ для всех $I \subset \{1, \dots, n\}$, и

$$(4.1) \quad - \sum_{i=1}^n a_i < h < \sum_{i=1}^n a_i$$

В этом случае область возможных движений $V \subset M$ имеет непустой край Σ . Положим $V' = M \setminus V$. Так как $V/\Sigma = M/V'$, то $\pi(V/\Sigma) = \pi(M/V')$. Положим $r = r(\pi(M/V'))$ и $r' = r(\pi(V'))$. Пусть $k \leq n$ — число критических точек потенциальной энергии индекса $n-1$ в множестве V . Докажем, что $r = k$.

Действительно, из основной теоремы теории Морса [3] следует, что M/V' гомотопически эквивалентно клеточному комплексу, содержащему k одномерных клеток, а V' гомотопически эквивалентно клеточному комплексу, содержащему $n-k$ одномерных клеток. Поэтому $r \leq k$, $r' \leq n-k$. Так как группы $\pi(V')$ и $\pi(M/V')$ порождают фундаментальную группу n -мерного тора, то $n \leq r + r' \leq k + (n-k) = n$. Поэтому во всех рассматриваемых неравенствах имеет место знак равенства и, следовательно, $r = k$.

Применяя теорему п. 1, получим следующее утверждение: если h — некритическое значение потенциальной энергии, удовлетворяющее неравенству (4.1), то число либрационных периодических движений с полной энергией h не меньше числа индексов i , таких, что $a_1 + \dots + a_{i-1} - a_i + a_{i+1} + \dots + a_n < h$.

В зависимости от значения интеграла энергии h оценка снизу числа либрационных движений изменяется от нуля до n .

Авторы благодарны В. В. Румянцеву за внимание к работе.

Поступила 30 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов В. В. Принцип наименьшего действия и периодические решения в задачах классической механики. ПММ, 1976, т. 40, вып. 3.
2. Seifert H. Periodische bewegungen mechanischer Systeme. Math. Z., 1948, Bd 51, N.2.
3. Милнор Дж. Теория Морса. М., «Мир», 1965.
4. Зейферт Г., Трельфалль Н. Вариационное исчисление в целом. М., Изд-во иностр. лит., 1947.