Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 531.36 + 62—50

ПРИНЦИПЫ МИНИМУМА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫМИ ПРОЦЕССАМИ

С. Ф. Морозов, И. П. Смирнов

(Горький)

Рассматривается задача оптимального управления решением системы стохастических интегральных уравнений Ито общего вида, когда управляющие параметры входят в неоднородные члены и коэффициенты уравнений. Устанавливаются необходимые условия оптимальности (в форме принципов минимума) для задачи оптимального управления с ограничениями. Приводится пример.

В теории управления случайными процессами, описываемыми стохастическими интегральными уравнениями Ито, можно выделить два направления. Первое направление, развиваемое в работах [1, 2] и др., связано с выводом уравнения Беллмана для функции выигрыша. Для второго направления, берущего свое начало в работах [3, 4], характерно получение необходимых условий оптимальности в форме принципов минимума (стохастические принципы минимума).

Данное исследование, примыкающее ко второму направлению, посвящено развитию общей функциональной методики [5, 6] в случае стохастических систем управления.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача управления процессом, заданным системой стохастических интегральных уравнений общего вида (всюду предполагается суммирование по повторяющимся индексам)

$$\eta_i(t) = \varphi_i(t, c(t)) + \int_0^t A_i(\tau, \eta(\tau), a(\tau))\, d\tau + \int_0^t B_{ij}(\tau, \eta(\tau), b(\tau))\, dw_j(\tau) \tag{1.1}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

когда функции управления $a(\tau, \omega)$, $b(\tau, \omega)$, $c(\tau, \omega)$ входят в коэффициенты и неоднородные члены уравнений, $\varphi_i(t, c, \omega)$, $A_i(t, x, a, \omega)$, $B_{ij}(t, x, b, \omega)$ — случайные поля (ω — случай), а вторые интегралы в (1.1) понимаются в смысле Ито [7].

Частный пример такой задачи, когда $\varphi_i(t, c, \omega) \equiv \varphi_i(\omega)$, а функции $B_{ij}(t, x, b, \omega) \equiv B_{ij}(t)$ (или зависят от неслучайных компонент решения $\eta(t, \omega)$), изучен в [3] методами, отличными от излагаемых здесь.

Пусть (Ω, F, P) — полное вероятностное пространство, $w(t, \omega)$ — m-мерный винеровский процесс, согласованный с неубывающим семейством полных по мере P σ-алгебр $F_t \subset F$, $t \geqslant 0$. Через $L_p(\mathrm{B}F)$, $1 \leqslant p < \infty$ обозначим банахово пространство прогрессивно измеримых (ВF-измеримых) относительно потока $\{F_t\}$ случайных функций $\psi(t, \omega)$, $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$ с конечной нормой

$$\|\psi\|_p = \Big[\int_{[0, T]\times\Omega} |\psi(t, \omega)|^p\, d(\mathrm{mes} \times P)\Big]^{1/p}$$

Пусть $H_p(\mathrm{B}F)$ — множество функций из $L_p(\mathrm{B}F)$, для которых $\sup M\,|\psi(t,\omega)|^p < \infty$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Множество $H_p(\mathrm{B}F)$ всюду плотно в $L_p(\mathrm{B}F)$. Пусть $L_{p,n}(\mathrm{B}F) = L_p(\mathrm{B}F) \times \ldots \times L_p(\mathrm{B}F)$ (n раз) — пространство вектор-функций $\xi(t,\omega) \equiv \{\xi_1(t,\omega), \ldots, \xi_n(t,\omega)\}$ с нормой $\|\xi\|_{p,n}^p = \|\xi_1\|_p^p + \ldots + \|\xi_n\|_p^p$. Аналогично $H_{p,n}(\mathrm{B}F) = H_p(\mathrm{B}F) \times \ldots \times H_p(\mathrm{B}F)$ (n раз).

Функции $\varphi_i(t,c,\omega)$, $A_i(t,x,a,\omega)$, $B_{ij}(t,x,b,\omega)$ обладают следующими свойствами: 1) они измеримы по совокупности переменных при

$$t \in [0,T],\quad x \equiv \{x_1,\ldots,x_n\} \in E^n,\quad \omega \in \Omega,\quad a \equiv \{a_1,\ldots$$
$$\ldots, a_{m_1}\} \in D^a \subset E^{m_1}\ b \equiv \{b_1,\ \ldots,\ b_{m_2}\} \in D^b \subset E^{m_2}$$
$$c \equiv \{c_1,\ \ldots,\ c_{m_3}\} \in D^c \subset E^{m_3}$$

где D^a, D^b, и D^c — ограниченные множества в соответствующих евклидовых пространствах; 2) F_t-измеримы по ω при фиксированных t, x, a, b, c из $[0,T] \times E^n \times D^a \times D^b \times D^c$; 3) при фиксированных t, x, ω непрерывны по совокупности остальных переменных. Предположим, что функции $A_i(t,x,a,\omega)$, $B_{ij}(t,x,b,\omega)$ дифференцируемы по переменным x_k, а их производные A_{x_k}', B_{x_k}' непрерывны соответственно по совокупности переменных (x,a), (x,b) и равномерно ограничены по абсолютной величине постоянным числом $N > 0$ при всех t, x, a, b, ω из области определения. Наконец, предположим, что $|\varphi_i(t,c,\omega)| \leqslant \alpha_i(t,\omega) \in H_r(\mathrm{B}F)$, $r > 2$ для всех $c \in D^c$.

При каждом $t \in [0,T]$ зададим множества $D^a(t)$, $D^b(t)$, $D^c(t)$ случайных векторов, F_t-измеримых и принимающих значения в D^a, D^b и D^c соответственно. Предполагаем, что семейства $D^i(t)$, $i = a, b, c$ неубывающие и непрерывные слева по $t : D^i(t) = D^i(0) \bigcup D^i(s)$, $0 < s < t$.

Вектор-функции $a(t,\omega)$, $b(t,\omega)$, $c(t,\omega)$ будем называть допустимыми управлениями, если их компоненты $\mathrm{B}F$-измеримы и

$$a(t,\omega) \in D^a(t),\ \ b(t,\omega) \in D^b(t),\ \ c(t,\omega) \in D^c(t),\ \ \forall t$$

Решением системы (1.1), отвечающим допустимому управлению $u(t,\omega) \equiv \{a(t,\omega),\ b(t,\omega),\ c(t,\omega)\}$, называется случайный процесс из $H_{s,n}(\mathrm{B}F)$, для которого (1.1) выполняется при каждом $t \in [0,T]$ почти наверное (см. [7]).

Рассмотрим следующую проблему оптимизации: среди допустимых управлений $u(t,\omega)$, удовлетворяющих ограничению

$$L(u) = M\int_0^T L(s, \eta_u(s), u(s))\,ds \leqslant 0$$

требуется найти управление, минимизирующее функционал

$$J(u) = M\int_0^T J(s, \eta_u(s), u(s))\,ds$$

Здесь $\eta_u(s)$ — решение системы (1.1), отвечающее управлению $u(s)$, M — знак математического ожидания.

Пусть функции $L(t, x, a, b, c, \omega)$, $J(t, x, a, b, c, \omega)$: 1) измеримы по совокупности переменных при $t, x, a, b, c, \omega \in [0,T] \times E^n \times D^a \times D^b \times D^c \times \Omega$; 2) F_t-измеримы по ω при фиксированных t, x, a, b, c; 3) непрерывны по совокупности переменных (a, b, c) при почти всех t, x, ω из $[0, T] \times E^n \times \Omega$ и дважды дифференцируемы по переменным x_k. Пусть, кроме того, выполняются следующие условия порядка роста по x:

$$|J|, |L| \leqslant K_1(1 + |x|^\rho), \quad |J^{\bullet}_{x_k}|, |L^{\bullet}_{x_k}| \leqslant K_2(1 + |x|^{\rho-1})$$

$$|J''_{x_k x_j}|, |L^{\bullet}_{x_k x_j}| \leqslant K_3(1 + |x|^{\rho-2}), \quad \rho \leqslant (r + 2)/2$$

для почти всех t, a, b, c, ω из области определения; K_1, K_2, K_3 — постоянные числа.

2. Вариации управлений. Пусть $u^0(t, \omega) \equiv \{a^0(t, \omega), b^0(t, \omega), c^0(t, \omega)\}$ — оптимальное допустимое управление, а $\eta^0(t, \omega)$ — отвечающее ему решение системы (1.1). Построим варианту управления $u^\varepsilon(t, \omega) \equiv \{a^\varepsilon(t, \omega), b^\varepsilon(t, \omega), c^\varepsilon(t, \omega)\}$. Пусть $\tau_0 \in [0, T]$. Возьмем произвольный конечный набор точек $\{\tau_k\}$ из интервала (τ_0, T). Пусть $\{\alpha_k{}^l\}$ — произвольный конечный набор неотрицательных чисел. Пусть, наконец, $\{a_k{}^l(\omega)\}$, $\{b_k{}^l(\omega)\}$, $\{c_k{}^l(\omega)\}$ — наборы случайных векторов из $D^a(\tau_0)$, $D^b(\tau_0)$, $D^c(\tau_0)$ соответственно. Компоненту $a^\varepsilon(t, \omega)$ варианты управления определим следующим образом:

$$a^\varepsilon(t, \omega) = \begin{cases} a_k{}^l(\omega), & t \in \Pi_k{}^l(\tau_k) \\ a^0(t, \omega), & t \in [0, T] \diagdown \bigcup\limits_{l, k} \Pi_k{}^l(\tau_k) \end{cases}$$

$$\Pi_k{}^l(\tau_k) = \left[\tau_k - \varepsilon \sum_{i=1}^{l} \alpha_k{}^i, \quad \tau_k - \varepsilon \sum_{i=1}^{l-1} \alpha_k{}^i\right)$$

Ясно, что при достаточно малом ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_\alpha$ интервалы $\Pi_k{}^l$ лежат в (τ_0, T) и попарно не пересекаются. Аналогично определяются компоненты $b^\varepsilon(t, \omega)$, $c^\varepsilon(t, \omega)$ варианты $u^\varepsilon(t, \omega)$ с параметрами $\{b_k{}^l(\omega)\}$, $\{c_k{}^l(\omega)\}$ соответственно.

Имеет место следующая теорема о существовании решения системы (1.1) и его устойчивости по возмущению управления.

Теорема 1. Пусть функции $\varphi_i(t, c, \omega)$, $A_i(t, x, a, \omega)$, $B_{ij}(t, x, b, \omega)$ удовлетворяют сформулированным выше условиям. Тогда существует такое положительное число ε^*, $0 < \varepsilon^* \leqslant \varepsilon_\alpha$, что каждой варианте $u^\varepsilon(t, \omega)$ при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon^*$ отвечает единственное решение $\eta^\varepsilon(t, \omega) \in H_{r,n}$ (ВF) системы (1.1). При этом $\| \eta^\varepsilon - \eta^0 \|_{r,n} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Существование и единственность решения системы (1.1) следует непосредственно из [7]. При любом допустимом управлении функция $\varphi(t, c(t)) \in H_{r,n}$ (ВF), поэтому и соответствующее решение $\eta(t) \in H_{r,n}$ (ВF).

Для доказательства устойчивости оптимального решения рассмотрим систему линейных интегральных стохастических уравнений

$$\xi_i(t)=\psi_i(t)+\int_0^t \frac{\partial A_i}{\partial x_k}(s,\ \eta_{1ik}^{\varepsilon}(s), a^{\varepsilon}(s))\,\xi_k(s)\,ds+ \tag{2.1}$$
$$+\int_0^t \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_k}(s,\ \eta_{2ijk}^{\varepsilon}(s), b^{\varepsilon}(s))\,\xi_k(s)\,dw_j(s)$$

Здесь «средние точки» $\eta_{1ik}{}^{\varepsilon}$, $\eta_{2ijk}{}^{\varepsilon}$ определены с вероятностью единица из равенств

$$A_i(t, \eta^{\varepsilon}(t), a^{\varepsilon}(t)) - A_i(t, \eta^{\circ}(t), a^{\varepsilon}(t)) = \tag{2.2}$$
$$=\frac{\partial A_i}{\partial x_k}(t,\ \eta_{1ik}^{\varepsilon}(t), a^{\varepsilon}(t))\,\Delta_{\varepsilon}\eta_k(t)$$
$$B_{ij}(t, \eta^{\varepsilon}(t), b^{\varepsilon}(t)) - B_{ij}(t, \eta^{\circ}(t), b^{\varepsilon}(t)) =$$
$$=\frac{\partial B_{ij}}{\partial x_k}(t,\ \eta_{2ijk}^{\varepsilon}(t), b^{\varepsilon}(t))\,\Delta_{\varepsilon}\eta_k(t)$$
$$(\Delta_{\varepsilon}\eta_k(t)\equiv \eta_k{}^{\varepsilon}(t)-\eta_k{}^{\circ}(t))$$

Лемма 1. Для любой функции $\psi(t)\in H_{p,n}(\mathrm{B}F)$, $p\geqslant 2$ решение системы (2.1) $\xi(t)\in H_{p,n}(\mathrm{B}F)$ существует, единственно и справедлива оценка

$$\|\xi\|_{p,n}\leqslant C_p\,\|\psi\|_{p,n},\quad C_p=C_p(p, m, n, T, N) \tag{2.3}$$

Доказательство. Существование и единственность решения системы (2.1) следует из той же теоремы [7]. Применяя неравенство Гельдера к тождеству (2.1), получим

$$|\xi_i(t)|^p\leqslant 3^{p-1}\left\{|\psi_i(t)|^p+\left|\int_0^t \frac{\partial A_i}{\partial x_k}(\cdot)\,\xi_k(s)\,ds\right|^p+\right.$$
$$\left.+\left|\int_0^t \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_k}(\cdot)\,\xi_k(s)\,dw_j(s)\right|^p\right\}$$

Отсюда, пользуясь оценкой моментов интеграла Ито [8], получим

$$M\,|\xi_i(t)|^p\leqslant 3^{p-1}\left\{M\,|\psi_i(t)|^p+C_p{}'\int_0^t\sum_{k=1}^{n} M\,|\xi_k(s)|^p ds\right\}$$

Суммируя по i, применяя лемму Гронуолла и интегрируя на $[0, T]$, установим искомую оценку (2.3).

Для доказательства теоремы остается заметить, что случайная вектор-функция $\xi(t)=\eta^{\varepsilon}(t)-\eta^{\circ}(t)$ удовлетворяет системе (2.1) при

$$\psi_i(t)=\Delta_u\Phi_i(t)\equiv\Delta_c\varphi_i(t)+\int_0^t\Delta_aA_i(s)\,ds+\int_0^t\Delta_bB_{ij}(s)\,dw_j(s)\in$$
$$\in H_{r,n}(\mathrm{B}F)$$
$$\Delta_c\varphi_i(t)\equiv\varphi_i(t, c^{\varepsilon}(t))-\varphi_i(t, c^{\circ}(t))$$
$$\Delta_aA_i(t)\equiv A_i(t, \eta^{\circ}(t), a^{\varepsilon}(t))-A_i(t, \eta^{\circ}(t), a^{\circ}(t))$$
$$\Delta_bB_{ij}(t)\equiv B_{ij}(t, \eta^{\circ}(t), b^{\varepsilon}(t))-B_{ij}(t, \eta^{\circ}(t), b^{\circ}(t))$$

Тогда на основании (2.3) имеем

$$\| \eta^\varepsilon - \eta^\circ \|_{r,n} \leqslant C_r \| \Delta_u \Phi \|_{r,n} \to 0, \quad \varepsilon \to 0$$

3. Построение интегральных представлений $\Delta_\varepsilon J$, $\Delta_\varepsilon L$. В силу леммы 1 линейная система (2.1) определяет линейный оператор R_ε': $H_{p,n}(\mathrm{B}F) \to H_{p,n}(\mathrm{B}F)$, $\xi = R_\varepsilon'\psi$. Так как множество $H_{p,n}(\mathrm{B}F)$ всюду плотно в $L_{p,n}(\mathrm{B}F)$ и имеет место оценка (2.3), то R_ε' допускает продолжение R_ε на $L_{p,n}(BF)$ по непрерывности, т. е. определен линейный непрерывный оператор $R_\varepsilon : L_{p,n}(\mathrm{B}F) \to L_{p,n}(\mathrm{B}F)$, $p \geqslant 2$, $\| R_\varepsilon \| \leqslant C_p$.

Приращение $\Delta_\varepsilon \eta(t)$ запишем в виде

$$\Delta_\varepsilon \eta = R_\varepsilon \Delta_u \Phi \tag{3.1}$$

Для нахождения первых вариаций функционалов J и L построим интегральные представления для приращений

$$\Delta_\varepsilon J(u) \equiv J(u^\varepsilon) - J(u^\circ), \quad \Delta_\varepsilon L(u) \equiv L(u^\varepsilon) - L(u^\circ)$$

Рассмотрим, например, $\Delta_\varepsilon J$

$$\Delta_\varepsilon J = M \int_0^T \frac{\partial J}{\partial x_k}(s, \eta_{3k}^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s)) \Delta_\varepsilon \eta_k(s)\, ds + M \int_0^T \Delta_u J(s)\, ds \equiv \tag{3.2}$$

$$\equiv \Delta_\varepsilon^{(1)} J + \Delta_\varepsilon^{(2)} J$$

$$(\Delta_u J(t) \equiv J(t, \eta^0(t), u^\varepsilon(t)) - J(t, \eta^\circ(t), u^\circ(t)))$$

Здесь средние точки η_{3k}^ε определены из равенства вида (2.2) для функции J.

На $L_{2,n}(\mathrm{B}F)$ определим семейство (по ε) ограниченных линейных функционалов

$$\{T_\varepsilon\}\colon (T_\varepsilon, \psi) = M \int_0^T \frac{\partial J}{\partial x_k}(s, \eta_{3k}^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s)) \psi_k(s)\, ds$$

Применяя теорему Рисса о представлении линейного функционала, получим в силу (3.1)

$$\Delta_\varepsilon^{(1)} J = (T_\varepsilon, \Delta_\varepsilon \eta) = (T_\varepsilon, R_\varepsilon \Delta_u \Phi) = (R_\varepsilon^* T_\varepsilon, \Delta_u \Phi) \equiv (Q_\varepsilon, \Delta_u \Phi) =$$

$$= M \int_0^T \chi_i^\varepsilon(t) \Delta_u \Phi_i(t)\, dt, \qquad \chi^\varepsilon = R_\varepsilon^* T_\varepsilon \in L_{2,n}(\mathrm{B}F)$$

Подставляя полученное выражение в (3.2), получим искомое интегральное представление

$$\Delta_\varepsilon J = M \int_0^T \chi_i^\varepsilon(t) \Delta_u \Phi_i(t)\, dt + M \int_0^T \Delta_u J(t)\, dt \tag{3.3}$$

Покажем, что при $1 < q' < 2$

$$\| \chi^\varepsilon - \chi^0 \|_{q',n} \to 0, \quad \varepsilon \to 0 \tag{3.4}$$

Здесь

$$\chi^\circ = R_0{}^* T_0, \quad (T_0, \psi) = M \int_0^T \frac{\partial J}{\partial x_k}(s, \eta^\circ(s), u^\circ(s))\, \psi_k(s)\, ds$$

а $R_0 : L_{p,n}(BF) \to L_{p,n}(BF)$, $p \geqslant 2$ — линейный оператор, связанный с системой

$$\xi_i(t) = \psi_i(t) + \int_0^t \frac{\partial A_i}{\partial x_k}(s, \eta^\circ(s), a^\circ(s))\, \xi_k(s)\, ds + \tag{3.5}$$

$$+ \int_0^t \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_k}(s, \eta^\circ(s), b^\circ(s))\, \xi_k(s)\, dw_j(s)$$

Имеем ($q > 2,\ 1 / q + 1 / q' = 1$)

$$\| \chi^\varepsilon - \chi^\circ \|_{q',n} \leqslant \| R_\varepsilon \|_{L_{q,n} \to L_{2,n}} \| T_\varepsilon - T_0 \|_{(L_{2,n})^*} + \tag{3.6}$$

$$+ \| T_0 \|_{(L_{2,n})^*} \| R_\varepsilon - R_0 \|_{L_{q,n} \to L_{2,n}}$$

Покажем, что последняя операторная норма в (3.6) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Возьмем монотонно убывающую последовательность положительных чисел $\delta_m \to 0$, $m \to \infty$. Для каждой функции φ из единичного шара в $L_{q,n}(BF)$ найдется последовательность $\{\varphi_m\} \subset H_{q,n}(BF)$, такая, что $\| \varphi - \varphi_m \|_{q,n} \leqslant \delta_m$. Пусть $\{\xi^{\varepsilon m}\}$, $\{\xi^{0m}\} \subset H_{q,n}(BF)$ — последовательности решений (2.1) и (3.5) соответственно, отвечающих $\{\varphi_m\}$. Тогда

$$\| (R_\varepsilon - R_0)\, \varphi \|_{2,n} \leqslant \| R_\varepsilon (\varphi - \varphi_m) \|_{2,n} + \| R_0 (\varphi - \varphi_m) \|_{2,n} + \tag{3.7}$$

$$+ \| R_\varepsilon \varphi_m - R_0 \varphi_m \|_{2,n} \leqslant 2C_2 T^{(q-2)/2q} \delta_m + \| \xi^{\varepsilon m} - \xi^{0m} \|_{2,n}$$

Используя оценку моментов интеграла Ито, лемму Гронуолла и неравенства Гельдера, оценим норму

$$\| \xi^{\varepsilon m} - \xi^{0m} \|_{2,n}{}^2 \leqslant K_4\, C_q^2\, (1 + \delta_m)^2\, \| \Gamma_\varepsilon \|_{q/(q-2)}$$

$$\Gamma_\varepsilon(t) \equiv T \sum_{i,k} \left\{ \left| \frac{\partial A_i}{\partial x_k}(t, \eta_{1ik}^\varepsilon(t), a^\varepsilon(t)) - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}(t, \eta^\circ(t), a^\circ(t)) \right|^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_j B_2 \left| \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_k}(t, \eta_{2ijk}^\varepsilon(t), b^\varepsilon(t)) - \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_k}(t, \eta^\circ(t), b^\circ(t)) \right|^2 \right\}$$

$(K_4,\ B_2 = \mathrm{const})$

Поскольку $| \eta_{1ik}^\varepsilon - \eta^\circ |$, $| \eta_{2ijk}^\varepsilon - \eta^\circ |$, $| u^\varepsilon - u^\circ | \to 0$, $\varepsilon \to 0$ по мере $\mathrm{mes} \times P$ (теорема 1), функции A'_{x_k}, B'_{x_k} непрерывны по (x, a) и (x, b) соответственно и ограничены, то $\| \Gamma_\varepsilon \| \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

Из (3.7) следует тогда, что $\| (R_\varepsilon - R_0)\, \varphi \|_{2,n} \to 0$, $\varepsilon \to 0$ равномерно относительно выбора φ из единичной сферы и значит

$$\| R_\varepsilon - R_0 \|_{L_{q,n} \to L_{2,n}} \to 0, \quad \varepsilon \to 0 \tag{3.8}$$

Условия, наложенные на интегрант функционала J, обеспечивают предельный переход

$$\| T_\varepsilon - R_0 \|_{(L_{2,n})^*} \to 0, \quad \varepsilon \to 0 \tag{3.9}$$

Из (3.9), (3.8) и (3.6) следует, таким образом, (3.4).

4. Первые вариации функционалов. Вариации функционалов определим как пределы

$$\delta J = \lim_{\varepsilon_k \to 0} \frac{1}{\varepsilon_k} \Delta_{\varepsilon_k} J, \quad \delta L = \lim_{\delta_k \to 0} \frac{1}{\delta_k} \Delta_{\delta_k} L$$

Здесь $\{\varepsilon_k\}$, $\{\delta_k\}$ — некоторые подпоследовательности последовательности $\varepsilon \to 0$. Имеем из (3.3)

$$\Delta_\varepsilon^{(2)} J = M \sum_{l,k} \int_{\Pi_k^l(\tau_k)} [J(t, \eta^\circ(t), a_k^l, b_k^l, c_k^l) - J(t, \eta^\circ(t), u^\circ(t))]\, dt$$

$$\Delta_\varepsilon^{(1)} J = M \sum_{l,k} \int_{\Pi_k^l(\tau_k)} [\chi_i^\varepsilon(t) \Delta_c \varphi_i(t) + \theta_i^\varepsilon(t) \Delta_a A_i(t)]\, dt +$$

$$+ M \int_0^T \chi_i^\varepsilon(t) \left[\int_0^t \Delta_b B_{ij}(s)\, dw_j(s)\right] dt \equiv \Delta_\varepsilon^{(3)} J + \Delta_\varepsilon^{(4)} J$$

$$\left(\theta_i^\varepsilon(t) \equiv \int_t^T \chi_i^\varepsilon(s)\, ds\right)$$

Используя (3.4), можно показать, что для любой пары целых чисел N, M и произвольного допустимого набора случайных величин $\{a_k^l(\omega)\}$, $\{b_k^l(\omega)\}$, $\{c_k^l(\omega)\}$; $k = 1, 2, \ldots, N$; $l = 1, 2, \ldots, M$ найдется множество $E_u^{NM} \subset (\tau_0, T)$, $\operatorname{mes} E_u^{NM} = T - \tau_0$, такое, что для произвольного набора точек $\{\tau_k\} \subset E_u^{NM}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} (\Delta_\varepsilon^{(2)} J + \Delta_\varepsilon^{(3)} J) = \sum_{l,k} \alpha_k^l [g_1^{lk}(\tau_k) + g_2^{lk}(\tau_k)] \tag{4.1}$$

$$g_1^{lk}(\tau) = M[J(\tau, \eta^\circ(\tau), a_k^l, b_k^l, c_k^l) - J(\tau, \eta^\circ(\tau), u^\circ(\tau))]$$

$$g_2^{lk}(\tau) = M\{\chi_i^\circ(\tau)[\varphi_i(\tau, c_k^l) - \varphi_i(\tau, c^\circ(\tau))] + \theta_i^\circ(\tau) \times$$

$$\times [A_i(\tau, \eta^\circ(\tau), a_k^l) - A_i(\tau, \eta^\circ(\tau), a^\circ(\tau))]\};$$

Для того чтобы перейти к гределу в $(1/\varepsilon)\, \Delta_\varepsilon^{(4)} J$, наложим дополнительные ограничения на поток σ-алгебр $\{F_t\}$ и произведем необходимые построения. Именно, предположим, что

$$F_t \equiv \overline{\sigma[w(s), s \leqslant t]} \tag{4.2}$$

Лемма 2. Пусть выполняется условие (4.2) и $\varphi(t, \omega) \in L_2(\mathrm{B}F)$. Тогда найдется единственная функция $\lambda(t, s, \omega) \in L_{2,m}(\mathrm{B} \times \mathrm{B}F)$, такая, что $\operatorname{mes} \times P$-почти всюду на $[0, T] \times \Omega$

$$\varphi(t, \omega) = M\varphi(t, \omega) + \int_0^t \lambda_j(t, s, \omega)\, dw_j(s, \omega) \tag{4.3}$$

При этом оператор $G: \lambda = G\varphi$ ограничен из $L_2(\mathrm{B}F)$ в $L_{2,m}(\mathrm{B} \times \mathrm{B}F)$ и $\| G \| = 1$.

Здесь $L_{2,m}(\mathrm{B} \times \mathrm{B}F)$ — L_2-пространство m-мерных случайных полей с $\mathrm{B} \times \mathrm{B}F$-измеримыми (B — борелевская σ-алгебра в E^1) компонентами.

Доказательство. Пусть $\eta(t, \omega) = \chi_{[0,t_1)}(t)\eta_0(\omega) + \ldots + \chi_{[t_{n-1},T]}(t)\eta_{n-1}(\omega) \in L_2(BF)$. Здесь $\{t_k\}$, $k = 0, 1, \ldots, n$ — конечное разбиение отрезка $[0, T]$,

$\chi_{[\alpha,\beta)}(t)$ — индикаторная функция полуинтервала $[\alpha, \beta)$; $\eta_k(\omega)$ — F_{t_k} — измеримая (с конечным вторым моментом) случайная величина. Согласно [9] при выполнении условия (4.2) для каждого t_k найдется $\lambda^{(k)}(s, \omega) \in L_{2,m}([0, t_k] \times \Omega, \mathrm{B}F)$, такая, что почти наверное

$$\eta_k(\omega) = M\eta_k(\omega) + \int_0^{t_k} \lambda_j^{(k)}(s, \omega)\, dw_j(s, \omega)$$

Отсюда, продолжая $\lambda^{(k)}(s, \omega)$ на $[0, T] \times \Omega$ нулем и полагая $\mu(t, s, \omega) = \chi_{[0,t_1)}(t)\lambda^{(1)}(s, \omega) + \ldots + \chi_{[t_{n-1},T]}(t)\lambda^{n-1}(s, \omega)$, установим лемму для ступенчатых функций. Пусть $\varphi(t, \omega)$ — произвольная функция из $L_2(\mathrm{B}F)$. Аппроксимируем ее последовательностью ступенчатых функций (см. [10], стр. 222): $\| \eta_n - \varphi \|_2 \to 0$, $n \to \infty$. Пусть $\mu^{(n)}(t, s, \omega)$ — отвечающая $\{\eta_n\}$ последовательность стохастических ядер. Тогда из (4.3) имеем

$$\int_0^t [\mu_j^{(n)}(t, s, \omega) - \mu_j^{(k)}(t, s, \omega)]\, dw_j(s, \omega) =$$
$$= \eta_n(t, \omega) - \eta_k(t, \omega) + M[\eta_k(t, \omega) - \eta_n(t, \omega)]$$

Отсюда, используя известные свойства интеграла Ито, выводим

$$\| \mu^{(n)} - \mu^{(k)} \|_{L_{2,m}(\mathrm{B}\times\mathrm{B}F)} \leqslant 2 \| \eta_n - \eta_k \|_2 \to 0, \quad k, n \to \infty$$

Таким образом, последовательность $\{\mu^{(n)}\}$ фундаментальна в $L_{2,m}(\mathrm{B} \times \mathrm{B}F)$ и, значит, в силу полноты этого пространства сходится к некоторому его элементу λ. Из теоремы Фубини для стохастических интегралов (см. [11], стр. 217) следует, что стохастический интеграл

$$\int_0^t \lambda_j(t, s, \omega)\, dw_j(s, \omega)$$

определен и $\mathrm{B}F$-измерим по t, ω. Наконец

$$\| \varphi - M\varphi - \int_0^t \lambda_j(t, s, \omega)\, dw_j(s, \omega) \|_2 \leqslant \| \varphi - \eta_n \|_2 +$$
$$+ \| M(\varphi - \eta_n) \|_{L_2(0,T)} + \| \lambda - \mu^{(n)} \|_{L_{2,m}(\mathrm{B}\times\mathrm{B}F)} \to 0, \quad n \to \infty$$

Возводя тождество (4.3) во вторую степень и интегрируя по мере P, убедимся в справедливости второго утверждения леммы.

Применяя доказанную лемму к семейству (по $\varepsilon > 0$) функций $\chi^\varepsilon(t, \omega) \in L_{2,n}(\mathrm{B}F)$, получим семейство матриц $\{\lambda_{ij}^\varepsilon(t, s, \omega)\} : \{\lambda_{i1}^\varepsilon, \ldots, \lambda_{im}^\varepsilon\} = G\chi_i^\varepsilon$. Введем обозначение

$$\varkappa_{ij}^\varepsilon(t, \omega) \equiv \int_t^T \lambda_{ij}^\varepsilon(s, t, \omega)\, ds \in L_2(\mathrm{B}F)$$

Покажем, что при $1 < \delta < 2$

$$\| \varkappa_{ij}^\varepsilon - \varkappa_{ij}^\circ \|_\delta \to 0, \quad \varepsilon \to 0 \tag{4.4}$$

Применяя дважды неравенства Гельдера и оценку снизу для δ-момента интеграла Ито [8], получим последовательность неравенств

$$\| \varkappa_{ij}^\varepsilon - \varkappa_{ij}^\circ \|_\delta^\delta \equiv M \int_0^T | \varkappa_{ij}^\varepsilon - \varkappa_{ij}^\circ |^\delta\, ds =$$

$$= M\int_0^T\left|\int_s^T [\lambda_{ij}^{\varepsilon}(t,s,\omega) - \mathring{\lambda}_{ij}(t,s,\omega)]\,dt\right|^{\delta} ds \leqslant$$

$$\leqslant M\int_0^T ds\left\{\int_s^T |\lambda^{\varepsilon}(\cdot) - \lambda^{\circ}(\cdot)|^{\delta} dt\,(T-s)^{\delta-1}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant D_{\delta} M\int_0^T \left\{s^{\delta/2-1}\int_s^T |\lambda^{\varepsilon}(\cdot) - \lambda^{\circ}(\cdot)|^{\delta} dt\right\} ds \leqslant$$

$$\leqslant D_{\delta} M\int_0^T ds\left\{\int_s^T t^{\delta/2-1}|\lambda^{\varepsilon}(\cdot) - \lambda^{\circ}(\cdot)|^{\delta} dt\right\} \leqslant$$

$$\leqslant D_{\delta} M\int_0^T \left|\int_0^t |\lambda^{\varepsilon}(\cdot) - \lambda^{\circ}|^{2} ds\right|^{\delta/2} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{D_{\delta}}{A_{\delta}}\int_0^T dt\, M\left|\int_0^t [\lambda^{\varepsilon}(\cdot) - \lambda^{\circ}(\cdot)]\,dw(s)\right|^{\delta} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{D_{\delta}}{A_{\delta}} 2^{\delta}\,\|\chi^{\varepsilon} - \chi^{\circ}\|_{\delta,n}^{\delta} \qquad (A_{\delta} = A_{\delta}(\delta) > 0)$$

Здесь использовано также неравенство

$$(T-t)^{\delta-1} \leqslant D_{\delta} t^{\delta/2-1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad 0 < D_{\delta} = D_{\delta}(\delta) < \infty$$

Таким образом, (4.4) следует из (3.4).

Возвращаясь к $\Delta_{\varepsilon}^{(4)} J$, запишем

$$\Delta_{\varepsilon}^{(4)} J = M\int_0^T \chi_i^{\varepsilon}(t)\left[\int_0^t \Delta_b B_{ij}(s)\,dw_j(s)\right] dt =$$

$$= \int_0^T dt\, M\int_0^t \lambda_{ij}^{\varepsilon}(t,s)\,dw_j(s)\int_0^t \Delta_b B_{ij}(s)\,dw_j(s) =$$

$$= \int_0^T dt\, M\int_0^t \lambda_{ij}^{\varepsilon}(t,s)\,\Delta_b B_{ij}(s)\,ds = M\int_0^T \Delta_b B_{ij}(s)\,\varkappa_{ij}^{\varepsilon}(s)\,ds =$$

$$= \sum_{l,k} M\int_{\Pi_k^l(\tau_k)} \operatorname{Tr} \Delta_b B(s)\,(\varkappa^{\varepsilon}(s))'\,ds$$

Используя (4.4), можно показать, что для любой пары целых чисел N, M и произвольного набора $\{b_k^l(\omega)\}$ найдется множество $E_b^{NM} \subset [\tau_0, T]$ полной меры $\operatorname{mes} E_b^{NM} = T - \tau_0$, такое, что для произвольного набора точек $\{\tau_k\} \subset E_b^{NM}$

$$\lim_{\theta_k \to 0} \frac{1}{\theta_k}\Delta_{\theta_k}^{(4)} J = \sum_{l,k} a_k^l g_3^{lk}(\tau_k)$$

$$g_3^{lk}(\tau) = M \operatorname{Tr}[B(\tau, \eta^{\circ}(\tau), b_k^l) - B(\tau, \eta^{\circ}(\tau), b^{\circ}(\tau))]\,(\varkappa^{\circ}(\tau))'$$

(Tr — взятие следа матрицы, штрих означает транспонирование).

Учитывая (4.1), получаем, что при $\tau_k \in E_u^{NM} \cap E_b^{NM}$ первая вариация функционала J представима в виде

$$\delta J = \sum_{l,k} a_k^l\,[g_1^{lk}(\tau_k) + g_2^{lk}(\tau_k) + g_3^{lk}(\tau_k)] \tag{4.5}$$

Область определения в (4.5) зависит от чисел N, M и конкретных наборов $\{a_k{}^l\}$, $\{b_k{}^l\}$, $\{c_k{}^l\}$. Чтобы избавиться от этой зависимости, выделим в $L_2(\Omega, F, P)$ счетную, всюду плотную сеть случайных величин S_2. Можно показать тогда, что предельные переходы, определяющие вариацию δJ, выполняются по некоторой подпоследовательности $\{\varepsilon_k\}$ на множестве $E \subset (\tau_0, T)$, $\operatorname{mes} E = T - \tau_0$ при произвольных допустимых наборах

$$\{a_k{}^l\} \subset D^a(\tau_0) \cap S_{2,m_1}, \qquad \{b_k{}^l\} \subset D^b(\tau_0) \cap S_{2,m_2}$$
$$\{c_k{}^l\} \subset D^c(\tau_0) \cap S_{2,m_3}$$
$$(S_{2,n} \equiv S_2 \times \ldots \times S_2\,(n\ \text{раз}))$$

Вводя по аналогии с T_ε, χ^ε пару P_ε, $\nu^\varepsilon = R_\varepsilon{}^* P_\varepsilon$, вычислим вариацию δL.

5. Принципы минимума. Рассмотрим в E^2 множество пар $Q = (\delta J, \delta L)$, получающееся при всевозможных допустимых наборах точек $\{\tau_k\} \subset E$, чисел $\{\alpha_k{}^l\}$ и случайных величин $\{a_k{}^l\}$, $\{b_k{}^l\}$, $\{c_k{}^l\}$. Можно показать, что Q — выпуклый конус с вершиной в начале координат. Пусть $R = \{x_1, x_2 : x_1 < 0,\ x_2 < 0\} \subset E^2$. Из оптимальности допустимого управления $u^\circ(t, \omega)$ следует, что конусы Q и R не пересекаются и, значит, разделяются некоторой прямой с вектором нормали $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, $\mu_1{}^2 + \mu_2{}^2 \neq 0$. Направляя этот вектор в сторону конуса Q, получим

$$(5.1) \qquad \mu_1 \delta J + \mu_2 \delta L \geqslant 0$$

Зададим конкретный набор параметров

$$\tau_1 \subset E;\ a_1{}^1(\omega),\ b_1{}^1(\omega),\ c_1{}^1(\omega);\ \alpha_1{}^1 = 1$$

Вычисляя соответствующий набор вариаций, учитывая непрерывность функций A_i, B_{ij}, φ_i по a, b, c (соответственно) и свойства семейств $D^i(t)$, $i = a, b, c$, получим из (5.1) следующие

Принципы минимума. Если $u^\circ(t, \omega)$ — оптимальное допустимое управление, а $\eta^\circ(t, \omega) \in H_{r,n}(\mathrm{B}F)$, $r > 2$ — отвечающее ему оптимальное решение системы (1.1), то существуют функции χ°, $\nu^\circ \in L_{2,n}(\mathrm{B}F)$, определяемые единственным образом операторными соотношениями

$$\chi^\circ = R_0{}^* T_0, \quad \nu^\circ = R_0{}^* P_0$$

и неотрицательные числа μ_1, μ_2 ($\mu_1{}^2 + \mu_2{}^2 \neq 0$), такие, что почти всюду на $[0, T]$ (inf берется по всем $a(\omega) \in D^a(t)$, $b(\omega) \in D^b(t)$, $c(\omega) \in D^c(t)$)

$$(5.2) \qquad MH(t, \eta^\circ(t, \omega), a^\circ(t, \omega), b^\circ(t, \omega), c^\circ(t, \omega), \omega) = \inf MH(t, \eta^\circ(t, \omega), a(\omega), b(\omega), c(\omega), \omega)$$

$$H(t, \eta^\circ(t, \omega), \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \omega) = \mu_1 [J(t, \eta^\circ(t, \omega), \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \omega) + \chi_i{}^\circ(t, \omega)\varphi_i(t, \zeta_3, \omega) + \theta_i{}^\circ(t, \omega) A_i(t, \eta^\circ(t, \omega), \zeta_1, \omega) +$$
$$+ \operatorname{Tr} B(t, \eta^\circ(t, \omega), \zeta_2, \omega)(\varkappa^\circ(t, \omega))'] + \mu_2 \Big[L(t, \eta^\circ(t, \omega), \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \omega) +$$
$$+ \nu_i{}^\circ(t, \omega)\varphi_i(t, \zeta_3, \omega) + \int_t^T \nu_i{}^\circ(s, \omega)\, ds A_i(t, \eta^\circ(t, \omega), \zeta_1, \omega) +$$
$$+ \operatorname{Tr} B(t, \eta^\circ(t, \omega), \zeta_2, \omega)(\alpha^\circ(t, \omega))'\Big]$$

Замечания. 1°. Из (5.2) можно получить неполные принципы минимума для любых двух групп управляющих параметров и для каждой группы в отдельности. Например, для того чтобы получить принцип минимума по группе параметров $\{a, c\}$, достаточно положить в правой части (5.2) $b(\omega) = b_i^\circ(\omega) \equiv b^\circ(t, \omega)$ и т. д.

2°. Для справедливости неполного принципа минимума по группе параметров $\{a, c\}$ достаточно предположений п. 1. Для справедливости принципов минимума по группе параметров, включающей параметры $\{b\}$, необходимо выполнение условия (4.2).

3°. Если считать множества $D^i(t)$, $i = a, b, c$ множествами векторов из D^i, не зависящих от случая ω, то (5.2) будет являться необходимым условием оптимальности в задаче с детерминированными управлениями.

6. Пример. Можно показать, что оператор R_0, введенный в п. 3, имеет ограниченный обратный оператор R_0^{-1} и, следовательно, выполняется равенство $(R_0^{-1})^* = (R_0^*)^{-1}$. Это означает, что функции χ°, ν° могут быть найдены как решения сопряженных задач

$$(R_0^{-1})^*\chi^\circ = T_0, \quad (R_0^{-1})^*\nu^\circ = P_0 \tag{6.1}$$

При выполнении условия (4.2) можно найти явное представление для оператора $(R_0^{-1})^*$ и показать, таким образом, что решение задачи (6.1) удовлетворяет mes $\times$ $\times$ P-почти всюду тождеству

$$\chi_i^\circ(t, \omega) - \frac{\partial A_k}{\partial x_i}(t, \eta^\circ(t, \omega), a^\circ(t, \omega), \omega)\, M\{\theta_k^\circ(t, \omega) \mid F_t\} - \\ - \frac{\partial B_{kj}}{\partial x_i}(t, \eta^\circ(t, \omega), b^\circ(t, \omega), \omega)\, \varkappa_{kj}^\circ(t, \omega) \equiv \frac{\partial J}{\partial x_i}(t, \eta^\circ(t, \omega), u^\circ(t, \omega), \omega) \tag{6.2}$$

Здесь $M\{\xi \mid F\}$ — условное математическое ожидание случайной величины ξ относительно σ-алгебры F.

Лемма 3. Пусть $\partial B_{ij} / \partial x_k \equiv 0$ и случайная функция $y^\circ(t, \omega) \equiv \{y_1^\circ(t, \omega), \ldots, y_n^\circ(t, \omega)\}$ — решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений со случайными правыми частями

$$\frac{dy_i^\circ}{dt} = -y_k^\circ(t)\frac{\partial A_k}{\partial x_i}(t) - \frac{\partial J}{\partial x_i}(t), \quad y_i^\circ(T) = 0 \tag{6.3}$$

Тогда прогрессивно измеримая модификация процесса

$$\chi_i^\circ(t) = \frac{\partial J}{\partial x_i}(t) + \frac{\partial A_k}{\partial x_i}(t)\, M\{y_k^\circ(t) \mid F_t\}$$

удовлетворяет системе (6.2).

Рассмотрим простейший пример. Пусть $\eta(t) \equiv \{\eta_1(t), \eta_2(t)\}$ — управляемый стохастический процесс, заданный в виде системы

$$d\eta_1 = (a_1 + \eta_2)dt + b_1 dw_1 \quad \eta_1(0) = \eta_1^\circ$$
$$d\eta_2 = (a_2 + \eta_1)dt + b_2 dw_1 \quad \eta_2(0) = \eta_2^\circ$$

Требуется найти управление $\{a_1^\circ, a_2^\circ; b_1^\circ, b_2^\circ\}$ в классе детерминированных управлений со значениями на отрезке $[-1, 1]$, минимизирующее функционал

$$J(u) = M\int_0^T [T_1^\circ(s)\eta_1(s) + T_2^\circ(s)\eta_2(s)]\, ds$$

Для простоты считаем случайные процессы T_1°, T_2° мартингалами: $GT_i^\circ = \alpha_i^\circ(s, \omega)$, $i = 1, 2$.

Используя (6.3), получим

$$\chi_i^\circ(t) = T_i^\circ(t)\,\mathrm{ch}\,(T-t) + T_j^\circ(t)\,\mathrm{sh}\,(T-t)$$

$$\lambda_i^\circ(t, s) = \alpha_i^\circ(s)\,\mathrm{ch}\,(T-t) + \alpha_j^\circ(s)\,\mathrm{sh}\,(T-t), \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j$$

Тогда из (5.2) следует, что подозрительными на оптимальность являются следующие управления:

$$a_i^\circ(t) = -\mathrm{sgn}\,\{MT_i^\circ\,\mathrm{sh}\,(T-t) + MT_j^\circ\,(\mathrm{ch}\,(T-t) - 1)\}$$

$$b_i^\circ(t) = -\mathrm{sgn}\,M\,\{\alpha_i^\circ(t)\,\mathrm{sh}\,(T-t) + \alpha_j^\circ(t)\,(\mathrm{ch}\,(T-t) - 1)\}$$

$$i, j = 1, 2; \quad i \neq j$$

Можно показать, что эти управления действительно оптимальные.

Поступила 8 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крылов Н. В.* Об управлении решением стохастического интегрального уравнения. Теория вероятностей и ее применения, 1972, т. 17, вып. 1.
2. *Fleming W. H.* Optimal control of partially observable diffusions. SIAM J, Control., 1968, vol. 6, No. 2.
3. *Kushner H. J., Schweppe F. C.* A maximum principle for stochastic control systems. J. Math. Analysis and Appl., 1964, vol. 8, No. 2.
4. *Kushner H. J.* On the stochastic maximum principle: Fixed time of control. J. Math. Analysis and Appl., 1965, vol. 11, No. 1—3.
5. *Плотников В. И.* Необходимые условия оптимальности для управляемых систем общего вида. Докл. АН СССР, 1971, т. 199, № 2.
6. *Плотников В. И.* Необходимые и достаточные условия оптимальности и условия единственности оптимизирующих функций для управляемых систем общего вида. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1972, т. 36, № 3.
7. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, «Наукова думка», 1968.
8. *Новиков А. А.* О моментных неравенствах для стохастических интегралов. Теория вероятностей и ее применения, 1971, т. 16, вып. 3.
9. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 3. М., «Наука», 1975.
10. *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. М., «Наука», 1975.
11. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. М., «Наука», 1974.